# Modellek és algoritmusok, C szakirány

2 zárthelyi

2010.12.17

*1. Adjuk meg az alábbi másodrendű lineáris inhomogén differenciaegyenletet valós megoldását :*

$$\frac{a_{n+2} - 2a_{n+1}}{2} = 2^{n-1}n - a_n, \quad a_0 := 0, \quad a_1 := 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**Megoldás :** Átszorozva 2-vel, átrendezés után a következő egyenletet kapjuk :

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Oldjuk meg először az $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0$ homogén egyenletet, melynek karakterisztikus egyenlete : $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Ennek gyökei a komplex : $\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_1 = 1 - i$. A valós megoldás meghatározásához, írjuk át trigonomertikus alakba például az első gyököt : $\lambda_1 = 1 + i = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big)$. A valós alaprendszer : $(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}, \quad (\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}, \quad (n \in \mathbb{N})$. Így a homogén megoldások :

$$a_h(n) = C_1(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} + C_2(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).$$

b) Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük a jobb oldalnak megfelelő $a_p(n) := 2^n(An + B)$ alakban, alkalmas $A, B \in \mathbb{R}$ számokkal. Ez utóbbi pontosan akkor megoldás, ha :

$$2^{n+2}(A(n+2) + B) - 2 \cdot 2^{n+1}(A(n+1) + B) + 2 \cdot 2^n(An + B) = 2^n n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

azaz :

$$(4An + 8A + 4B) - (4An + 4A + 4B) + 2An + 2B = n \Leftrightarrow$$
$$2An + 4A + 2B = n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow$$
$$2A = 1, \quad 4A + 2B = 0$$

Tehát : $A = \frac{1}{2}, \quad B = -1$. Ezzel : $a_p(n) = 2^n(\frac{1}{2}n - 1) = 2^{n-1}n - 2^n$. Így a teljes megoldás :

$$a_n = a_h(n) + a_p(n) = C_1(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} + C_2(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4} + 2^{n-1}n - 2^n, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

c) Az első két tag felhasználásával :

$$a_0 = 0 = C_1 - 1, \quad a_1 = 1 = \sqrt{2}C_1\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}C_2\sin\frac{\pi}{4} - 1 \quad \Leftrightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = 1$$

Tehát a keresett valós sorozat :

$$a_n = (\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} + (\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4} + 2^{n-1}n - 2^n, \quad (n \in \mathbb{N})$$

*2. Adott az alábbi függvénysorozat :*

$$f_n(x) := \frac{1}{e^{nx} + 1}, \quad (n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}).$$

*i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és a határfüggvényt.*

*ii) Igazoljuk, hogy a konvergencia nem egyenletes a kapott halmazon.*

*iii) Lássa be, hogy $\forall\delta > 0$ szám esetén a konvergencia egyenletes a $[\delta, +\infty)$ intervallumon.*

**Megoldás :** i) Mivel $(e^{nx}) = ((e^x)^n)$ geometriai sorozat, így :

$$\lim_{n\to+\infty}(e^x)^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |e^x| < 1 \Leftrightarrow x < 0 \\ 1, & \text{ha } e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ +\infty, & \text{ha } e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases}$$

Ennek megfelelően a függvénysor konvergencia halmaza $KH(f_n) = \mathbb{R}$ és határfüggvénye :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(e^{nx})+1} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 0 \\ 0, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

ii) Mivel az $(f_n)$ függvénysorozat minden eleme folytonos függvény, de a határfüggvény nem folytonos a 0 pontban (itt elsőfajú szakadása van), ezért a megfelelő tétel értelmében a konvergencia nem egyenletes $\mathbb{R}$-en.

iii) Ha tehát $\delta > 0$ tetszőlegesen rögzített és $x \in B := [\delta, +\infty)$, akkor :

$$|f_n(x) - f(x)| = \Big|\frac{1}{e^{nx}+1} - 0\Big| = \frac{1}{e^{nx}+1} \le \frac{1}{e^{n\delta}+1} < \frac{1}{e^{n\delta}} = \Big(\frac{1}{e^{\delta}}\Big)^n$$

Mivel $e^{\delta} > 1$ ezért $\Big(\Big(\frac{1}{e^{\delta}}\Big)^n\Big)$ $x$-től független nullsorozat, így :

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}, n > N\ \ \forall x \in B \text{ mellett, : } |f_n(x) - f(x)| < \Big(\frac{1}{e^{\delta}}\Big)^n < \Big(\frac{1}{e^{\delta}}\Big)^N < \varepsilon,$$

tehát a konvergencia egyenletes a $B$ halmazon.

