Modellek és algoritmusok, C szakirány, pótzárthelyi a 2. részből, 2010.12.22.

1. Adjuk meg az alábbi másodrendű lineáris inhomogén differenciaegyenletet valós megoldását :

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = n, \quad a_0 := \frac{13}{16}, \quad a_1 := \frac{25}{16} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Adott a következő függvénysorozat : $f_n(x) := \dfrac{3xn^2}{x^2n^2+5}, \quad (n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}).$

i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és a határfüggvényt.

ii) Igazoljuk, hogy a konvergencia nem egyenletes a kapott halmazon.

iii) Bizonyítsuk be, hogy $\forall \delta > 0$ szám esetén a konvergencia egyenletes a $[\delta, +\infty)$ intervallumon.

3. Tekintsük a következő függvénysort : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{e^{nx}}{(e^x-2)^n}, \quad (e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2)$

i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és az összegfüggvényt.

ii) Igazoljuk, hogy : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{nx}}{(e^x-2)^n} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2e}.$

4. Tekintsük az alábbi 2π szerint periodikus függvényt :

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } \; -\pi \leq x < 0 \\ x, & \text{ha } \; 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad (f(x+2\pi) := f(x), \quad (x \in \mathbb{R})).$$

i) Adjuk meg f Fourier sorát!

ii) Igazoljuk, hogy a Fourier sor konvergens az $x = 0$ pontban.

Modellek és algoritmusok, C szakirány, pótzárthelyi a 2. részből, 2010.12.22.

1. Adjuk meg az alábbi másodrendű lineáris inhomogén differenciaegyenletet valós megoldását :

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = n, \quad a_0 := \frac{13}{16}, \quad a_1 := \frac{25}{16} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Adott a következő függvénysorozat : $f_n(x) := \dfrac{3xn^2}{x^2n^2+5}, \quad (n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}).$

i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és a határfüggvényt.

ii) Igazoljuk, hogy a konvergencia nem egyenletes a kapott halmazon.

iii) Bizonyítsuk be, hogy $\forall \delta > 0$ szám esetén a konvergencia egyenletes a $[\delta, +\infty)$ intervallumon.

3. Tekintsük a következő függvénysort : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{e^{nx}}{(e^x-2)^n}, \quad (e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2)$

i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és az összegfüggvényt.

ii) Igazoljuk, hogy : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{nx}}{(e^x-2)^n} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2e}.$

4. Tekintsük az alábbi 2π szerint periodikus függvényt :

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } \; -\pi \leq x < 0 \\ x, & \text{ha } \; 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad (f(x+2\pi) := f(x), \quad (x \in \mathbb{R})).$$

i) Adjuk meg f Fourier sorát!

ii) Igazoljuk, hogy a Fourier sor konvergens az $x = 0$ pontban.