11. DETERMINÁNSOK

11.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Bevezetés.

A közgazdaságtanban gyakoriak az olyan rendszerek melyek jellemzéséhez több adat szükséges. Például egy k vállalatból álló csoport minden vállalatának eredményességét n adattal jellemezzük (ilyen adatok lehetnek: az i-edik vállalat dolgozóinak létszáma, összbértömege, éves forgalma, éves nyeresége, épületeinek, termelési eszközeinek érték, ezek éves amortizációja, stb.) Itt $k \cdot n$ szám jellemzi a vállalatcsoport eredményességét, és az adatok jelentésére való tekintettel ezeket egy téglalap alakú elrendezésben írjuk fel, és szokásos módon zárójelbe tesszük, azaz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Az i -edik vállalatok jellemző adatok:

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{ij},\ \dots,\ a_{in}$$

a táblázat i. sorában szerepelnek, míg a j. oszlop

$$a_{1j},\ a_{2j},\ \dots, a_{ij},\ \dots,\ a_{kj}$$

számai az egyes vállalatok j-edik jellemző adatát adják.

Definíció. Ha $k \cdot n$ darab (valós) számot, az a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, k;\ j = 1, 2, \dots, n)$ számokat, k sorban és n oszlopban helyezünk el (és zárójelbe teszünk) az alábbi módon:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

akkor egy $k \times n$ *típusú (valós) mátrixot* definiáltunk. Az összes $k \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{k\times n}$-nel jelöljük.

A típus megadásánál **mindig a sorok száma** az első adat!

Az előbbi mátrixot A-val jelölve, mondhatjuk, hogy a_{ij} az A mátrix i-edik sorának j-edik eleme, vagy az A mátrix (i, j)-edik eleme.

Gyakran használjuk az $A = (a_{ij})$ tömör jelölést, ha ez nem okoz félreértést.

Az

$$s_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ \dots\ a_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

vektort az A mátrix *i-edik sorvektorának* nevezzük, (e vektor koordinátái állnak a mátrix i-edik sorában), az

$$o_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

vektort az A mátrix *j-edik oszlopvektorának* nevezzük (e vektor koordinátái állnak a mátrix j-edik oszlopában).

Speciális mátrixok:

(1) *Négyzetes vagy kvadratikus n-edrendű mátrix*, ha n sora és n oszlopa van (azaz a sorok és oszlopok száma egyenlő: $k = n$. Egy n-edrendű kvadratikus mátrix diagonálisa (főátlója) az $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemekből áll, mellékátlója pedig az $a_{n1}, a_{n-1\,2}, \ldots, a_{1n}$ elemekből áll.
(2) *n-edrendű egységmátrix* olyan n-edrendű kvadratikus mátrix, melynek főátlójában csupa 1 áll, azon kívül pedig csupa 0 áll. Jelölése E.
(3) $k \times n$ *típusú zérusmátrix* olyan $k \times n$ típusú mátrix, melynek minden eleme 0. Jelölése O.
(4) *Oszlopmátrix (ill. sormátrix)* olyan mátrix melynek csak egyetlen oszlopa (ill. sora) van.

Definíció. Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{k\times n}$ *mátrix transzponáltján* az $A^\top = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n\times k}$ mátrixot, értjük (a mátrix sorait és oszlopait megcserélve kapjuk a mátrix transzponáltját).

Definíció. Legyenek $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{k\times n}$ **azonos típusú mátrixok**, és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor az $A + B$ és λA mátrixokat

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \lambda A := (\lambda a_{ij})$$

-vel definiáljuk.

Tétel. [az összeadás, számmal való szorzás és transzponálás tulajdonságai] *Az összes $k \times n$ típusú valós mátrixok $\mathcal{M}_{k\times n}$ halmaza $k \cdot n$ dimenziós valós vektortér a fenti műveletekre nézve. Továbbá bármely $A, B \in \mathcal{M}_{k\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$ mellett*

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top, \qquad (\lambda A)^\top = \lambda A^\top.$$

Bizonyítás. A megfelelő tulajdonságok ellenőrzése. □

Két *mátrix szorzata csak akkor értelmezett*, ha az első tényező(mátrixnak) annyi oszlopa van, mint ahány sora van a második tényező(mátrixnak).

Definíció. Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{k\times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$ mátrixok $C = AB$ *szorzatán* azt a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{k\times m}$ mátrixot értjük melyre

$$c_{ij} := \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, m).$$

Ezt a szorzást röviden "*sor-oszlop kombinációnak*" mondjuk, mert a szorzatmátrix c_{ij} eleme, éppen az A mátrix (első tényező) i-edik sorvektorának és a B mátrix (második tényező) j-edik oszlopvektorának a belső szorzata (mindkét vektor n dimenziós).

