

Név _____

ETR kód _____

Gyak.vez. neve, csop. száma _____

1. Igazoljuk, hogy \mathbf{D} diagonális mátrix és $\|\cdot\|$ indukált mátrixnorma esetén

$$\|\mathbf{D}\| = \max_{i=1}^n |d_{ii}|.$$

(3 pont)

2. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix kondíciós számát az 1-es és 2-es mátrixnormában! (8 pont)

3. Az $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Jacobi-iterációt!

a) Bizonyítsuk a konvergenciát!

b) Írjuk fel a hibabecslését!

c) Hány lépést kell tennünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez, ha $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$?

(7 pont)

4. Az $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Gauss–Seidel-iterációt!

a) Bizonyítsuk a konvergenciát!

b) Számítsuk ki \mathbf{x}_1 -et a koordinátás alakjában, ha $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$!

c) Írjuk fel a hibabecslését!

(7 pont)

5. Az $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Richardson-iterációt!

a) Pontosan mely p paraméter értékekre konvergens?

b) Mi az optimális paraméter és mennyi ekkor a kontrakciós együttható?

(5 pont)

6. Mi lesz a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix $J = \{(2, 1), (2, 3)\}$ pozícióhalmazra illeszkedő részleges

LU -felbontása? Határozzuk meg az \mathbf{L} , \mathbf{U} és \mathbf{Q} mátrixokat!

(5 pont)

7. Az $x^3 - 4x + 1 = 0$ megoldását az $x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 1}{4}$ iterációval keressük!

a) Adjunk meg egy intervallumot, amely kezdőértékek esetén a iteráció konvergens.

b) Bizonyítsuk a konvergenciát!

c) Írjuk fel a hibabecslését!

(5 pont)