Valószínűségszámítás és Statisztika Vizsgazárthelyi, 2012. január 4.

Az I. és II. rész kérdéseinek mindegyikénél pontosan 1 válasz helyes. A válaszokat írja a kérdések utáni táblázatba! **A szövegben bekarikázott válaszokat nem fogjuk elfogadni!**

I. rész (helyes válaszok: +2 pont, helytelen: -1 pont)

1. X és Y függetlenek, normális eloszlásúak. X eloszlása $N(2,3^2)$, Y eloszlása $N(1,2^2)$.

a) Mennyi $X + 2Y$ várható értéke?

A: 4	B: 7	C: 25	D: egyéb

b) Mennyi $X - 2Y$ szórásnégyzete?

A: 4	B: 7	C: 25	D: egyéb

2. Péter és Gábor is egy év alatt Poisson eloszlású intőt (mindkettő várhatóan 2-2 intőt) gyűjt be. Intőik száma független egymástól. Mennyi a valószínűsége, hogy egy év alatt összesen 3 intőt hoznak haza?

A: egyéb	B: $32e^{-4}/3$	C: ¼	D: $4e^{-2}/3$

3. Az X_1, X_2, … független, 1/3 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Mihez fog tartani sztochasztikusan $(2X_1+2X_2+ \dots +2X_n)/n$?

A: egyéb	B: semmihez	C: 6-hoz	D: 2/3-hoz	E: 3-hoz

4. A Zinformatikai Kar II. évfolyamán 25 lány és 75 fiú tanul. Január 27-én 10-en vizsgáznak. Mennyi a valószínűsége, hogy a 10 vizsgázóból pontosan 3 lány?

A:	B:	C:	D:	E:	F:
$\frac{\binom{25}{3}\binom{75}{7}}{\binom{100}{10}}$	$\frac{\binom{25}{7}\binom{75}{3}}{\binom{100}{10}}$	$\frac{\binom{25}{3}\binom{50}{7}}{\binom{75}{10}}$	$\frac{\binom{25}{7}\binom{50}{3}}{\binom{75}{10}}$	$\frac{\binom{75}{35}\binom{50}{40}}{\binom{125}{75}}$	$\frac{\binom{75}{40}\binom{50}{35}}{\binom{125}{75}}$

5. (folytatás) Várhatóan hány lány vizsgázik január 27-én?

A: 2,5	B: 7,5	C: 20/3	D: 10/3	E: 30	F: 45

6. Az X valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású. Várható értéke 3. Milyen valószínűséggel veszi fel a 3 értéket?

A: 1	B: $\Phi(3)$	C: 0	D: egyéb

7. $P(X=-1)=1/3$, $P(X=8)=2/3$. Mennyi lesz X szórásnégyzete?

A: egyéb	B: 8	C: 18	D: 12

II. rész

8. Egy kísérletsorozatnál megfigyeléseink a következők: 3, 1, 8, 7, 3, 3. (a válaszoknál 2 tizedesjegyre kerekítettünk)

a) Mi a minta tapasztalati 2. momentuma? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

b) Mi a minta nagysága? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

c) Mi a minta terjedelme? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

d) Feltételezzük, hogy megfigyeléseink $N(m,3^2)$ eloszlásúak. Mi az ismeretlen m paraméter maximum likelihood becslése? (helyes válasz: +3 pont, helytelen: -2 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

9. Az $m>0$ ismeretlen paramétert akarjuk becsülni. A következő 4 becslés közül az egyik torzítatlan hatásos becslés. Melyik? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: a becslés várható értéke 1, szórásnégyzete 0	B: a becslés várható értéke m, szórásnégyzete $(m+1)^2$	C: a becslés várható értéke m, szórásnégyzete m	D: a becslés várható értéke 0, szórásnégyzete m

10. Egy 120 fős évfolyamból 40-en nem mertek elmenni a statisztika vizsgára, 70-en megbuktak és 10-en sikeresen vizsgáztak. Nullhipotézisünk az, hogy a három esemény egyenlő valószínű. $\chi 2$ próbát alkalmazunk. Az alábbi állítások közül pontosan egy igaz. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	B: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.	C: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.
D: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	E: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	F: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.

11. 4-elemű $N(m, 1.5^2)$ mintánk van (m ismeretlen paraméter) 1, 4, 1 és 3 megfigyelésekkel. A H_0: $m=0$ hipotézist vizsgáljuk a H_1: $m\neq 0$ ellenhipotézissel szemben. A következő eljárások közül pontosan 1 helyes. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3, ezért a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.	B: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3,46, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	C: U-próbát alkalmazunk és mivel a U-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.
D: U-próbát alkalmazunk és mivel az U-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	E: U-próbát alkalmazunk és mivel az U-statisztika értéke 3, ezért a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.	F: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.