Tétel. [mátrixok szorzásának tulajdonságai] *Mátrixok szorzására teljesülnek az*

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C \\ (A + B)C &= AC + BC \\ A(B + C) &= AB + AC \\ (AB)^\top &= B^\top A^\top \end{aligned}$$

azonosságok, ahol A, B, C tetszőleges mátrixok, melyekre a felírt műveleteknek van értelme.

Bizonyítás. A megfelelő szorzatmátrixok megfelelő elemeinek kiszámolása. □

Megjegyezzük, hogy a mátrixszorzás *nem kommutatív*, azaz általában $AB \neq BA$, továbbá kvadratikus mátrixokra

$$AE = EA = A, \quad AO = OA = O.$$

Definíció. Egy A kvadratikus mátrixot *invertálhatónak nevezünk,* ha van olyan B (kvadratikus) mátrix melyre

$$AB = BA = E$$

teljesül. Ezt a B mátrixot A *inverzének nevezzük* és A^{-1}-gyel jelöljük.

Ha A invertálható, akkor csak egy inverze van. Ugyanis, ha B' is A inverze volna, akkor $AB' = B'A = E$

$$B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B' \text{ azaz } B = B'.$$

11.2 Determináns fogalma, tulajdonságai

Definíció. Az $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ számok egy elrendezését (valamely sorrendben való felírását) ezen elemek egy *permutációjának* nevezzük. Két permutációt akkor tekintünk különbözőnek, ha azok legalább egy elem elhelyezésében különböznek. $\mathbb{N}_n$ összes permutációinak halmazát S_n-nel jelöljük.

Példa. $\mathbb{N}_3$ összes permutációinak S_3 halmaza az

$$(1,2,3);\ (1,3,2);\ (2,1,3);\ (2,3,1);\ (3,1,2);\ (3,2,1)$$

permutációkból áll.

Indukcióval könnyen igazolható, hogy S_n-nek $n!$ eleme van.

Definíció. Legyen $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$ az $1, 2, 3, \ldots, n$ elemek egy permutációja. Azt mondjuk, hogy e permutációban az a_i és a_j *pár inverzióban* áll, ha $i < j$ és $a_i > a_j$.

Az inverzióban álló párok száma az $(n,\ n-1,\ \ldots,\ 2,\ 1)$ permutációban lesz maximális, és akkor a számuk

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Aszerint, hogy az inverzióban álló párok száma páros vagy páratlan, szokás *páros vagy páratlan permutáció*ról beszélni.

Igazolható, hogy S_n-ben ugyanannyi a páros és páratlan permutációk száma. Ha egy permutációban két elemet felcserélünk, akkor permutáció párossága megváltozik.

Definíció. Legyen $A = (a_{ij})$ egy n-edrendű kvadratikus mátrix. Az A mátrix *determinánsán* az

$$|A| := \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2}\, \ldots\, a_{n\alpha_n}$$

számot értjük, ahol az összegezés kiterjed az $1, 2, \ldots, n$ számok összes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ permutációjára, és $I(\alpha)$ az α permutáció inverzióinak számát (az inverzióban álló párok számát) jelöli.

Ha a mátrix elemeivel van megadva, akkor determinánsánál nem tesszük ki a mátrixot jelölő zárójelet, hanem az elemeket csupán két függőleges vonal közé tesszük. Ha egy n-edrendű A mátrix az $o_1, o_2, \ldots, o_n$ oszlopvektoraival van adva, akkor determinánsát szokásos

$$|A| = |o_1, o_2, \ldots, o_n|$$

-nel is jelölni.

Megjegyzés. Egy négyzetes mátrix determinánsát a következőképpen számoljuk ki. Kiválasztunk a mátrix minden sorából egy-egy elemet úgy, hogy ezek az elemek mind különböző oszlopban legyenek. Ezeket az elemeket összeszorozzuk. Ha a kapott elemeket úgy rakjuk sorba, hogy hogy a sorokat jelölő indexek természetes sorrendben álljanak, akkor az oszlopindexek az $1, 2, \ldots, n$ számok egy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ permutációjával adhatók meg. Ha ez a permutáció páros akkor az előbbi szorzatot változatlanul hagyjuk, ha páratlan, akkor még -1-gyel megszorozzuk. Az ilyen módon kapott szorzatokat az oszlopindexek összes permutációjára elkészítjük, majd a kapott $n!$ darab szorzatot összeadjuk.

A determináns fenti definíciója teljesen elemi, de igen bonyolult, ami gátolja az egyszerű kiszámíthatóságot.

