Numerikus módszerek 1. **2. ZH megoldása** **2010. december 14.**

Programtervező informatikus Bsc szak

1.

$$\|\mathbf{Dx}\| = \|(d_{ii}x_i)_{i=1}^n\| \le (\max_{i=1}^n |d_{ii}|)\cdot\|\mathbf{x}\| \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\mathbf{Dx}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \max_{i=1}^n |d_{ii}|$$

Innen (2 pont)

$$\|\mathbf{D}\| \le \max_{i=1}^n |d_{ii}|$$

Keressünk olyan $\mathbf{x}$ vektort, melyre az egyenlőség teljesül.
Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{e_p}$, ahol $|d_{pp}| = \max_{i=1}^n |d_{ii}|$. Ekkor

$$\frac{\|\mathbf{Dx}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{|d_{pp}|\cdot\|\mathbf{e_p}\|}{\|\mathbf{e_p}\|} = |d_{pp}|.$$

Tehát indukált mátrixnorma esetén (1 pont)

$$\|\mathbf{D}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Dx}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{i=1}^n |d_{ii}| = |d_{pp}|.$$

2. Az $\mathbf{A}$ mátrix inverze

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = 4, \quad \|\mathbf{A^{-1}}\|_1 = \frac{1}{4}\cdot 8 = 2 \quad \Rightarrow \quad cond_1(\mathbf{A}) = 4\cdot 2 = 8$$

(4 pont)

Az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, a 2-es kondíciószámhoz számítsuk ki a sajátértékeit.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2-1]-(2-\lambda) = \\ &= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2-2] = (2-\lambda)[\lambda^2-4\lambda+2] = 0 \end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{8}}{2} = 2\pm\sqrt{2}.$$

$$cond_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2}$$

(4 pont)

3. a) Először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\ &= -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk.

$$\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty = \frac{1}{2} = q < 1$$

(2 pont)

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. A konvergenciát tanult konvergencia tételre hivatkozva is bizonyíthatjuk, ekkor az $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns tulajdonságára hivatkozhatunk. (1 pont)

b) Az iteráció hibabecslése (1 pont)

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty$$

c) Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$-ból indulva. A Jacobi-iteráció vektoros alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{c}_{J(1)},$$

ahol

$$\mathbf{B}_{J(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{J(1)} = \mathbf{D^{-1}b} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c}_{J(1)} = \mathbf{c}_{J(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

A hibabecsléshez számítsuk ki a hiányzó mennyiséget:

$$\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{J(1)} - \mathbf{0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{J(1)}\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 10^{-3}$$

$$1000 \leq 2^k \quad \Rightarrow \quad k \geq 10$$

(3 pont)

4. a) Először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U} = \\ &= -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Megkaptuk az átmenetmátrixot, a konvergencia elégséges feltételét elegendő megvizsgálnunk.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty = \frac{1}{2} = q < 1$$

(3 pont)

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. A konvergenciát tanult konvergencia tételre hivatkozva is bizonyíthatjuk, ekkor az **A** szigorúan diagonálisan domináns vagy szimmetrikus és pozitív definit tulajdonságára hivatkozhatunk. (1 pont)

b) Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$-ból indulva. A Gauss–Seidel-iteráció koordinátás alakja 2×2-es mátrix esetén

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_{11}} \cdot \left(a_{12} \cdot x_2^{(0)} - b_1\right) \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{a_{22}} \cdot \left(a_{21} \cdot x_1^{(1)} - b_2\right). \end{aligned}$$

Most

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -\frac{1}{2} \cdot \left(x_2^{(0)} - 1\right) = \frac{1}{2} \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{2} \cdot \left(x_1^{(1)} + 1\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

c) A hibabecsléshez számítsuk ki a hiányzó mennyiséget:

$$\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{S(1)} - \mathbf{0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{S(1)}\|_\infty = \frac{3}{4}.$$

Az iteráció hibabecslése

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \le \frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(3 pont)

5. a) A Richardson-iteráció tanult konvergencia tételét használjuk a megoldáshoz.
A tétel szerint szimmetrikus és pozitív definit **A** mátrixra az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció pontosan a $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. Ahol

$$0 < m = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n = M$$

az **A** mátrix sajátértékei.
Látjuk, hogy a feladat megoldásához az **A** mátrix sajátértékeit ismernünk kell. A 2. feladatban már meghatároztuk az **A** sajátértékeit. Ezek nagyság szerinti sorrendbe rendezve

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}.$$

A tételben szereplő jelöléseket használva

$$m = 2 - \sqrt{2}, \quad M = 2 + \sqrt{2}.$$

Tehát az iteráció a $p \in (0; \frac{2}{2+\sqrt{2}})$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. (2 pont)

b) Az optimális paraméter a tétel szerint

$$p_0 = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ezen paraméter mellett az átmenetmátrix spektrálsugara a tétel állítása szerint

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \frac{M-m}{M+m} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel $\mathbf{B_{p_0}}$ szimmetrikus, ezért

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \|\mathbf{B_{p_0}}\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = q$$

a kontrakciós együttható a 2-es vektornormában. (3 pont)

6. A **B** mátrix J-re illeszkedő faktorizációját határozzuk meg, azaz a

$$\mathbf{B} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q}$$

alakot, ahol $\mathbf{J} = \{(2,1), (2,3)\}$ a pozícióhalmaz. Ez az alábbi pozíciókat jelenti.

$$\begin{bmatrix} & & \\ * & & * \\ & & \end{bmatrix}$$

1. lépés: A **B** mátrix szétbontása a pozicióhalmaz első sora és oszlopa alapján, majd eliminálás az 1. oszlopban.

$$\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{1} = \mathbf{B} = \mathbf{P_1} - \mathbf{Q_1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

$$\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{2} = \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-et megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_1^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk. $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

2. lépés: Az $\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{2}$ mátrix szétbontása a pozicióhalmaz második sora és oszlopa alapján, majd eliminálás a 2. oszlopban.

$$\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{P_2} - \mathbf{Q_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_2}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_2}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 2. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_2}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_2}$-vel, a $\mathbf{P_2}$ második oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_2^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_2}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a második oszlopának diagonális alatti elemeit $p_{22}^{(2)}$-vel leosztjuk. Ezután fel tudjuk írni a kívánt alakot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{L_1^{-1} L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U} &= \widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q} &= \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

7. Az $f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$ megoldását az $x_{k+1} = \frac{x_k^3+1}{4}$ iterációval keressük.
Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \frac{x^3+1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x + 1 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát.

a) Keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. A $[0;1]$ intervallum jó választás, mert

$$\begin{aligned} f(0) = (0)^3 - 4\cdot 0 + 1 &= 1 > 0 \\ f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 + 1 &= -2 < 0, \end{aligned}$$

így a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.
A $\varphi(x) = \frac{x^3+1}{4}$ függvény a $[0;1]$ intervallumot $[0;1]$-be képezi?
Mivel φ szigorúan monoton növő függvény ($f'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$), ezért

$$\varphi([0;1]) = [\varphi(0)\,;\varphi(1)] = \left[\frac{1}{4}\,;\,\frac{2}{4}\right] \subset [0;1].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció a $[0;1]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$\varphi'(\xi) = \frac{3}{4}\xi^2 \le \frac{3}{4} = q, \quad \xi \in [0;1].$$

Tehát φ kontrakció $[0;1]$-en. A sorozat konvergenciáját a fixponttétel garantálja.

c) A hibabecslés a fixponttételből $x_0 \in [0\,;1]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \underbrace{|x_0 - x^*|}_{\le 1} \le \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$