Numerikus módszerek 1. **2. ZH megoldása** **2011. december 5.**

Programtervező informatikus Bsc szak

1. Az egyenlőtlenségből

$$\frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq M \quad \Rightarrow \quad \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{A}\| \leq M.$$

(2 pont)

Az egyenlőtlenség bal oldalából az $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ helyettesítéssel

$$m \leq \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{A^{-1}y}\|}{\|\mathbf{A^{-1}y}\|} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{A^{-1}y}\|} = \frac{1}{\frac{\|\mathbf{A^{-1}y}\|}{\|\mathbf{y}\|}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\|\mathbf{A^{-1}y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \leq \frac{1}{m}$$

Innen a kondíciószámra a becslés

$$\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A^{-1}}\| \leq M \cdot \frac{1}{m} = \frac{M}{m}$$

(4 pont)

2. Az $\mathbf{A}$ mátrix inverze

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = 3, \quad \|\mathbf{A^{-1}}\|_\infty = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{cond}_\infty(\mathbf{A}) = 1 \cdot 3 = 3$$

(5 pont)

Az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, a 2-es kondíciószámhoz számítsuk ki a sajátértékeit.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) = \\ &= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (2-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 3] = 0 \end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = 2 \pm 1.$$

$$\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{3}{1} = 3$$

(5 pont)

3. a) Először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\ &= -\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk.

$$\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty = \frac{1}{4} = q < 1$$

(3 pont)

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. A konvergenciát tanult konvergencia tételre hivatkozva is bizonyíthatjuk, ekkor az $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns tulajdonságára hivatkozhatunk.

(1 pont)

b) Az iteráció hibabecslése (1 pont)

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{(\frac{1}{4})^k}{1-\frac{1}{4}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty$$

c) Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$-ból indulva. A Jacobi-iteráció vektoros alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{c}_{J(1)},$$

ahol

$$\mathbf{B}_{J(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{J(1)} = \mathbf{D^{-1}b} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c}_{J(1)} = \mathbf{c}_{J(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

A hibabecsléshez számítsuk ki a hiányzó mennyiséget:

$$\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{J(1)} - \mathbf{0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{J(1)}\|_\infty = \frac{3}{4}.$$

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{(\frac{1}{4})^k}{1-\frac{1}{4}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^k \leq 10^{-3}$$

$$1000 \leq 2^{2k} \quad \Rightarrow \quad 2k \geq 10 \Rightarrow \quad k \geq 5$$

(3 pont)

4. a) Először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \\ &= -\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Megkaptuk az átmenetmátrixot, a konvergencia elégséges feltételét elegendő megvizsgálnunk.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty = \frac{1}{4} = q < 1$$

(4 pont)

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. A konvergenciát tanult konvergencia tételre hivatkozva is bizonyíthatjuk, ekkor az $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns vagy szimmetrikus és pozitív definit tulajdonságára hivatkozhatunk. (1 pont)

b) Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$-ból indulva. A Gauss–Seidel-iteráció koordinátás alakja 2×2-es mátrix esetén

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_{11}} \cdot \left(a_{12} \cdot x_2^{(0)} - b_1\right) \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{a_{22}} \cdot \left(a_{21} \cdot x_1^{(1)} - b_2\right). \end{aligned}$$

Most

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot \left(x_2^{(0)} + 3\right) = \frac{3}{4} \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot \left(x_1^{(1)} + 3\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} + 3\right) = \frac{15}{16}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{15}{16} \end{bmatrix}.$$

c) A hibabecsléshez számítsuk ki a hiányzó mennyiséget:

$$\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{S(1)} - \mathbf{0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{S(1)}\|_\infty = \frac{15}{16}.$$

Az iteráció hibabecslése

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{(\frac{1}{4})^k}{1-\frac{1}{4}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

(3 pont)