Másod és harmadrendű determinánsok kiszámítására vannak egyszerű (és könnyen megjegyezhető képletek:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

a főátlóban lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóban lévő elemek szorzatát.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez a *Sarrus szabály*, melyet úgy lehet megjegyezni, hogy a determináns első két oszlopát a determináns jobboldalához hozzáírva képzeljük, majd a mellékátlóban és vele párhuzamosan tőle jobbra lévő két másik átlóban lévő elemeket összeszorozzuk, e szorzatokat összeadjuk, majd a mellékátlóban és vele párhuzamosan tőle jobbra lévő két másik átló elemeit összeszorozzuk, e szorzatokat kivonjuk az előző összegből.

TÉTEL. [a determináns alaptulajdonságai]

(1) *Ha egy determináns sorait és oszlopait felcseréljük, akkor a determináns értéke nem változik (vagy egy négyzetes mátrixnak és transzponáltjának determinánsa megegyezik).*
(2) *Ha egy determináns valamely sorának minden eleme tartalmaz egy c faktort, akkor ez kiemelhető a determináns jele elé.*
(3) *Ha egy determináns két sorát felcseréljük akkor a determináns előjelet vált.*
(4) *Ha egy determináns két sora megegyezik, akkor a determináns értéke nulla.*
(5) *A determináns értéke nem változik, ha egy sorának elemeihez egy másik sor megfelelő elemeinek c-szeresét hozzáadjuk.*
(6) *Ha egy determináns valamely sorának minden eleme két tag összegére bomlik, akkor a determináns felírható két olyan determináns összegeként melyeknek megfelelő sorukban éppen az egyes összeadandók állnak.*
(7) *Ha egy determináns egy sorában csupa* 0 *áll, akkor a determináns értéke nulla.*
(8) *Ha egy determináns főátlójában minden elem* 1 *és a determináns többi eleme* 0*, akkor a determináns értéke* 1.

Bizonyítás. (1) Azt kell megmutatni, hogy

$$\sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n} = \sum_{\beta\in S_n} (-1)^{I(\beta)} a_{\beta_1 1}a_{\beta_2 2}\dots a_{\beta_n n}.$$

Ez azért igaz, mert az első összeg minden tagjához hozzárendelhető a második összegnek pontosan egy tagja, és az előjelek is egyeznek.

(2) Ha az i-edik sort szorozzuk c-vel akkor

$$\sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1}\dots(ca_{i\alpha_i})\dots a_{n\alpha_n} = c\sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{n\alpha_n}.$$

így állításunk igaz.

(3) Ha pl. az i-edik és $j>i$-edik sort cseréljük fel, akkor azt kell belátni, hogy

$$\sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{j\alpha_j}\dots a_{n\alpha_n} = -\sum_{\alpha'\in S_n} (-1)^{I(\alpha')} a_{1\alpha_1}\dots a_{j\alpha_j}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{n\alpha_n}$$

ahol $\alpha' = (\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$. Mindkét összegben a szorzatok tényezői megegyeznek csupán az elöjelek különböznek, mivel az α' permutációt úgy kapjuk α-ból, hogy az i-edik és j-edik elemeket megcseréljük. Ezért $I(\alpha') = I(\alpha)+$páratlan szám, igazolva állításunkat.

(4) A két egyező sor cseréje nem változtatja meg a determinánst, így az előző állítás miatt $|A| = -|A|$ amiből $|A| = 0$.

(5) Ha az i-edik sorhoz a j-edik sor c-szeresét adjuk ($i<j$), akkor az igy kapott determináns értéke

$$\sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1}\dots(a_{i\alpha_i}+ca_{j\alpha_j})\dots a_{j\alpha_j}\dots a_{n\alpha_n} = \sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{j\alpha_j}\dots a_{n\alpha_n}$$

$$+c\sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1}\dots a_{j\alpha_j}\dots a_{j\alpha_j}\dots a_{n\alpha_n} = \sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{j\alpha_j}\dots a_{n\alpha_n}$$

mert c utáni összeg nulla (lévén egy olyan determináns értéke melynek két sora megegyezik).

(6) Ha az i-edik sor elemei $a_{ij} + a'_{ij}$ $(j = 1, \dots, n)$ akkor

$$\sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1} \dots (a_{i\alpha_i} + a'_{i\alpha_i}) \dots a_{n\alpha_n} = \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}$$

$$+ \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1} \dots a'_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}$$

amint állítottuk.

