1	2	3	Σ_1	4	Σ	**J:**

NÉV: _____ ELTE AZON.: _____

Prog. inf. I. (BSc.) **4. vizsgadolgozat** *2011. január 26.*

I. rész (75 perc): *Az I. rész összpontszáma 32. A válaszokat itt (az I. részben) nem kell indokolni!*

1. Állapítsuk meg, igazak-e az alábbi állítások, és tegyünk X-et a megfelelő kockába. (A választ nem kell indokolni!) (8 *pont*)

	Igen	Nem
a) Ha $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ egymással párhuzamos geometriai vektorok, akkor $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.	☒	☐
b) Ha $U \leq \mathbb{R}^n$ altér, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ pedig vektorok, melyekre $\mathbf{u} \in U$ és $\mathbf{v} \notin U$, akkor $\mathbf{u} + \mathbf{v} \notin U$.	☒	☐
c) $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben az invertálható mátrixok alteret alkotnak.	☐	☒
d) Ha egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix determinánsa nulla, akkor A-nak van két egyenlő sora.	☐	☒
e) Ha egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix nem invertálható, akkor A-nak jobb oldali sajátértéke a 0.	☒	☐
f) Minden $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3)$ leképezéshez léteznek $\mathbb{R}^5$-ben olyan $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ vektorok, melyekre $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v})$.	☒	☐
g) Minden $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixnak van valós sajátértéke.	☐	☒
h) Egy valós euklideszi tér tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektoraira $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle > 0$.	☐	☒

2. Az alábbi feladat minden részében karikázzuk be a sor végén az egyetlen helyes válasz betűjelét. (8 *pont*)

a) Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázis az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, U pedig altér $\mathbb{R}^n$-ben, melyre $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k \in U$, és $\mathbf{b}_{k+1}, \ldots, \mathbf{b}_n \notin U$. A $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ halmaz biztosan bázisa U-nak, ha: (A) $k = 1$; (B) $k = 2$; (C) $k = n - 2$; (D) $k = n - 1$.	(A)	(B)	(C)	(D)
b) Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és $\dim V = 5$, akkor: (A) V-ben van 10 elemű generátorrendszer; (B) V-ben minden generátorrendszer 10 elemű; (C) V-ben van 10 elemű lineárisan független rendszer; (D) V-ben minden lineárisan független rendszer 10 elemű.	(A)	(B)	(C)	(D)
c) Legyenek $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorok. Ekkor: (A) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$; (B) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} \times \mathbf{bc}$; (C) $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = (\mathbf{ac})(\mathbf{bc})$; (D) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$.	(A)	(B)	(C)	(D)
d) Ha $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ tetszőleges mátrix, akkor (A) $A + A^T$ létezik és szimmetrikus; (B) $A + A^T$ létezik és invertálható; (C) AA^T létezik és szimmetrikus; (D) AA^T létezik és invertálható.	(A)	(B)	(C)	(D)
e) Ha az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött, akkor: (A) minden nullvektortól különböző $\mathbb{R}^2$-beli vektor sajátvektora M-nek; (B) M-nek van két különböző sajátértéke; (C) az (A) és a (B) feltételek közül pontosan az egyik teljesül M-re; (D) előfordulhat, hogy az (A) és (B) közül egyik sem teljesül.	(A)	(B)	(C)	(D)
f) Ha $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a sík 135°-os pozitív irányú elforgatása az origó körül, akkor a φ transzformáció mátrixa a triviális bázisban: (A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$; (C) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$.	(A)	(B)	(C)	(D)
g) Bármely V valós euklideszi tér tetszőleges $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in V$ vektoraira és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra: (A) $\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \rangle$; (B) $\langle \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$; (C) ha $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ és $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$, akkor $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$; (D) $\langle \lambda \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.	(A)	(B)	(C)	(D)
h) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, amelyhez tartozó $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ kvadratikus alak pozitív definit, és legyen $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ az a lineáris transzformáció, melyre $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Ekkor: (A) $\mathcal{K}er\, \varphi = \{\mathbf{0}\}$; (B) $\mathcal{I}m\, \varphi = \{\mathbf{0}\}$; (C) $\varphi(\varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$-re; (D) $\varphi(\varphi(\mathbf{x})) = \varphi(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$-re.	(A)	(B)	(C)	(D)

FORDÍTS!

3. Az alábbi feladat minden részében írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. (16 *pont*)

a) Az $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$ geometriai vektorok skaláris szorzata 4. Mi az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter értéke?

$\alpha = 2$

b) Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter különböző értékeire mi lehet az alábbi mátrix rangja?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2\alpha & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6\alpha & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15\alpha \end{bmatrix}$$

A rangja lehet: 1 vagy 4

c) Tekintsük az alábbi $\mathcal{B}$ bázist és $\mathbf{v}$ vektort $\mathbb{R}^3$-ben:

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a $\mathbf{v}$ vektornak a $\mathcal{B}$-re vonatkoztatott koordinátavektorát.

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) Mi az alábbi altér dimenziója?

$$U = \{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid M = M^T\}$$

$\dim U = 3$

e) Adjuk meg azt az α és β valós számot, melyekkel az $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ mátrixra teljesül, hogy $A^2 = \mathbf{0}$.

$\alpha = -1$, $\beta = -1$

f) Az $1, 2, 3, 4, 5$ számok $1, i, j, k, 2$ permutációjában 6 inverzió van. Határozzuk meg i, j, és k értékét.

$i = 5$, $j = 4$, $k = 3$

g) Mennyi az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix 0-hoz tartozó sajátaltere-nének dimenziója?

$\dim W_0 = 1$

h) Tekintsük az $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektorokat az $\mathbb{R}^4$ valós euklideszi térben a szokásos $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ skaláris szorzattal. Írjuk föl $\mathbf{v}$-t $\mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$ alakban, ahol $\mathbf{u}' \in \mathrm{Span}(\mathbf{u})$, és $\mathbf{u}'' \perp \mathbf{u}$.

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'' = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Az I. részből alapértelmezésben legalább 18 pontot kell szerezni az átmenő osztályzathoz. Az elégséges megszerzésének további feltétele, hogy az I. és II. részből megszerzett pontszám elérje a 21-et. Akinek az első részből csak 15, 16 vagy 17 pontja van, annál az elégséges további feltétele, hogy összesen legalább 24, 23, illetve 22 pontot érjen el. 15 pont alatti első rész esetén a vizsga mindenképpen elégtelen.

NÉV: _____ ELTE AZON.: _____

Prog. inf. I. (BSc.) **4. vizsgadolgozat/3** *2011. január 26.*

II. rész (45 perc): *A II. rész összpontszáma* 16. *Ügyeljünk a precíz fogalmazásra!*

4. a) Definiáljuk $\mathbb{R}^n$ egy V altere bázisának és dimenziójának fogalmát. (2 *pont*)

b) Definiáljuk egy lineáris leképezés magterét és képterét, majd igazoljuk, hogy a magtér altér. (4 *pont*)

c) Mondjuk ki, mi az összefüggés egy φ lineáris leképezés magtere és injektivitása között. (2 *pont*)

d) Mondjuk ki és igazoljuk a lineáris leképezések dimenzióösszefüggéseként ismert tételt. (8 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. részből megszerzett pontszám eléri a 18-at, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0 - 20$:	1
$21 - 25$:	2
$26 - 30$:	3
$31 - 35$:	4
$36 - 48$:	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: Holnap délelőtt 10 és 12 óra között a Déli tömb 3-708-as szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay tanár úrtól vehetők át a szóbeli vizsganapokon.