Modellek és algoritmusok, C szakirány

Pótzárthelyi dolgozat a 2. részből

2010.12.22.

1. Adjuk meg az alábbi másodrendű lineáris inhomogén differenciaegyenletet valós megoldását :

$$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=n, \quad a_0:=\frac{13}{16}, \quad a_1:=\frac{25}{16} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

a) Oldjuk meg először az $a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$ homogén egyenletet, melynek karakterisztikus egyenlete : $\lambda^2+\lambda-6=0$. Ennek gyökei : $\lambda_1=2, \quad \lambda_2=-3$. Az alaprendszer : $2^n, \quad (-3)^n, \quad (n\in\mathbb{N})$. Így a homogén megoldások :

$$a_h(n)=C_1 2^n+C_2(-3)^n, \quad (C_1,C_2\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}).$$

b) Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük a jobb oldalnak megfelelő $a_p(n):=An+B$ alakban, alkalmas $A,B\in\mathbb{R}$ számokkal. Ez utóbbi pontosan akkor megoldás, ha :

$$(A(n+2)+B)+(A(n+1)+B)-6\cdot(An+B)=n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

azaz :

$$(An+2A+B)+(An+A+B)-6An-6B=n \Leftrightarrow$$
$$-4An+3A-4B=n \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \Leftrightarrow$$
$$-4A=1, \quad 3A-4B=0$$

Tehát : $A=-\frac{1}{4}, \quad B=-\frac{3}{16}$. Ezzel : $a_p(n)=-\frac{1}{4}n-\frac{3}{16}=-\frac{4n+3}{16}$. Így a teljes megoldás :

$$a_n=a_h(n)+a_p(n)=C_1 2^n+C_2(-3)^n-\frac{4n+3}{16}, \quad (C_1,C_2\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}).$$

c) Az első két tag felhasználásával :

$$a_0=\frac{13}{16}=C_1+C_2-\frac{3}{16}, \quad a_1=\frac{25}{16}=2C_1-3C_2-\frac{7}{16} \quad \Leftrightarrow C_1+C_2=1, \quad 2C_1-3C_2=2 \Leftrightarrow C_1=1, \quad C_2=0.$$

Tehát a keresett valós sorozat :

$$a_n=2^n-\frac{4n+3}{16}, \quad (n\in\mathbb{N}).$$

2. Adott az alábbi függvénysorozat :

$$f_n(x):=\frac{3xn^2}{x^2n^2+5}, \quad (n\in\mathbb{N}, \quad x\in\mathbb{R}).$$

i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és a határfüggvényt.

ii) Igazoljuk, hogy a konvergencia nem egyenletes a kapott halmazon.

iii) Bizonyítsuk be, hogy $\forall\delta>0$ szám esetén a konvergencia egyenletes a $[\delta,+\infty)$ intervallumon.

Megoldás : i) Ha $x\neq 0$ akkor a sorozat n-nek racionális törtfüggvénye, így :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3xn^2}{x^2n^2+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3x}{x^2+\frac{5}{n^2}}=\frac{3x}{x^2+0}=\frac{3}{x}.$$

illetve $\lim_{n\to+\infty}(f_n(0))=\lim_{n\to+\infty}(0)=0$. Ennek megfelelően a függvénysor konvergencia halmaza $KH(f_n)=\mathbb{R}$ és határfüggvénye :

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{3xn^2}{x^2n^2+5}=\begin{cases}0, & \text{ha } x=0\\ \frac{3}{x}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases}$$

ii) Mivel az (f_n) függvénysorozat minden eleme folytonos függvény, de a határfüggvény nem folytonos a 0 pontban (itt másodfajú szakadása van), ezért a megfelelő tétel értelmében a konvergencia nem egyenletes $\mathbb{R}$-en.

iii) Ha tehát $\delta > 0$ tetszőlegesen rögzített és $x \in B := [\delta, +\infty)$, akkor érvényes az alábbi becslés :

$$|f_n(x) - f(x)| = \Big|\frac{3xn^2}{x^2n^2+5} - \frac{3}{x}\Big| = \frac{|-15|}{|x|(n^2x^2+1)} = \frac{15}{x(n^2x^2+1)} \le \frac{15}{\delta(n^2\delta^2+1)} < \frac{15}{n^2\delta^3} \quad (\forall\, x \ge \delta, \quad n \in \mathbb{N}^+).$$

Mivel $\Big(\dfrac{15}{n^2\delta^3}\Big)$ x-től független nullsorozat, így :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N := \Big[\sqrt{\frac{15}{\varepsilon\delta^3}}\Big] + 1 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, n > N \;\; \forall x \in B \;\text{ mellett} : |f_n(x) - f(x)| < \Big(\frac{15}{n^2\delta^3}\Big) < \Big(\frac{15}{N^2\delta^3}\Big) < \varepsilon,$$

tehát a konvergencia egyenletes a B halmazon.

