1	2	3	Σ_1	4	Σ	**J:**

NÉV: _____ ELTE AZON.: _____

Prog. inf. I. (BSc.) **3. vizsgadolgozat** *2011. január 19.*

I. rész (75 perc): *Az I. rész összpontszáma 32. A válaszokat itt (az I. részben) nem kell indokolni!*

1. Állapítsuk meg, igazak-e az alábbi állítások, és tegyünk X-et a megfelelő kockába. (A választ nem kell indokolni!) (8 *pont*)

	Igen	Nem
a) Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor $(\alpha+\beta)(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.	☐	☒
b) $\mathbb{R}^n$ bármely két bázisának ugyanannyi eleme van.	☒	☐
c) Ha egy $\mathbb{R}^n$-beli véges vektorrendszerből egy vektort elhagyunk, akkor rangja eggyel csökken.	☐	☒
d) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rangja $n-1$, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek minden $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén végtelen sok megoldása van.	☐	☒
e) A $V_4(1,2,3,4)$ és $V_4(1,2,4,3)$ Vandermonde-determinánsok értéke megegyezik.	☐	☒
f) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött, akkor A-nak létezik n darab lineárisan független sajátvektora.	☒	☐
g) Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ortogonális, ha $MM^\top = I_n$.	☒	☐
h) Egy komplex euklideszi tér tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektoraira $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$.	☐	☒

2. Az alábbi feladat minden részében karikázzuk be a sor végén az egyetlen helyes válasz betűjelét. (8 *pont*)

a) Tekintsük $\mathbb{R}^n$-ben a $H = \{\mathbf{0}\}$ halmazt. Melyik állítás **nem** igaz? (A) H altér $\mathbb{R}^n$-ben (B) $\mathbb{R}^n$ minden altere tartalmazza H-t (C) H elemei lineárisan függetlenek (D) H elemei generátorrendszert alkotnak H-ban	(A)	(B)	(C)	(D)
b) Ha az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix rangja 2, akkor az $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix rangja (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 16	(A)	(B)	(C)	(D)
c) Melyik állítás érvényes tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorokra? (A) $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = (\mathbf{bc})\mathbf{a}$ (B) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}$ (C) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{a}$ (D) az előzőek közül egyik sem	(A)	(B)	(C)	(D)
d) Melyik az az egyenlőség, amely **nem** minden $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén teljesül? (A) $(X+Y)^\top = X^\top + Y^\top$ (B) $(X+Y)^\top = Y^\top + X^\top$ (C) $(XY)^\top = X^\top Y^\top$ (D) $(XY)^\top = Y^\top X^\top$	(A)	(B)	(C)	(D)
e) Legyen $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Melyik állításból **nem** következik, hogy A invertálható? (A) A-nak létezik bal oldali inverze (B) A rangja 4 (C) A determinánsa 4 (D) A diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött	(A)	(B)	(C)	(D)
f) Legyen $m < n$, $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Ekkor (A) $\mathcal{I}m\,\varphi = \mathbb{R}^n$ (B) $\mathcal{K}er\,\varphi \neq \{\mathbf{0}\}$ (C) $\dim \mathcal{I}m(\varphi) \leq m$ (D) $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$	(A)	(B)	(C)	(D)
g) Ha az $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixhoz tartozó kvadratikus alak negatív definit, akkor a $-A$ mátrixhoz tartozó kvadratikus alak (A) pozitív definit (B) negatív definit (C) páros n esetén pozitív, páratlan n esetén negatív definit (D) indefinit is lehet	(A)	(B)	(C)	(D)
h) Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén jelölje $k_A(\lambda)$ az A mátrix karakterisztikus polinomját. Ekkor minden $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén (A) $k_{X+Y}(\lambda) = k_X(\lambda) + k_Y(\lambda)$ (B) $k_{XY}(\lambda) = k_X(\lambda)\cdot k_Y(\lambda)$ (C) $k_{\alpha X}(\lambda) = \alpha \cdot k_X(\lambda)$ (D) ha X invertálható, akkor $k_{XY}(\lambda) = k_{YX}(\lambda)$	(A)	(B)	(C)	(D)

FORDÍTS!

3. Az alábbi feladat minden részében írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. (16 *pont*)

a) Mely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén lesznek az $\begin{bmatrix} \alpha \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vektorok lineárisan összefüggők?

$\alpha = 8,\ \beta = 27$

b) Tekintsük az $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ geometriai vektorokat. Számítsuk ki az **ab** skaláris szorzatot.

12

c) Az $1, 2, 3, 4, 5$ számok $5, 2, 3, 4, 1$ permutációjában az inverziók száma:

7

d) Írjunk fel egy olyan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixot, melynek bármely két eleme különböző, determinánsa pedig 0.

pl. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

e) Az $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix A_{23} előjelezett aldeterminánsának értéke:

-4

f) Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 3 & \delta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Ha a $\mathbf{v}$ vektor jobb oldali sajátektora az A mátrixnak, akkor δ értéke:

18

g) Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomja $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$. Ekkor a c_2 együttható értéke:

13

h) Írjuk fel az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixhoz tartozó $Q\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ kvadratikus alakot.

$x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$

Az I. részből alapértelmezésben legalább 18 pontot kell szerezni az átmenő osztályzathoz. Az elégséges megszerzésének további feltétele, hogy az I. és II. részből megszerzett pontszám elérje a 21-et. Akinek az első részből csak 15, 16 vagy 17 pontja van, annál az elégséges további feltétele, hogy összesen legalább 24, 23, illetve 22 pontot érjen el. 15 pont alatti első rész esetén a vizsga mindenképpen elégtelen.

NÉV: _____ ELTE AZON.: _____

Prog. inf. I. (BSc.) **3. vizsgadolgozat/3** *2011. január 19.*

II. rész (45 perc): *A II. rész összpontszáma* 16. *Ügyeljünk a precíz fogalmazásra!*

4. Az alábbiakban $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ pedig egy $V \times V \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény.

a) Mit jelent pontosan az, hogy egy λ valós szám jobb oldali sajátértéke A-nak? (2 *pont*)

b) Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$ jobb oldali sajátértéke A-nak. Definiáljuk a λ-hoz tartozó W_λ sajátaltér fogalmát, és igazoljuk, hogy W_λ valóban altér V-ben. (4 *pont*)

c) Mit jelent pontosan az, hogy V (valós) euklideszi tér az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ skaláris szorzatra nézve? (4 *pont*)

d) Tegyük fel, hogy V euklideszi tér az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ skaláris szorzatra nézve, továbbá $A = A^\top$. Igazoljuk, hogy ha λ és μ az A mátrix különböző sajátértékei, akkor minden $\mathbf{x} \in W_\lambda, \mathbf{y} \in W_\mu$ esetén $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$. (6 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. részből megszerzett pontszám eléri a 18-at, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0 - 20$:	1
$21 - 25$:	2
$26 - 30$:	3
$31 - 35$:	4
$36 - 48$:	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: Ma délután 18 és 19 óra között a Déli tömb 3-709 szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay tanár úrtól vehetők át a szóbeli vizsganapokon.