Kérdés	1/a	1/b	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8/a	8/b	8/c	8/d	9.	10.	11.
Válasz	A	C	B	C	A	A	C	C	C	E	F	D	C	B	C

III. rész A következő kérdéseket a kiadott lapokon dolgozza ki! Minden lapra írja rá nevét!

1. Definiálja a következő fogalmakat: elsőfajú hiba, maximum-likelihood becslés, mintatér! /6 pont/
2. Bizonyítsa be, hogy a szimmetrikus bolyongás visszatérési idejének várható értéke végtelen! /8 pont/
3. Mondja ki a nagy számok erős törvényét! /3 pont/
4. Mondja ki és bizonyítsa be a statisztika alaptételét! /10 pont/

Osztályzás:

Összpontszám legalább 42 pont: jeles
I. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen
II. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen
Összpontszám legfeljebb 19 pont: elégtelen

Táblázatok

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9983
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,20	0,9993
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,40	0,9996
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,60	0,9998
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,80	0,9999
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861		
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8079	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Valószínűségszámítás és Statisztika Vizsgazárthelyi, 2012. január 4.

Az I. és II. rész kérdéseinek mindegyikénél pontosan 1 válasz helyes. A válaszokat írja a kérdések utáni táblázatba! **A szövegben bekarikázott válaszokat nem fogjuk elfogadni!**

I. rész (helyes válaszok: +2 pont, helytelen: -1 pont)

1. X és Y függetlenek, normális eloszlásúak. X eloszlása $N(3,3^2)$, Y eloszlása $N(2,2^2)$.

a) Mennyi $X + 2Y$ várható értéke?	A: 4	B: 7	C: 25	D: egyéb
b) Mennyi $X - 2Y$ szórásnégyzete?	A: 4	B: 25	C: 7	D: egyéb

2. Péter és Gábor is egy év alatt Poisson eloszlású intőt (mindkettő várhatóan 1-1 intőt) gyűjt be. Intőik száma független egymástól. Mennyi a valószínűsége, hogy egy év alatt összesen 3 intőt hoznak haza?

A: egyéb	B: $e^{-1}/6$	C: ¼	D: $4e^{-2}/3$

3. Az X_1, X_2, … független, 3 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Mihez fog tartani sztochasztikusan $(2X_1+2X_2+ \dots +2X_n)/n$?

A: egyéb	B: semmihez	C: 6-hoz	D: 2/3-hoz	E: 3-hoz

4. A Zinformatikai Kar II. évfolyamán 25 lány és 75 fiú tanul. Január 27-én 10-en vizsgáznak. Mennyi a valószínűsége, hogy a 10 vizsgázóból pontosan 3 lány?

A:	B:	C:	D:	E:	F:
$\frac{\binom{25}{3}\binom{75}{7}}{\binom{100}{10}}$	$\frac{\binom{25}{7}\binom{75}{3}}{\binom{100}{10}}$	$\frac{\binom{25}{3}\binom{50}{7}}{\binom{75}{10}}$	$\frac{\binom{25}{7}\binom{50}{3}}{\binom{75}{10}}$	$\frac{\binom{75}{35}\binom{50}{40}}{\binom{125}{75}}$	$\frac{\binom{75}{40}\binom{50}{35}}{\binom{125}{75}}$

5. (folytatás) Várhatóan hány lány vizsgázik január 27-én?

A: 2,5	B: 7,5	C: 20/3	D: 10/3	E: 30	F: 45

6. Az X valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású. Várható értéke 3. Milyen valószínűséggel veszi fel a 3 értéket?

A: 1	B: 0	C: $\Phi(3)$	D: egyéb

7. P(X=-1)=1/3, P(X=8)=2/3. Mennyi lesz X szórásnégyzete?

A: 12	B: 8	C: 18	D: egyéb

II. rész

8. Egy kísérletsorozatnál megfigyeléseink a következők: 3, 1, 8, 7, 3, 3. (a válaszoknál 2 tizedesjegyre kerekítettünk)

a) Mi a minta tapasztalati 2. momentuma? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

b) Mi a minta nagysága? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

c) Mi a minta terjedelme? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

d) Feltételezzük, hogy megfigyeléseink $N(m,3^2)$ eloszlásúak. Mi az ismeretlen m paraméter maximum likelihood becslése? (helyes válasz: +3 pont, helytelen: -2 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