(7), (8) nyilvánvalók a definíció alapján. □

Tétel. [a determinánsok szorzástétele] *(Kvadratikus) mátrixok szorzatának determinánsa a tényezőmátrixok determinánsainak szorzata, azaz ha A, B (azonos rendű) kvadratikus mátrixok, akkor*

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Bizonyítás. Ld. pl. Kozma jegyzet. □

Következmény. *Egy (kvadratikus) mátrix akkor és csakis akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.*

Ugyanis, ha A invertálható akkor $|A\,A^{-1}| = |E|$, vagy a szorzástétel miatt $|A|\,|A^{-1}| = 1$ így $|A| \neq 0$. A fordított állítst később igazoljuk, az inverz mátrix előállításával. □

Az is könnyen igazolható, hogy egy (kvadratikus) mátrix determinánsa pontosan akkor nulla, ha oszlopvektorai (vagy sorvektorai) lineárisan függőek. Így egy (kvadratikus) *mátrix invertálhatóságának egy újabb szükséges és elegendő feltétele az, hogy a mátrix oszlopvektorai (vagy sorvektorai) lineárisan függetlenek legyenek.*

Definíció. Egy n-edrendű kvadratikus $A = (a_{ij})$ mátrixból, hagyjuk el az a_{ij} elem sorát és oszlopát (azaz az i-edik sort és a j-edik oszlopot), a visszamaradó $n-1$-edrendű kvadratikus mátrix determinánsát $(-1)^{i+j}$-vel megszorozva, a kapott számot az A *mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsnak nevezzük*, és A_{ij}-vel jelöljük.

Az *adjungált aldeterminánsa tehát egy részmátrix determinánsa, vagy annak negatívja*, attól függően, hogy mi az elhagyott sor és oszlop indexe. Az előjel megállapítására a *sakktábla szabály* szolgál: helyezzük el mátrixunkat egy képzeletbeli $n \times n$-es sakktáblán, de a mezőket színezés helyett + és − jelekkel látjuk el, úgy, hogy a bal felső sarokban + jel van. Ha egy mezőben + jel van akkor $(-1)^{i+j} = 1$, ha − jel van, akkor $(-1)^{i+j} = -1$.

Tétel.[kifejtési tétel] *Legyen A egy n-edrendű kvadratikus mátrix, akkor*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{i'j} = \begin{cases} |A| & \text{ha } i = i' \\ 0 & \text{ha } i \neq i' \end{cases}$$

ez a sor szerinti kifejtés, továbbá

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij'} = \begin{cases} |A| & \text{ha } j = j' \\ 0 & \text{ha } j \neq j' \end{cases}$$

ez az oszlop szerinti kifejtés.

Bizonyítás. Ld. pl. Kozma jegyzet. □

Magyarázat. Pl. az első sor szerinti kifejtés azt jelenti, hogy a determináns értékét úgy számoljuk ki, hogy első sorvektor $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ és ennek koordinátáihoz tartozó adjungált aldeterminánsokból álló $(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n})$ vektorok belső szorzatát vesszük. Ha pl. az első sorvektor és egy másik sorvektorhoz tartozó adjungált aldeterminánsok vektorának belső szorzatát vesszük, akkor nullát kapunk. Ugyanez a helyzet oszlopvektorok esetén is.

Tétel. [az inverz mátrix előállítása] *Legyen A egy n-edrendű invertálható mátrix (azaz legyen $|A| \neq 0$, akkor az $A^{-1} = (b_{ij})$ inverz mátrix elemei*

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

alakúak (azaz A inverze az A adjungált aldeterminánsaiból alkotott mátrix transzponáltjának $\frac{1}{|A|}$-szorosa).

Bizonyítás. Ugyanis ekkor az $C := A \cdot A^{-1}$ szorzat c_{ij} elemét kiszámolva, az oszlop szerinti kifejtési tétel alapján

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

azaz $C = A \cdot A^{-1} = E$. Az $A^{-1} \cdot A = E$ egyenlőség hasonlóan igazolható. □

Definíció. Egy tetszőleges $k \times n$ típusú *mátrix rangján* oszlopvektorainak rangját értjük (ami azonos a maximális lineárisan független oszlopvektorok számával). A rangját $\operatorname{rang} A$-val jelöljük.

Legyen $1 \leq l \leq \min\{k, n\}$, akkor A *egy l-edrendű aldeterminánsát* úgy kapjuk, hogy kiválasztjunk a mátrix l darab sorát és l darab oszlopát, és ezek metszetében lévő elemekből alkotott l-edrendű determinánst képezünk.

Ilyen l-edrendű aldeterminás $\binom{k}{l}\binom{n}{l}$ darab van, mivel ennyiféleképpen választhatunk ki l sort és oszlopot.

Tétel.[rangszámtétel] *Bármely (nemzérus) mátrix rangja megegyezik a maximális rendű nullától különböző aldeterminánsainak rendjével. A zérusmátrix rangja nulla.*

Bizonyítás. Ld. pl. Kozma jegyzet. □

E tételből az is következik, hogy *egy mátrix sorvektorainak rangja egyenlő az oszlopvektorainak rangjával*, hiszen transzponáláskor a kiválasztott l-edrendű determinánsok értéke nem változik.

12. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

12.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss elimináció

Definíció. Lineáris egyenletrendszernek nevezzük az

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = & & b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = & & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}\,x_1 + a_{k2}\,x_2 + \cdots + a_{kn}\,x_n = & & b_k \end{array} \tag{1}$$

egyenletrendszert, ahol a_{ij}, b_i $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n)$ *adott* valós számok, x_i $(i = 1, \ldots, k)$ *ismeretlen* valós (vagy komplex) számok.