5. a) A Richardson-iteráció tanult konvergencia tételét használjuk a megoldáshoz.
A tétel szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció pontosan a $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. Ahol

$$0 < m = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n = M$$

az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei.
Látjuk, hogy a feladat megoldásához az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit ismernünk kell. A 2. feladatban már meghatároztuk az $\mathbf{A}$ sajátértékeit. Ezek nagyság szerinti sorrendbe rendezve

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

A tételben szereplő jelöléseket használva

$$m = 1, \quad M = 3.$$

Tehát az iteráció a $p \in (0; \frac{2}{3})$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. (2 pont)

b) Az optimális paraméter a tétel szerint

$$p_0 = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ezen paraméter mellett az átmenetmátrix spektrálsugara a tétel állítása szerint

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \frac{M-m}{M+m} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Mivel $\mathbf{B_{p_0}}$ szimmetrikus, ezért

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \|\mathbf{B_{p_0}}\|_2 = \frac{1}{2} = q$$

a kontrakciós együttható a 2-es vektornormában. (4 pont)

6. A $\mathbf{A}$ mátrix J-re illeszkedő faktorizációját határozzuk meg, azaz a

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q}$$

alakot, ahol $\mathbf{J} = \{1,2),(2,3)\}$ a pozícióhalmaz. Ez az alábbi pozíciókat jelenti.

$$\begin{bmatrix} & * & \\ & & * \\ & & \end{bmatrix}$$

1. lépés: Az $\mathbf{A}$ mátrix szétbontása a pozicióhalmaz első sora és oszlopa alapján, majd eliminálás az 1. oszlopban.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{1} = \mathbf{B} = \mathbf{P_1} - \mathbf{Q_1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-et megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_1^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk. $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt. (2 pont)

2. lépés: Az $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2}$ mátrix szétbontása a pozicióhalmaz második sora és oszlopa alapján, majd eliminálás a 2. oszlopban.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{P_2} - \mathbf{Q_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_2}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2}\mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_2}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 2. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_2}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_2}$-vel, a $\mathbf{P_2}$ második oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_2^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_2}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a második oszlopának diagonális alatti elemeit $p_{22}^{(2)}$-vel leosztjuk. (2 pont)

Ezután fel tudjuk írni a kívánt alakot.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L_1^{-1}}\mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{U} &= \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2}\mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2 pont)

7. Az $f(x) = x + \sqrt{x+2} - 1 = 0$ megoldását az $x_{k+1} = 1 - \sqrt{x_k + 2}$ iterációval keressük.
Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = 1 - \sqrt{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad x + \sqrt{x+2} - 1 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát.

a) Ellenőrizzük, hogy a $[-1;0]$ intervallum tartalmaz-e gyököt.

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + \sqrt{-1+2} - 1 = -1 &< 0 \\ f(0) &= 0 + \sqrt{0+2} - 1 = \sqrt{2} - 1 &> 0, \end{aligned}$$

és $f \in C[-1\,;\,0]$, így a Bolzano-tétel miatt az intervallum tartalmaz gyököt. (1 pont)

b) A $\varphi(x) = 1 - \sqrt{x+2}$ függvény a $[-1;0]$ intervallumot $[-1;0]$-ba képezi?
Mivel φ szigorúan monoton fogyó függvény ($\varphi'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}} < 0$), ezért

$$\varphi\left([-1;0]\right) = [\varphi(0)\,;\,\varphi(-1)] = \left[1 - \sqrt{2}\,;\,0\right] \subset [-1;0].$$

Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció a $[-1;0]$ intervallumon.

$$\varphi'(\xi) = -\frac{1}{2\sqrt{\xi+2}} \quad \Rightarrow |\varphi'(\xi)| \leq \frac{1}{2} =: q, \quad \xi \in [-1;0]$$

Tehát φ kontrakció $[-1;0]$-n. (4 pont)
A sorozat konvergenciáját a fixponttétel garantálja.

c) A hibabecslés a fixponttételből $x_0 \in [-1\,;0]$ esetén (1 pont)

$$|x_k - x^*| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \underbrace{|x_0 - x^*|}_{\leq 1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$