9. Az $m>0$ ismeretlen paramétert akarjuk becsülni. A következő 4 becslés közül az egyik torzítatlan hatásos becslés. Melyik? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: a becslés várható értéke 1, szórásnégyzete 0	B: a becslés várható értéke m, szórásnégyzete $(m+1)^2$	C: a becslés várható értéke m, szórásnégyzete m	D: a becslés várható értéke 0, szórásnégyzete m

10. Egy 120 fős évfolyamból 40-en nem mertek elmenni a statisztika vizsgára, 70-en megbuktak és 10-en sikeresen vizsgáztak. Nullhipotézisünk az, hogy a három esemény egyenlő valószínű. $\chi 2$ próbát alkalmazunk. Az alábbi állítások közül pontosan egy igaz. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	B: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.	C: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.
D: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	E: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	F: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.

11. 4-elemű $N(m, 1.5^2)$ mintánk van (m ismeretlen paraméter) 1, 4, 1 és 3 megfigyelésekkel. A H_0: $m=0$ hipotézist vizsgáljuk a H_1: $m\neq 0$ ellenhipotézissel szemben. A következő eljárások közül pontosan 1 helyes. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3, ezért a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.	B: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3,46, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	C: U-próbát alkalmazunk és mivel a U-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.
D: U-próbát alkalmazunk és mivel az U-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	E: U-próbát alkalmazunk és mivel az U-statisztika értéke 3, ezért a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.	F: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.

Kérdés	1/a	1/b	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8/a	8/b	8/c	8/d	9.	10.	11.
Válasz	B	B	D	D	A	A	B	C	C	E	F	D	C	B	C

III. rész A következő kérdéseket a kiadott lapokon dolgozza ki! Minden lapra írja rá nevét!

1. Definiálja a következő fogalmakat: elsőfajú hiba, maximum-likelihood becslés, mintatér! /6 pont/
2. Bizonyítsa be, hogy a szimmetrikus bolyongás visszatérési idejének várható értéke végtelen! /8 pont/
3. Mondja ki a nagy számok erős törvényét! /3 pont/
4. Mondja ki és bizonyítsa be a statisztika alaptételét! /10 pont/

Osztályzás:

Összpontszám legalább 42 pont: jeles
I. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen
II. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen
Összpontszám legfeljebb 19 pont: elégtelen

Táblázatok

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9983
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,20	0,9993
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,40	0,9996
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,60	0,9998
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,80	0,9999
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861		
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8079	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt,$ $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Valószínűségszámítás és Statisztika Vizsgazárthelyi, 2012. január 4.

Az I. és II. rész kérdéseinek mindegyikénél pontosan 1 válasz helyes. A válaszokat írja a kérdések utáni táblázatba! **A szövegben bekarikázott válaszokat nem fogjuk elfogadni!**

I. rész (helyes válaszok: +2 pont, helytelen: -1 pont)

1. X és Y függetlenek, normális eloszlásúak. X eloszlása $N(5,3^2)$, Y eloszlása $N(10,4^2)$.

a) Mennyi $X + 2Y$ várható értéke?	A: 4	B: 7	C: 25	D: egyéb
b) Mennyi $X - 2Y$ szórásnégyzete?	A: 4	B: 7	C: 25	D: egyéb

2. Péter és Gábor is egy év alatt Poisson eloszlású intőt (mindkettő várhatóan 2-2 intőt) gyűjt be. Intőik száma független egymástól. Mennyi a valószínűsége, hogy egy év alatt összesen 3 intőt hoznak haza?

A: egyéb	B: ¼	C: $32e^{-4}/3$	D: $4e^{-2}/3$

3. Az X_1, X_2, … független, 1/3 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Mihez fog tartani sztochasztikusan $(3X_1+3X_2+ \dots +3X_n)/n$?

A: egyéb	B: 9-hez	C: semmihez	D: 1-hez	E: 3-hoz

4. A Zinformatikai Kar II. évfolyamán 25 lány és 75 fiú tanul. Január 27-én 10-en vizsgáznak. Mennyi a valószínűsége, hogy a 10 vizsgázóból pontosan 7 lány?

A: $\frac{\binom{25}{3}\binom{75}{7}}{\binom{100}{10}}$	B: $\frac{\binom{25}{7}\binom{75}{3}}{\binom{100}{10}}$	C: $\frac{\binom{25}{3}\binom{50}{7}}{\binom{75}{10}}$	D: $\frac{\binom{25}{7}\binom{50}{3}}{\binom{75}{10}}$	E: $\frac{\binom{75}{35}\binom{50}{40}}{\binom{125}{75}}$	F: $\frac{\binom{75}{40}\binom{50}{35}}{\binom{125}{75}}$

5. (folytatás) Várhatóan hány lány vizsgázik január 27-én?