Az a_{ij} számokat az (1) rendszer *együtthatói*nak nevezzük (pontosabban a_{ij} a rendszer i-edik egyenletében az x_j ismeretlen együtthatója, a b_i az i-edik egyenlet *szabad tag*ja.

Az (1) egyenletrendszert *homogén*nek nevezzük, ha $b_1 = \cdots = b_k = 0$, ellenkező esetben *inhomogén*nek mondjuk. Azt mondjuk, hogy a $c_1, \ldots, c_n$ számok (1) *egy megoldás*át adják, ha az ismeretlenek helyére helyettesítve őket a rendszer minden egyes egyenletében egyenlőség áll.

Az (1) egyenletrendszert *szabályos*nak nevezzük, ha $k = n$, azaz ha az egyenletek és ismeretlenek száma egyenlő.

Bevezetve az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

együtthatómátrixot, és az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

oszlopmátrixokat (oszlopvektorokat) az (1) rendszer tömören az

$$A\,x = b \tag{2}$$

alakba írható.

Egyenletek ill. egyenletrendszerek esetén *két alapvető kérdés*t vizsgálunk:

- Van-e az egyenletrendszernek megoldása, és ha igen akkor egyértelmű-e?
- Hogyan határozhatjuk meg a megoldást ill. az összes megoldást?

Egy (lineáris) egyenletrendszert *megoldható*nak nevezünk, ha van megoldása, ellenkező esetben *ellentmondásos*nak mondjuk. Ha pontosan egy megoldás létezik, akkor a rendszert *határozott*nak nevezzük, ha több megoldás van akkor *határozatlan*nak mondjuk.

Két *egyenletrendszert ekvivalensnek* nevezünk, ha megoldásaik halmaza egyenlő.

Lineáris egyenletrendszerek esetén (nyilvánvaló módon) az alábbi átalakítások eredményeznek ekvivalens rendszereket (ezeket *ekvivalens átalakítások*nak mondjuk):

- az egyenletek sorrendjének megváltoztatása,
- az egyenletekben szereplő tagok sorrendjének megváltoztatása,
- a rendszer bármelyik egyenletének szorzása (minden tag szorzása) egy nemzérus számmal,
- a rendszer bármelyik egyenletének hozzáadása egy másik egyenletéhez.

A Gauss elimináció *az ismeretlenek szukcesszív kiküszöbölése.* Ennek során az egyenletrendszert un. trapéz alakra hozzuk. Az (1) rendszert akkor nevezzük *trapéz alakúnak*, ha van olyan $1 \le r \le n$ szám, hogy $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \ldots, a_{rr} \neq 0$ de $a_{ij} = 0$, ha $i = 1, 2, \ldots, r,\ j < i$, továbbá $a_{ij} = 0$, ha $i > r,\ j = 1, 2, \ldots, n$. Ha $r = n$, akkor a rendszert *háromszögalakúnak* nevezzük.

A Gauss elimináció lépései:

Tegyük fel, hogy $a_{11} \neq 0$. Az első egyenlet $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$-szeresét az i-edik egyenlethez hozzáadva $i = 2, 3, \ldots, k$ esetén, az x_1 ismeretlen eltűnik a második, harmadik, ... k-adik egyenletből. Ha $a_{11} = 0$, akkor az első egyenletben keresünk egy ismeretlent melynek együtthatója $\neq 0$ és ez veszi át x_1 szerepét.

Ezután a második egyenlet alkalmas konstanszorosainak a harmadik ... k-adik egyenlethez való hozzádásával kiküszöböljük a harmadik ismeretlent a negyedik, ... k-adik egyenletből.

Az eljárást hasonlóan folytatjuk, míg van mit kiküszöbölni.

Íly módon egy trapéz alakú egyenletrendszerhez jutunk.

A trapéz alakú egyenletrendszer akkor és csakis akkor megoldható, ha a trapéz alakban az $r + 1$-edik egyenlettől kezdve a szabad tagok mind nullák.

A megoldható esetben rendszerünk akkor és csakis akkor lesz határozott, ha $r = n$, azaz ha rendszerünk háromszögalakú. Ugyanis, ekkor az utolsó egyenletből azonnal kiszámítható x_n egyetlen lehetséges értéke, ezt az előző egyenletbe helyettesítve számolhatjuk ki x_{n-1} egyetlen értékét, és hasonlóan folytatva kapjuk a rendszer egyetlen megoldását adó $\ldots, x_3, x_2, x_1$ értékeket.