3. Tekintsük az alábbi függvénysort :

$$\sum_{n\ge 0} \frac{e^{nx}}{(e^x-2)^n}, \quad (e^x \ne 2 \Leftrightarrow x \ne \ln 2)$$

i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és az összegfüggvényt.

ii) Igazoljuk, hogy :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{nx}}{(e^x-2)^n} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2e}.$$

Megoldás : A fenti sor a következő alakba írható : $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\Big(\frac{e^x}{e^x-2}\Big)^n$, így ez egy geometriai sor $q = \dfrac{e^x}{e^x-2}$ hányadossal. Tétel értelmében ez pontosan akkor konvergens, ha

$$\Big|\frac{e^x}{e^x-2}\Big| = \frac{e^x}{|e^x-2|} < 1 \Leftrightarrow e^x < |e^x-2| \;\; |()^2 \quad \Leftrightarrow e^{2x} < e^{2x} - 4e^x + 4 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Ezen a halmazon teljesül az is, hogy $x \ne \ln 2$. Így a konvergenciahalmaz és az összegfüggvény :

$$KH\Big(\sum\Big(\frac{e^x}{e^x-2}\Big)^n\Big) = (-\infty, 0), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^x}{e^x-2}\Big)^n = \frac{1}{1-\dfrac{e^x}{e^x-2}} = \frac{2-e^x}{2}, \quad (x \in (-\infty, 0)).$$

ii) Könnyű meggondolni, hogy az integrálás $\Big[-1, -\dfrac{1}{2}\Big]$ intervallumán a függvénysor egyenletesen konvergens, ugyanis majorálható egy konvergens x-től független geometriai sorral, mert :

$$|f_n(x)| = \Big|\Big(\frac{e^x}{e^x-2}\Big)^n\Big| \le \Big(\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2-e^{-\frac{1}{2}}}\Big)^n = \Big(\frac{1}{2\sqrt{e}-1}\Big)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \forall x \in \Big[-1, -\frac{1}{2}\Big]),$$

és itt $\sum_{n\ge 0}\Big(\frac{1}{2\sqrt{e}-1}\Big)^n$ konvergens geomtriai sor, ugyanis : $0 < \dfrac{1}{2\sqrt{e}-1} < 1$.

Az összegzés és az integrálás felcserélhetőségi tételének értelmében mivel $f_n \in R\Big[-1, -\dfrac{1}{2}\Big]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ és $\displaystyle\sum_{n\ge 0} f_n$ egyenletesen konvergál a $\Big[-1, -\dfrac{1}{2}\Big]$ intervallumon, ezért :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{nx}}{(e^x-2)^n}dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{nx}}{(e^x-2)^n}\Big)dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{2-e^x}{2}dx = \Big[\frac{2x-e^x}{2}\Big]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2e}.$$

4. Tekintsük az alábbi 2π szerint periodikus függvényt :

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } \; -\pi \le x < 0 \\ x, & \text{ha } \; 0 \le x < \pi \end{cases}, \quad (f(x+2\pi) := f(x), \;\; (x \in \mathbb{R})).$$

i) Adjuk meg f Fourier sorát!

ii) Igazoljuk, hogy a Fourier sor konvergens az $x = 0$ pontban.

Megoldás : i) $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{\pi}{4}$.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = (\text{parc.int.}) = \frac{1}{\pi}\Big(\Big[x\frac{\sin(kx)}{k}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\Big[\frac{\cos(kx)}{k}\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2\pi}(\cos(k\pi) - cos0) = \frac{1}{k^2\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, \text{ ha } k = 2l \ (1 \leq l \in \mathbb{N}) \\ -\frac{2}{(2l+1)^2\pi}, \text{ ha } k = 2l+1 \ (l \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Hasonlóan :

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx = (\text{parc.int.}) = \frac{1}{\pi}\Big(\Big[-x\frac{\cos(kx)}{k}\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{k\pi}(-\pi\cos(k\pi) + 0\cos 0) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Ekkor f Fourier sora :

$$Sf(x) := a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{l\geq 0}\frac{\cos(2l+1)x}{(2l+1)^2} + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ii) Ha a fenti egyenlőségben $x = 0$-t írunk, akkor adódik, hogy : $Sf(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)^2}$. Ekkor :

$$|Sf(0)| \leq \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l+0)^2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}.$$

Ez utóbbi sorösszeg véges, így az eredeti sor abszolút konvergens, így konvergens is.