A: 2,5	B: 7,5	C: 20/3	D: 10/3	E: 30	F: 45

6. Az X valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású. Várható értéke 3. Milyen valószínűséggel veszi fel a 3 értéket?

A: 0	B: 1	C: $\Phi(3)$	D: egyéb

7. P(X=-2)=1/3, P(X=4)=2/3. Mennyi lesz X szórásnégyzete?

A: 12	B: 8	C: 18	D: egyéb

II. rész

8. Egy kísérletsorozatnál megfigyeléseink a következők: 3, 1, 8, 7, 3, 3. (a válaszoknál 2 tizedesjegyre kerekítettünk)

a) Mi a minta tapasztalati 2. momentuma? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

b) Mi a minta nagysága? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

c) Mi a minta terjedelme? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

d) Feltételezzük, hogy megfigyeléseink $N(m,3^2)$ eloszlásúak. Mi az ismeretlen m paraméter maximum likelihood becslése? (helyes válasz: +3 pont, helytelen: -2 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

9. Az $m>0$ ismeretlen paramétert akarjuk becsülni. A következő 4 becslés közül az egyik torzítatlan hatásos becslés. Melyik? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: a becslés várható értéke 1, szórásnégyzete 0	B: a becslés várható értéke m, szórásnégyzete $(m+1)^2$	C: a becslés várható értéke m, szórásnégyzete m	D: a becslés várható értéke 0, szórásnégyzete m

10. Egy 120 fős évfolyamból 40-en nem mertek elmenni a statisztika vizsgára, 70-en megbuktak és 10-en sikeresen vizsgáztak. Nullhipotézisünk az, hogy a három esemény egyenlő valószínű. $\chi 2$ próbát alkalmazunk. Az alábbi állítások közül pontosan egy igaz. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	B: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.	C: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.
D: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	E: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	F: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.

11. 4-elemű $N(m, 1.5^2)$ mintánk van (m ismeretlen paraméter) 1, 4, 1 és 3 megfigyelésekkel. A H_0: $m=0$ hipotézist vizsgáljuk a H_1: $m\neq 0$ ellenhipotézissel szemben. A következő eljárások közül pontosan 1 helyes. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3, ezért a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.	B: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3,46, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	C: U-próbát alkalmazunk és mivel a U-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.
D: U-próbát alkalmazunk és mivel az U-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	E: U-próbát alkalmazunk és mivel az U-statisztika értéke 3, ezért a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.	F: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.

Kérdés	1/a	1/b	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8/a	8/b	8/c	8/d	9.	10.	11.
Válasz	C	D	C	B	B	A	A	B	C	E	F	D	C	B	C

III. rész A következő kérdéseket a kiadott lapokon dolgozza ki! Minden lapra írja rá nevét!

1. Definiálja a következő fogalmakat: elsőfajú hiba, maximum-likelihood becslés, mintatér! /6 pont/
2. Bizonyítsa be, hogy a szimmetrikus bolyongás visszatérési idejének várható értéke végtelen! /8 pont/
3. Mondja ki a nagy számok erős törvényét! /3 pont/
4. Mondja ki és bizonyítsa be a statisztika alaptételét! /10 pont/

Osztályzás:

Összpontszám legalább 42 pont: jeles
I. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen
II. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen
Összpontszám legfeljebb 19 pont: elégtelen

Táblázatok

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9983
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,20	0,9993
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,40	0,9996
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,60	0,9998
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,80	0,9999
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861		
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8079	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt,$ $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Valószínűségszámítás és Statisztika Vizsgazárthelyi, 2012. január 4.

Az I. és II. rész kérdéseinek mindegyikénél pontosan 1 válasz helyes. A válaszokat írja a kérdések utáni táblázatba! **A szövegben bekarikázott válaszokat nem fogjuk elfogadni!**

I. rész (helyes válaszok: +2 pont, helytelen: -1 pont)

1. X és Y függetlenek, normális eloszlásúak. X eloszlása N(2,1), Y eloszlása N(5,2^2).

a) Mennyi $X + 2Y$ várható értéke?	A: 4	B: 7	C: 25	D: egyéb
b) Mennyi $X - 2Y$ szórásnégyzete?	A: 4	B: 17	C: 25	D: egyéb

2. Péter és Gábor is egy év alatt Poisson eloszlású intőt (mindkettő várhatóan 1-1 intőt) gyűjt be. Intőik száma független egymástól. Mennyi a valószínűsége, hogy egy év alatt összesen 3 intőt hoznak haza?