Ha $r < n$ akkor a rendszer határozatlan, ugyanis az $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ "szabad ismeretleneknek" tetszőleges értéket adva, ezek segítségével a fennt leírt módon az $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$ ismeretlenek (egyértelűen) kiszámíthatók. Így ebben az esetben a rendszer határozatlan, és végtelen sok megoldása van (a megoldások egy $n - r$ paraméteres sereget alkotnak.

12.2 Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

Tétel. [lin. egyenletrendszer megoldhatósága] *Az*

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{k1}\,x_1 + a_{k2}\,x_2 + \cdots + a_{kn}\,x_n &= b_k \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer akkor is csakis akkor oldható meg, ha a

$$\mathrm{rg} A = \mathrm{rg}(A \,|\, b)$$

rangfeltétel teljesül, ahol A a rendszer mátrixa, $(A \,|\, b)$ a bővített mátrix, melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy az A mátrixhoz $n+1$-edik oszlopként hozzáírjuk a szabad tagok b oszlopvektorát.

Bizonyítás. Legyenek

$$o_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

az A mátrix oszlopvektorai, akkor rendszerünk

$$x_1\,o_1 + x_2\,o_2 + \cdots + x_n\,o_n = b \tag{3}$$

alakba is írható (a baloldali összeg első tagja az o_1 vektor x_1 skalárral való szorzata s.i.t.).

Innen látható, hogy *ha rendszerünk megoldható*, akkor (3) alapján

$$b \in \mathcal{L}(o_1, \ldots, o_n) \quad \text{így} \quad \mathcal{L}(o_1, \ldots, o_n) = \mathcal{L}(o_1, \ldots, o_n, b),$$

így az utóbbi két altér rangja egyenlő, azaz (3) teljesül.

Fordítva, ha (3) *teljesül*, akkor

$$\mathcal{L}(o_1, \ldots, o_n, b) \supset \mathcal{L}(o_1, \ldots, o_n)$$

és (3) miatt

$$\mathcal{L}(o_1, \ldots, o_n, b) = \mathcal{L}(o_1, \ldots, o_n)$$

így $b \in \mathcal{L}(o_1, \ldots, o_n)$. Ezért a b oszlopvektor az $o_1, \ldots, o_n$ oszlopvektorok lineáris kombinációja, azaz vannak olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok, melyekre

$$b = x_1\,o_1 + x_2\,o_2 + \cdots + x_n\,o_n$$

teljesül, azaz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a rendszer megoldása. □

Foglalkozzunk most a *homogén rendszer*rel, (amikor $b_1 = \cdots = b_k = 0$). Ekkor az előző tételben szereplő rangfeltétel biztosan teljesül, így mindig van megoldás. Ez a rangfeltételre való hívatkozás nélkül is azonnal látható, hiszen $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ megoldása a homogén rendszernek. Ezt a megoldást *triviális megoldás*nak nevezzük.

Mikor van a homogén rendszernek triviálistól különböző megoldása? Erre ad választ a következő

Tétel. [homogén rendszernek nemtriviális megoldásának létezése] *Az*

$$Ax = 0 \quad (A \in \mathcal{M}_{k\times n}, x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n\times 1})$$

homogén lineáris egyenletrendszernek akkor is csakis akkor van triviálistól különböző megoldása, ha

$$\mathrm{rang}\, A < n$$

(azaz a rendszer A mátrixának rangja kisebb mint az ismeretlenek száma). Ha ez teljesül, akkor a homogén rendszer összes megoldásai $\mathbb{R}^n$-nek egy

$$n - \mathrm{rang}\, A$$

dimenziós alterét alkotják.

Bizonyítás. Az, hogy a homogén rendszer megoldásai alteret alkotnak szinte nyilvánvaló, ha ugyanis, az x, y (oszlop)vektorok megoldások akkor

$$Ax = 0, Ay = 0$$

így

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 \quad \text{és} \quad A(cx) = cAx = 0$$

azaz $x + y$ és cx is megoldás ($c \in \mathbb{R}$).

Legyen $\operatorname{rang} A = r$ és írjuk a rendszert

$$x_1\, o_1 + x_2\, o_2 + \cdots + x_n\, o_n = 0 \tag{4}$$

alakba.

Ha van nemtriviális $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ megoldás, akkor (4) teljesül, amiből látható, hogy $o_1, o_2, \ldots, o_n$ lineárisan függő, így az $\mathcal{L}(o_1, o_2, \ldots, o_n)$ altér dimenziója (ami éppen $\operatorname{rang} A$) kisebb mint n.

