1	2	3	Σ_1	4	Σ	**J:**

NÉV: _____ ELTE AZON.: _____

Prog. inf. I. (BSc.) **1. vizsgadolgozat** *2009. január 7.*

I. rész (75 perc): *Az I. rész összpontszáma 32. A válaszokat itt (az I. részben) nem kell indokolni!*

1. Állapítsuk meg, igazak-e az alábbi állítások, és tegyünk X-et a megfelelő kockába. (A választ nem kell indokolni!) (8 *pont*)

	Igen	Nem
a) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ tetszőleges térvektorok, akkor az $\mathbf{ab}$ skaláris szorzat megegyezik az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzat hosszával.	☐	☒
b) Tetszőleges $\mathbb{R}$ fölötti nem nulla vektortérben van két különböző vektor, melyek lineárisan összefüggők.	☒	☐
c) Egy $\mathcal{B}$ vektorhalmaz pontosan akkor bázisa egy V vektortérnek, ha bármely V-beli vektor kifejezhető $\mathcal{B}$-beli vektorok lineáris kombinációjaként.	☐	☒
d) Egy $k \times n$-es mátrix rangja nem lehet nagyobb k-nál.	☒	☐
e) Ha egy négyzetes mátrix sorait fordított sorrendben írjuk föl (azaz az utolsó sort hozzuk az első sorba, az utolsó előttit a másodikba, stb.), akkor a mátrix determinánsa -1-szeresére változik.	☐	☒
f) Egy négyzetes mátrix determinánsa pontosan akkor nem nulla, ha a mátrixnak van bal oldali inverze.	☒	☐
g) Ha egy $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés injektív, akkor szürjektív is.	☐	☒
h) Egy lineáris transzformáció magterének és képterének dimenzióját összeadva mindig páros számot kapunk.	☐	☒

2. Az alábbi feladat minden részében karikázzuk be a sor végén az egyetlen helyes válasz betűjelét. (8 *pont*)

a) A térvektorok terében igaz, hogy: (A) két térvektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy síkban vannak; (B) három térvektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy síkban vannak; (C) két térvektor skaláris szorzata merőleges mindkét vektorra; (D) három térvektor vektoriális szorzata mindig a nullvektor.	(A)	(B)	(C)	(D)
b) Ha egy $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ valamely $\mathbf{v}$ vektorra és λ skalárra, akkor: (A) $\lambda = 0$; (B) $\mathbf{v} = 0$; (C) $\lambda = 0$, vagy $\mathbf{v} = 0$; (D) $\lambda = 0$, és $\mathbf{v} = 0$.	(A)	(B)	(C)	(D)
c) Egy $\mathbb{R}$ fölötti háromdimenziós vektortérben az alterek száma: (A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) több, mint 4.	(A)	(B)	(C)	(D)
d) Ha egy 3×4-es A mátrixnak létezik jobb oldali inverze, akkor: (A) A-nak létezik kétoldali inverze is; (B) A-nak létezik bal oldali inverze is; (C) A rangja 4; (D) A rangja 3.	(A)	(B)	(C)	(D)
e) Legyen $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, melyre $\det A = 0$. Ekkor: (A) van olyan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, melyre az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rendszernek nincs megoldása; (B) tetszőleges $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorra az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rendszernek nincs megoldása; (C) az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ rendszernek nincs megoldása; (D) A oszlopai lineárisan függetlenek.	(A)	(B)	(C)	(D)
f) Ha egy $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés mátrixában az első oszlop csupa nullából áll, akkor: (A) φ nem lehet invertálható; (B) φ nem lehet szürjektív; (C) φ^2 a nulla leképezés; (D) $\dim V < \dim W$.	(A)	(B)	(C)	(D)
g) Egy V valós euklideszi térben tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokra: (A) $\lvert(\mathbf{v}, \mathbf{w})\rvert \geq \lVert\mathbf{v}\rVert \cdot \lVert\mathbf{w}\rVert$; (B) $\lVert\mathbf{v} + \mathbf{w}\rVert \leq \lVert\mathbf{v}\rVert + \lVert\mathbf{w}\rVert$; (C) $\lVert\mathbf{v} + \mathbf{w}\rVert = \lVert\mathbf{v}\rVert + \lVert\mathbf{w}\rVert$; (D) $\lVert\mathbf{v} + \mathbf{w}\rVert \geq \lVert\mathbf{v}\rVert + \lVert\mathbf{w}\rVert$.	(A)	(B)	(C)	(D)
h) Tegyük föl, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ jobb oldali sajátértéke. Ekkor: (A) $\det(A - I_n\lambda_0) = 0$; (B) $A - I_n\lambda_0 = 0$; (C) minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$-re $A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}$; (D) az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.	(A)	(B)	(C)	(D)