A: $4e^{-2}/3$	B: $e^{-1}/6$	C: ¼	D: egyéb

3. Az X_1, X_2, … független, 3 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Mihez fog tartani sztochasztikusan $(3X_1+3X_2+ \dots +3X_n)/n$?

A: egyéb	B: 9-hez	C: semmihez	D: 1-hez	E: 3-hoz

4. A Zinformatikai Kar II. évfolyamán 25 lány és 75 fiú tanul. Január 27-én 10-en vizsgáznak. Mennyi a valószínűsége, hogy a 10 vizsgázóból pontosan 7 lány?

A:	B:	C:	D:	E:	F:
$\frac{\binom{25}{3}\binom{75}{7}}{\binom{100}{10}}$	$\frac{\binom{25}{7}\binom{75}{3}}{\binom{100}{10}}$	$\frac{\binom{25}{3}\binom{50}{7}}{\binom{75}{10}}$	$\frac{\binom{25}{7}\binom{50}{3}}{\binom{75}{10}}$	$\frac{\binom{75}{35}\binom{50}{40}}{\binom{125}{75}}$	$\frac{\binom{75}{40}\binom{50}{35}}{\binom{125}{75}}$

5. (folytatás) Várhatóan hány lány vizsgázik január 27-én?

A: 2,5	B: 7,5	C: 20/3	D: 10/3	E: 30	F: 45

6. Az X valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású. Várható értéke 3. Milyen valószínűséggel veszi fel a 3 értéket?

A: 0	B: 1	C: Φ(3)	D: egyéb

7. P(X=-2)=1/3, P(X=4)=2/3. Mennyi lesz X szórásnégyzete?

A: 12	B: 8	C: 18	D: egyéb

II. rész

8. Egy kísérletsorozatnál megfigyeléseink a következők: 3, 1, 8, 7, 3, 3. (a válaszoknál 2 tizedesjegyre kerekítettünk)

a) Mi a minta tapasztalati 2. momentuma? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 23,5	B: 6,14	C: 7,37	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

b) Mi a minta nagysága? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 6	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 7,37	F: egyéb

c) Mi a minta terjedelme? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 4,17	E: 6	F: egyéb

d) Feltételezzük, hogy megfigyeléseink N(m,3^2) eloszlásúak. Mi az ismeretlen m paraméter maximum likelihood becslése? (helyes válasz: +3 pont, helytelen: -2 pont)

A: 7,37	B: 6,14	C: 23,5	D: 6	E: 4,17	F: egyéb

9. Az m>0 ismeretlen paramétert akarjuk becsülni. A következő 4 becslés közül az egyik torzítatlan hatásos becslés. Melyik? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: a becslés várható értéke 1, szórásnégyzete 0	B: a becslés várható értéke m, szórásnégyzete $(m+1)^2$	C: a becslés várható értéke m, szórásnégyzete m	D: a becslés várható értéke 0, szórásnégyzete m

10. Egy 120 fős évfolyamból 40-en nem mertek elmenni a statisztika vizsgára, 70-en megbuktak és 10-en sikeresen vizsgáztak. Nullhipotézisünk az, hogy a három esemény egyenlő valószínű. $\chi 2$ próbát alkalmazunk. Az alábbi állítások közül pontosan egy igaz. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	B: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.	C: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.
D: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	E: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	F: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.

11. 4-elemű N(m, 1.5^2) mintánk van (m ismeretlen paraméter) 1, 4, 1 és 3 megfigyelésekkel. A H_0: $m=0$ hipotézist vizsgáljuk a H_1: $m\neq 0$ ellenhipotézissel szemben. A következő eljárások közül pontosan 1 helyes. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3, ezért a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.	B: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3,46, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	C: U-próbát alkalmazunk és mivel a U-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.
D: U-próbát alkalmazunk és mivel az U-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	E: U-próbát alkalmazunk és mivel az U-statisztika értéke 3, ezért a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.	F: t-próbát alkalmazunk és mivel a t-statisztika értéke 3, ezért mind a 10%-os, mind az 5 és 2%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.