Fordítva, ha $r < n$ akkor vegyük az $\mathcal{L}(o_1, o_2, \ldots, o_n)$ altér egy bázisát, az egyszerűség kedvéert legyen ez a rendszer sorrendben első r db. vektora, azaz $o_1, o_2, \ldots, o_r$. Ekkor az $o_{r+1}, \ldots, o_n$ vektorok a bázisvektorok lineáris kombinációi, azaz

$$o_i = \alpha_{i1} o_1 + \alpha_{i2} o_2 + \cdots + \alpha_{ir} o_r \qquad (i = r + 1, \ldots, n) \tag{5}$$

alkalmas, nem csupa zérusból álló $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ir}$ számok esetén. Ezt átírhatjuk

$$-\alpha_{i1} o_1 - \alpha_{i2} o_2 - \cdots - \alpha_{ir} + 1 \cdot o_i = 0$$

alakba is, ami viszont azt jelenti, hogy az

$$u_i = (-\alpha_{i1}, -\alpha_{i2}, \ldots, -\alpha_{ir}, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)^\top \qquad (i = r + 1, \ldots, n)$$

(oszlop)vektorok a homogén rendszer nemtriviális megoldásai (az 1 a i edik helyen áll). Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, mert (az $u_{r+1}, \ldots, u_n$ oszlopvektorokat egymás után egy) mátrixként írva, a kapott mátrix tartalmazza az $n - r$ dimenziós egységmátrixot. Így a megoldások altere legalább $n - r$ dimenziós. Később megmutatjuk, hogy a megoldások alterének dimenziója pontosan $n - r$. □

Tétel. [lin. egy.rendszer megoldásának szerkezete] *Az*

$$Ax = b \quad (A \in \mathcal{M}_{k\times n}, x \in \mathcal{M}_{n\times 1},\, b \in \mathcal{M}_{k\times 1}) \tag{6}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszer bármely x megoldása

$$x = x' + x^h$$

alakba írható, ahol x' az inhomogén egyenlet egy rögzített (partikuláris) megoldása, x^h pedig a (6)*-nak megfelelő*

$$Ax = 0 \tag{7}$$

homogén egyenlet egy tetszőleges megoldása. Így a megoldások halmaza a (7) *megoldásalterének az x' vektorral való eltoltja.*

Bizonyítás. Ugyanis, ha x (6) egy tetszőleges megoldása, x' (6) egy megoldása, akkor

$$Ax = b,\ Ax' = b \quad \text{amiből} \quad A(x - x') = 0$$

amiből $x^h = x - x'$-vel következik állításunk. □

12.3 A Cramer szabály: lineáris egyenletrendszerek megoldása

A szabályos egyenletrendszerekre vonatkozik a alábbi

Tétel. [Cramer szabály] *Legyen A egy n-edrendű kvadratikus mátrix. A*

$$Ax = b \quad (A \in \mathcal{M}_{n\times n}, x, b \in \mathcal{M}_{n\times 1}) \tag{8}$$

(szabályos) lineáris egyenletrendszer akkor és csakis akkor határozott (egyértelműen megoldható), ha

$$|A| \neq 0.$$

Ha ez teljesül akkor a rendszer egyetlen megoldása

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol A_i az a mátrix melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy annak i-edik oszlopát a szabad tagok b (oszlop)vektorára cseréljük ki.

Bizonyítás. Ha rendszerünk határozott akkor az A mátrix $o_1, \ldots, o_n$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek (ti. csak ekkor lehet b-t az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként egyértelműen felírni). Ekkor viszont $|A| \neq 0$.

Fordítva, ha $|A| \neq 0$ akkor A invertálható, megszorozva az $Ax = b$ egyenletet balról az A^{-1} inverz mátrixszal

$$A^{-1}Ax = Ex = x$$

amiből az inverz mátrix $A^{-1} = \left(\frac{A_{ji}}{|A|}\right)$ alakját, felhasználva

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ji}}{|A|} b_i = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

mivel jobboldalon az utolsó összeg éppen az $|A_i|$ determinánsnak az i-edik oszlop szerinti kifejtése. □

A szabályos homogén egyenletrendszerekre vonatkozik az következő

Tétel. [szabályos homogén egy.rendszer nemtriviális megoldásának létezése] *Legyen A egy n-edrendű kvadratikus mátrix. A*

$$Ax = 0 \quad (A \in \mathcal{M}_{n\times n}, x \in \mathcal{M}_{n\times 1})$$

(szabályos) homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van nemtriviális megoldása, ha

$$|A| = 0.$$

Bizonyítás. Ugyanis, ha $|A| \neq 0$ akkor az előző tétel miatt az egyetlen megoldás ($b_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ miatt) az $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ triviális megoldás. Ha viszont $|A| = 0$, akkor a homogén rendszer megoldásainak altere (a 2. Tétel miatt) legalább egy dimenziós, így van benne nemzérus vektor. □

A Cramer szabály alkalmazása tetszőleges lineáris egyenletrendszer megoldására

Cramer szabály *segítségével tetszőleges lineáris egyenletrendszert is megoldhatunk* az alábbi módon. Tekintsük a

$$Ax = b \quad (A \in \mathcal{M}_{k\times n}, x \in \mathcal{M}_{n\times 1},\ b \in \mathcal{M}_{k\times 1})$$

k egyenletből álló n ismeretlent tartalmazó rendszert, mely megoldható, azaz a

$$\text{rang}A = \text{rang}(A \,|\, b),$$

jelölje az itt szereplő rangok közös értékét r, akkor

$$r \leq \min\{k, n\}.$$

Keressük meg A *rangmeghatározó aldeterminánsát*, azaz válasszuk ki a mátrix r sorát és r oszlopát, úgy, hogy az ezekből alkotott determináns nem zérus.

