Modellek és algoritmusok, C szakirány, 2. zárthelyi, 2010.12.17.

1. Oldjuk meg az alábbi másodrendű lineáris inhomogén differenciaegyenletet :

$$\frac{a_{n+2} - 2a_{n+1}}{2} = n \cdot 2^{n-1} - a_n, \quad a_0 := 0, \ \ a_1 := 1 \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

2. Adott az alábbi függvénysorozat : $f_n(x) := \dfrac{1}{e^{nx} + 1}, \quad (n \in \mathbb{N}, \ \ x \in \mathbb{R}).$

i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és a határfüggvényt.

ii) Indokolja meg, hogy a konvergencia *nem egyenletes* a kapott halmazon!

iii) Lássa be, hogy $\forall \delta > 0$ szám esetén a konvergencia *egyenletes* a $[\delta, +\infty)$ intervallumon.

3. Tekintsük az alábbi függvénysort : $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(1 + x^2)^n}.$

i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és az összegfüggvényt.

ii) Egyenletes-e a konvergencia?

iii) Bizonyítsuk be, hogy : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{2n}}{(1 + x^2)^n} dx = \frac{13}{24}.$

4. Tekintsük az alábbi 2π szerint periodikus függvényt : $f(x) := |x|, \quad (x \in [-\pi, +\pi], \ \ f(x + 2\pi) := f(x), \ \ (x \in \mathbb{R})).$

i) Adjuk meg f Fourier sorát!

ii) Mely pontokban konvergens a kapott sor és hol állítja elő a függvényt?

iii) Számítsuk ki a következő sorösszeget : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k + 1)^2}.$

Modellek és algoritmusok, C szakirány, 2. zárthelyi, 2010.12.17.

1. Oldjuk meg az alábbi másodrendű lineáris inhomogén differenciaegyenletet :

$$\frac{a_{n+2} - 2a_{n+1}}{2} = n \cdot 2^{n-1} - a_n, \quad a_0 := 0, \ \ a_1 := 1 \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

2. Adott az alábbi függvénysorozat : $f_n(x) := \dfrac{1}{e^{nx} + 1}, \quad (n \in \mathbb{N}, \ \ x \in \mathbb{R}).$

i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és a határfüggvényt.

ii) Indokolja meg, hogy a konvergencia *nem egyenletes* a kapott halmazon!

iii) Lássa be, hogy $\forall \delta > 0$ szám esetén a konvergencia *egyenletes* a $[\delta, +\infty)$ intervallumon.

3. Tekintsük az alábbi függvénysort : $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(1 + x^2)^n}.$

i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és az összegfüggvényt.

ii) Egyenletes-e a konvergencia?

iii) Bizonyítsuk be, hogy : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{2n}}{(1 + x^2)^n} dx = \frac{13}{24}.$

4. Tekintsük az alábbi 2π szerint periodikus függvényt : $f(x) := |x|, \quad (x \in [-\pi, +\pi], \ \ f(x + 2\pi) := f(x), \ \ (x \in \mathbb{R})).$

i) Adjuk meg f Fourier sorát!

ii) Mely pontokban konvergens a kapott sor és hol állítja elő a függvényt?

iii) Számítsuk ki a következő sorösszeget : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k + 1)^2}.$