Kérdés	1/a	1/b	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8/a	8/b	8/c	8/d	9.	10.	11.
Válasz	D	B	A	D	B	A	A	B	A	A	F	E	C	B	C

III. rész A következő kérdéseket a kiadott lapokon dolgozza ki! Minden lapra írja rá nevét!

1. Definiálja a következő fogalmakat: elsőfajú hiba, maximum-likelihood becslés, mintatér! /6 pont/
2. Bizonyítsa be, hogy a szimmetrikus bolyongás visszatérési idejének várható értéke végtelen! /8 pont/
3. Mondja ki a nagy számok erős törvényét! /3 pont/
4. Mondja ki és bizonyítsa be a statisztika alaptételét! /10 pont/

Osztályzás:

Összpontszám legalább 42 pont: jeles
I. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen
II. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen
Összpontszám legfeljebb 19 pont: elégtelen

Táblázatok

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9983
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,20	0,9993
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,40	0,9996
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,60	0,9998
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,80	0,9999
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861		
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8079	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt,$ $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

A χ^2-próba kritikus értékei

f	0,1	0,05	0,01
1	2,71	3,84	6,63
2	4,61	5,99	9,21
3	6,25	7,81	11,3
4	7,78	9,49	13,3
5	9,24	11,1	15,1
6	10,6	12,6	16,8
7	12,0	14,1	18,5
8	13,4	15,5	20,1
9	14,7	16,9	21,7
10	16,0	18,3	23,2
11	17,3	19,7	24,7
12	18,5	21,0	26,2
13	19,8	22,4	27,9
14	21,1	23,7	29,1
15	22,3	25,0	30,6

f	0,1	0,05	0,01
16	23,5	26,3	32,0
17	24,8	27,6	33,4
18	26,0	28,9	34,8
19	27,2	30,1	36,2
20	28,4	31,4	37,6
21	29,6	32,7	38,9
22	30,8	33,9	40,3
23	32,0	35,2	41,6
24	33,2	36,4	43,0
25	34,4	37,7	44,3
26	35,6	38,9	45,6
27	36,7	40,1	47,0
28	37,9	41,3	48,3
29	39,1	42,6	49,6
30	40,3	43,8	50,9

Az eloszlás szabadságfoka f, az oszlopok felett a próba terjedelmét adtuk meg.

Ha $f > 30$, akkor normális közelítést alkalmazhatunk: a $(T - f)/\sqrt{f}$ statisztikára vonatkozó kritikus értékek:

0,1	0,05	0,01
2,22	2,85	4,03

A t-(Student-)próba kritikus értékei

f	0,1 0,05	0,05 0,025	0,02 0,01
1	6,314	12,71	31,82
2	2,920	4,303	6,965
3	2,353	3,182	4,541
4	2,132	2,776	3,747
5	2,015	2,571	3,365
6	1,943	2,447	3,143
7	1,895	2,365	2,998
8	1,860	2,306	2,896
9	1,833	2,262	2,821
10	1,812	2,228	2,764
11	1,796	2,201	2,718
12	1,782	2,179	2,681
13	1,771	2,160	2,650
14	1,761	2,145	2,624
15	1,753	2,131	2,602
16	1,746	2,120	2,583
17	1,740	2,110	2,567
18	1,734	2,101	2,552
19	1,729	2,093	2,539
20	1,725	2,086	2,528

f	0,1 0,05	0,05 0,025	0,02 0,01
21	1,721	2,080	2,518
22	1,717	2,074	2,508
23	1,714	2,069	2,500
24	1,711	2,064	2,492
25	1,708	2,060	2,485
26	1,706	2,056	2,479
27	1,703	2,052	2,473
28	1,701	2,048	2,467
29	1,699	2,045	2,462
30	1,697	2,042	2,457
40	1,684	2,021	2,423
50	1,676	2,009	2,403
60	1,671	2,000	2,390
70	1,667	1,994	2,381
80	1,664	1,990	2,374
90	1,662	1,987	2,369
100	1,660	1,984	2,364
200	1,653	1,972	2,345
500	1,648	1,965	2,334
∞	1,645	1,960	2,326

Az eloszlás szabadságfoka f, az oszlopok felett a próba terjedelmét adtuk meg, a felső érték kétoldali, az alsó egyoldali ellenhipotézisre vonatkozik.

Az F-próba kritikus értékei (a terjedelem 0,025 az egyoldali és 0,05 a kétoldali esetben)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	648,	800,	864,	900,	922,	937,	948,	957,	963,	969,	973,	977,
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,4	14,3
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,79	8,75
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,57	6,52
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,41	5,37
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,71	4,67
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,24	4,20
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,91	3,87
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,66	3,62
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,47	3,43
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,32	3,28
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,20	3,15
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,09	3,05
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	3,01	2,96
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,93	2,89
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,87	2,82
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,82	2,77
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,76	2,72
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	3,84	2,77	2,72	2,68
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,68	2,64
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,65	2,60
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,62	2,57
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,59	2,54
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,56	2,51
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,54	2,49
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,51	2,47
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,49	2,45
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,48	2,43
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,46	2,41
32	5,53	4,15	3,56	3,22	3,00	2,84	2,72	2,62	2,54	2,48	2,43	2,38
34	5,50	4,12	3,53	3,19	2,97	2,81	2,69	2,59	2,52	2,45	2,40	2,35
36	5,47	4,09	3,50	3,17	2,94	2,78	2,66	2,57	2,49	2,43	2,38	2,33
38	5,44	4,07	3,48	3,15	2,92	2,76	2,64	2,55	2,47	2,41	2,35	2,31
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,33	2,29
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,22	2,17
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,10	2,05
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,99	1,94