Vegyük azokat az egyenleteket melyek a kiválasztott soroknak felelnek meg, ezek baloldalán csak azokat az ismeretleneket hagyjuk meg, melyeknek megfelelő oszlopokat kiválasztottuk (a többi ismeretlent az egyenlet jobboldalára vigyük át). A rangfeltétel miatt az elhagyott egyenletek a kiválasztott r darab egyenletből (lineárisan) kombinálhatók így azok elhagyhatók. A kapott szabályos egyenletrendszerre (r egyenlet, r ismeretlen) a Cramer szabály alkalmazható, a rendszerünkben szereplő ismeretleneket a jobboldalon szereplő, tetszőlegesnek vehető ismeretlenek, és a megfelelő szabad tagok lineáris kombinációjaként kapjuk meg a Cramer szabály által.

Ebből az eljárásból az is következik, hogy *ha a rendszerünk homogén és $r < n$ akkor a megoldások $n - r$ dimenziós alteret alkotnak,* ugyanis minden $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ megoldás $n - r$ darab (lineárisan független) $u_1, \ldots u_{n-r}$ oszlopvektor lineáris kombinációja, ahol mindegyik u_j vektor olyan, hogy a kiválasztott r darab sorban (a Cramer szabály által kiszámolt) meghatározott konstansok állnak, a ki nem választott $n-r$ darab sorban pedig a 0 vagy 1 számok, úgy, hogy mindegyik vektorban egyetlen 1 van a többi érték 0.

Példák. 1.

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = b_1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = b_2 \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & = b_3 \end{array}$$

Itt a rendszer determinánsa

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

így egyértelműen megoldható, és a megoldások

$$x_1 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} b_1 & 1 & 2 \\ b_2 & -1 & 2 \\ b_3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-6b_1 - 2b_2 + 4b_3}{6}$$

$$x_2 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 2 \\ 2 & b_2 & 2 \\ 4 & b_3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-4b_2 + 2b_3}{6}$$

$$x_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & b_2 \\ 4 & 1 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{6b_1 + 3b_2 - 3b_3}{6}.$$

2. Egyenletrendszerünk most

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & = -1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = -4 \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = -2 \\ 7x_1 & +x_2 & +8x_3 & +5x_4 & = -7 \\ 8x_1 & +2x_2 & +10x_3 & +6x_4 & = -8 \end{array} .$$

A rendszer mátrixa, és a bővített mátrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 8 & 5 \\ 8 & 2 & 10 & 6 \end{pmatrix} \qquad (A \,|\, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 7 & 1 & 8 & 5 & -7 \\ 8 & 2 & 10 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

a rangok

$$\operatorname{rang} A = 3, \qquad \operatorname{rang} (A \,|\, b) = 3,$$

így rendszerünk megoldható. *Rangmeghatározó determináns*nak a *bal felső* 3×3 *sarokdeterminánst* vehetjük. *Az utolsó két egyenlet elhagyható* (könnyű látni, hogy a negyedik egyenlet az előző három egyenlet összege, az ötödik egyenlet az első egyenlet kétszerese plusz a második és harmadik egyenlet). *A rangmeghatározó determinánsban nem szereplő* x_4 *ismeretlent* a jobboldalra rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = -1 - x_4 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = -4 - 2x_4 \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & = -2 - 2x_4 \end{array} .$$

Ezt a Cramer szabállyal megoldva (felhasználva az előző példa eredményét $b_1 = -1 - x_4, b_2 = -4 - 2x_4, b_3 = -2 - 2x_4$-szel) kapjuk, hogy rendszerünk minden megoldása

$$x_1 = -(-1 - x_4) - \frac{1}{3}(-4 - 2x_4) + \frac{2}{3}(-2 - 2x_4) = 1 + \frac{1}{3}x_4,$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}(-4 - 2x_4) + \frac{1}{3}(-2 - 2x_4) = 2 + \frac{2}{3}x_4,$$

$$x_3 = (-1 - x_4) + \frac{1}{2}(-4 - 2x_4) - \frac{1}{2}(-2 - 2x_4) = -2 - x_4$$

alakú, ahol x_4 *tetszőleges.*