*3. Tekintsük az alábbi függvénysort :*

$$\sum_{n\ge 0} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}.$$

*i) Határozzuk meg a konvergencia halmazt és az összegfüggvényt.*

*ii) Egyenletes-e a konvergencia ?*

*iii) Bizonyítsuk be, hogy :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n} dx = \frac{13}{24}.$$

**Megoldás :** A fenti sor a következő alakba írható : $\sum_{n\ge 0} \Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^n$, így ez egy geometriai sor $q = \frac{x^2}{1+x^2}$ hányadossal. Tétel értelmében ez pontosan akkor konvergens, ha

$$\Big|\frac{x^2}{1+x^2}\Big| = \frac{x^2}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 + x^2 \Leftrightarrow 0 < 1$$

és ez igaz minden valós $x$ esetén, tehát, a konvergenciahalmaz és összegfüggvény :

$$KH\Big(\sum \Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^n\Big) = \mathbb{R}, \ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{1+x^2}} = 1 + x^2, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ii) Mivel a sort generáló függvénysorozat alapjára $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$ ezért az $\Big(\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^n\Big)$ sorozat nem konvergál egyenletesen a 0 függvényhez. Például :

$$f_n(\sqrt{n}) := \Big(\frac{n}{1+n}\Big)^n \to \frac{1}{e} \ne 0 \quad (n \to +\infty),$$

így a függvénysor egyenletes konvergenciájának szükséges feltétele értelmében, a fenti függvénysor konvergenciája nem egyenletes az $\mathbb{R}$ halmazon.

iii) Könnyű meggondolni, hogy az integrálás $\Big[0, \frac{1}{2}\Big]$ intervallumán a függvénysor egyenletesen konvergens, ugyanis majorálható egy konvergens $x$-től független geometriai sorral, mert :

$$|f_n(x)| = \Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^n \le \Big(\frac{(\frac{1}{2})^2}{1+0}\Big)^n = \Big(\frac{1}{4}\Big)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \forall x \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big]), \quad \text{illetve} \sum_{n\ge 0} \Big(\frac{1}{4}\Big)^n \text{konvergens.}$$

Az összegzés és az integrálás felcserélhetőségi tételének értelmében mivel $f_n \in R\Big[0, \dfrac{1}{2}\Big]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ és $\sum_{n\geq 0} f_n$ egyenletesen konvergál a $\Big[0, \dfrac{1}{2}\Big]$ intervallumon, ezért :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \Big( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n} \Big) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x^2) dx = \Big[ x + \frac{x^3}{3} \Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{24}.$$

*4. Tekintsük az alábbi $2\pi$ szerint periodikus függvényt :*

$$f(x) := |x|, \quad (x \in [-\pi, +\pi], \;\; f(x+2\pi) := f(x), \;\; (x \in \mathbb{R})).$$

*i) Adjuk meg $f$ Fourier sorát!*

*ii) Mely pontokban konvergens a kapott sor és hol állítja elő a függvényt?*

*iii) Számítsuk ki a következő sorösszeget :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2l+1)^2}$

**Megoldás :** i) $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \dfrac{\pi}{2}.$

Mivel $f$ páros függvény, így : $b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(kx) dx = 0 \quad (\forall 1 \leq k \in \mathbb{N}).$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = (\text{parc.int.}) = \frac{2}{\pi} \Big( \Big[ x \frac{sin(kx)}{k} \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{sin(kx)}{k} dx \Big) =$$

$$= \frac{2}{k\pi} \Big[ \frac{cos(kx)}{k} \Big]_0^{\pi} = \frac{2}{k^2\pi} (\cos(k\pi) - cos0) = \frac{2}{k^2\pi} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, \text{ ha } k = 2l \;\; (1 \leq l \in \mathbb{N}) \\ -\dfrac{4}{(2l+1)^2\pi}, \text{ ha } k = 2l+1 \;\; (l \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Ekkor $f$ Fourier sora :

$$Sf(x) := a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{l\geq 0} \frac{\cos(2l+1)x}{(2l+1)^2}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ii) Mivel $|Sf(x)| \leq \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{l\geq 0} \frac{|\cos(2l+1)x|}{(2l+1)^2} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{l\geq 0} \frac{1}{(2l+1)^2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ és a majoráló sor egy konvergens $x$-től független numerikus sor, így Weierstrass tétele értelmében $Sf$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, így $Sf(x) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$, például :

$$\forall x \in [-\pi, \pi] : |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\cos(2l+1)x}{(2l+1)^2}.$$

iii) Ha a fenti egyenlőségben $x = 0$-át írunk, akkor adódik, hogy : $\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$