Az oszlopok tetején a számláló szabadságfokát, a sorokban a nevezőét tüntettük fel.

	13	14	15	16	18	20	24	30	40	60	120	∞
1	980,	983,	985,	987,	990,	993,	997,	1001	1006	1010	1014	1018
2	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
3	14,3	14,3	14,3	14,2	14,2	14,2	14,1	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9
4	8,71	8,68	8,66	8,63	8,59	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	6,49	6,45	6,42	6,40	6,36	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	5,33	5,30	5,27	5,24	5,20	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
7	4,63	4,60	4,57	4,54	4,50	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
8	4,16	4,13	4,10	4,07	4,03	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	3,83	3,80	3,77	3,74	3,70	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
10	3,58	3,55	3,52	3,49	3,45	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	3,39	3,36	3,33	3,30	3,26	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
12	3,24	3,21	3,18	3,15	3,11	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	3,11	3,08	3,05	3,03	2,98	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
14	3,01	2,98	2,95	2,92	2,88	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
15	2,92	2,89	2,86	2,83	2,79	2,76	2,70	2,64	2,58	2,52	2,46	2,40
16	2,85	2,82	2,79	2,76	2,72	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	2,78	2,75	2,72	2,70	2,65	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	2,72	2,70	2,67	2,64	2,60	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	2,68	2,65	2,62	2,59	2,55	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	2,64	2,60	2,57	2,54	2,50	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	2,60	2,56	2,53	2,51	2,46	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	2,56	2,53	2,50	2,47	2,43	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00
23	2,53	2,50	2,47	2,44	2,39	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	1,97
24	2,50	2,47	2,44	2,41	2,36	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	2,47	2,44	2,41	2,38	2,34	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
26	2,45	2,42	2,39	2,36	2,31	2,28	2,22	2,16	2,09	2,02	1,95	1,88
27	2,43	2,40	2,36	2,34	2,29	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93	1,85
28	2,41	2,37	2,34	2,32	2,27	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83
29	2,39	2,35	2,32	2,30	2,25	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89	1,81
30	2,37	2,33	2,31	2,28	2,23	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
32	2,34	2,31	2,28	2,25	2,20	2,16	2,10	2,04	1,98	1,91	1,83	1,75
34	2,31	2,28	2,25	2,22	2,17	2,13	2,07	2,01	1,95	1,88	1,80	1,72
36	2,29	2,25	2,22	2,19	2,15	2,11	2,05	1,99	1,92	1,85	1,77	1,69
38	2,27	2,23	2,20	2,17	2,13	2,09	2,03	1,96	1,90	1,82	1,75	1,66
40	2,25	2,21	2,18	2,15	2,11	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
60	2,13	2,09	2,06	2,03	1,98	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
120	2,01	1,98	1,94	1,91	1,87	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
∞	1,90	1,86	1,83	1,80	1,75	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

III. rész

1. Definiálja a következő fogalmakat: elsőfajú hiba, maximum-likelihood becslés, mintatér! /6 pont/

Megoldás:

elsőfajú hiba: igaz a nullhipotézis, mi mégis elutasítjuk (2 pont)

maximum-likelihood becslés: az a paraméter, amelyre a likelihood függvény maximális értéket vesz fel (2 pont). Formulával is jó, csak írják oda mi az L!

mintatér: minta lehetséges értékeinek halmaza (2 pont)

2. Bizonyítsa be, hogy a szimmetrikus bolyongás visszatérési idejének várható értéke végtelen! /8 pont/

Megoldás:

Legyen $n>0$ egész szám és jelölje ξ a lépések számát n-ből 0-ba! Jelöljük továbbá A-val azt az eseményt, hogy az első lépés jobbra történik, B-vel pedig azt, hogy az első lépés balra történik. A és B teljes eseményrendszert alkot. **(1 pont)**