FORDÍTS!

3. Az alábbi feladat minden részében írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. (16 *pont*)

a) Tekintsük a következő térvektorokat:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Határozzuk meg az **abc** vegyesszorzat értékét.

$\mathbf{abc} = 0$

b) Jelölje a_{ij} az $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrix i-edik sorának j-edik elemét. Tudjuk, hogy az $a_{13}a_{2p}a_{34}a_{42}a_{5q}$ tag negatív előjellel szerepel $\det A$ kifejezésében. Határozzuk meg p és q értékét!

$p = 1$ $q = 5$

c) Tudjuk, hogy $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ sajátvektora az $A = \begin{bmatrix} a & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ mátrixnak. Határozzuk meg az a paraméter értékét.

$a = 3$

d) Legyen φ a szokásos háromdimenziós tér 90°-os elforgatása a z tengely körül. Írjuk föl φ mátrixát az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ standard bázisban.

$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) Határozzuk meg az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektorok egymáshoz viszonyított hajásszögét az $\mathbb{R}^4$ szokásos $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ skaláris szorzatára nézve.

$\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 120°$ azaz $2\pi/3$

f) Az alábbi vektorterek mint $\mathbb{R}$ fölötti vektorterek közül melyek lesznek izomorfak $\mathbb{R}^4$-gyel:

$$U = \mathbb{R}^{1\times 4},\ V = \mathbb{R}^{2\times 2},\ W = \{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + c + d = 0 \}$$

Izomorfak: U, V

g) Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ mátrix egy X-szel jelölt bal oldali inverzét.

Pl. $X = [1 \quad 0 \quad 0]$

h) Hány olyan ortonormált bázisa van $\mathbb{R}^2$-nek a szokásos $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ skaláris szorzásra nézve, melynek első eleme $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$?

ONB-k száma: 2

Az I. részből legalább 18 pontot kell szerezni az átmenő osztályzathoz. Az elégséges megszerzésének további feltétele, hogy az I. és II. részből megszerzett pontszám elérje a 21-et.

NÉV: _____ ELTE AZON.: _____

Prog. inf. I. (BSc.) **1. vizsgadolgozat/3** *2009. január 7.*

II. rész (45 perc): *A II. rész összpontszáma* 16. *Ügyeljünk a precíz fogalmazásra!*

4. a) Definiáljuk egy $k \times n$-es mátrix oszlop-, illetve sorrangját. (2 *pont*)

b) Adjunk meg egy olyan $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mátrixot, melynek rangja 1, és pontosan 3 nem nulla oszlopa és 2 nem nulla sora van. (2 *pont*)

c) Ismertessük, hogyan lehet egy négyzetes mátrix inverzét meghatározni a Gauss-elimináció módszerével, s indokoljuk röviden az eljárást. (4 *pont*)

d) Mondjuk ki a mátrixok összegének és szorzatának rangjára vonatkozó fölső becsléseket, és bizonyítsuk be az **egyiket**. (8 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. részből megszerzett pontszám eléri a 18-at, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0 - 20$:	1
$21 - 25$:	2
$26 - 30$:	3
$31 - 35$:	4
$36 - 48$:	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: január 7-én, szerdán, 17.00 és 18.30 között a Déli tömb 3-711/a szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay Tanár Úrtól vehetők át a szóbeli vizsganapokon.