Ekkor mivel A és B is ½ valószínűségű, ezért a teljes várható érték tétel **(1 pont)** szerint

$$v(n)=E\xi=E(\xi|A)P(A)+E(\xi|B)P(B)=(1+v(n+1))\frac{1}{2}+(1+v(n-1))\frac{1}{2}. \textbf{ (1 pont)}$$

Ebből

$$v(n+1)-v(n)=v(n)-v(n-1)-2=\ldots=v(1)-v(0)-2n. \textbf{ (1 pont)}$$

Mivel ξ nem-negatív, ezért várható értéke is az, így **(1 pont)**

$$0\le v(n)=v(n)-v(n-1)+v(n-1)-\ldots+v(1)-v(0)+v(0)=$$

$$=nv(1)-2\frac{n(n-1)}{2}=n(v(1)-(n-1)). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Így

$$v(1)\ge n-1\Rightarrow v(1)=+\infty \textbf{ (1 pont)}$$

Jelöljük X-el a 0-ból 0-ba történő visszatérés idejét. C-vel azt az eseményt, hogy az első lépés jobbra történik, D-vel pedig azt, hogy az első lépés balra történik. C és D teljes eseményrendszert alkot.

Mivel $v(1)=+\infty$, ezért

$$EX=E(X|C)P(C)+E(X|D)P(D)=(1+v(1))\frac{1}{2}+(1+v(1))\frac{1}{2}=\infty \textbf{ (1 pont)}$$

3. Mondja ki a nagy számok erős törvényét! /3 pont/

Tétel: Legyenek $\xi_1,\xi_2,\ldots$független, azonos eloszlásúak (1 pont), véges m várható értékkel (0,5 pont). Ekkor $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$ 1 valószínűséggel (0,5 pont) tart m-hez (1 pont).

4. Mondja ki és bizonyítsa be a statisztika alaptételét! /10 pont/

Tétel: $\xi_1,...,\xi_n$ független, azonos F eloszlásfüggvényűek (1 pont). Ekkor $\sup_z \left|F_n(z)-F(z)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (1 pont) majdnem mindenütt (1 vszgel) (1 pont).

Biz.: Csak folytonos F eloszlásfüggvényekre látjuk be (1 pont). Ebből következik, hogy tetszőleges pozitív egész N-hez léteznek olyan valós $z_1,...,z_N$ számok, hogy

$$F(z_0)=0, F(z_1)=\frac{1}{N},...,F(z_i)=\frac{i}{N},...,F(z_{N-1})=\frac{N-1}{N}, F(z_N)=1,$$

$z_0=-\infty, z_N=\infty$. (1 pont)

Ekkor, ha $z\in\left[z_k, z_{k+1}\right)$, akkor

$$F_n(z)-F(z)\le F_n(z_{k+1})-F(z_k)=F_n(z_{k+1})-F(z_{k+1})+\frac{1}{N},$$

$$F_n(z)-F(z)\ge F_n(z_k)-F(z_{k+1})=F_n(z_k)-F(z_k)-\frac{1}{N}.$$

Ebből következik, hogy

$$\sup_z\left|F_n(z)-F(z)\right|\le\max_{0\le k\le N}\left|F_n(z_k)-F(z_k)\right|+\frac{1}{N}.$$ (1 pont)

Tudjuk, hogy rögzített $x-$re

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi\{\xi_i<x\},$$ (1 pont)

ahol $\chi\{\xi_i<x\}$ független, azonos eloszlású indikátor valószínűségi változók, melyek várható értéke

$E\chi\{\xi_i<x\}=P\left(\xi_i<x\right)=F(x)$. (1 pont)

Így a nagy számok erős törvénye szerint

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi\{\xi_i<x\}\xrightarrow[n\to\infty]{}E\chi\{\xi_i<x\}=F(x)$$ mm. (1 pont)

Legyen $A_{k,N}=\left\{\omega:\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi\{\xi_i(\omega)<z_k\}\xrightarrow[n\to\infty]{}F(z_k)\right\}$, ekkor

$P(A_{k,N})=1$ és $B_N=\left\{\omega:\max_{0\le k\le N}\left|F_n(z_k)-F(z_k)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right\}=\bigcap_{k=1}^{N-1}A_{k,N}$.

B_N-en $\limsup_{n\to\infty}\left|F_n(z)-F(z)\right|\le\frac{1}{N}$. Ebből következik, hogy $\bigcap_{N=1}^{\infty}B_N$-en $\limsup_{n\to\infty}\left|F_n(z)-F(z)\right|=0$. 1 valószínűségű események metszete is 1 valószínűségű, így $\bigcap_{N=1}^{\infty}B_N=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{N-1}A_{k,N}$ is 1 valószínűségű. (1 pont)