Analízis 2. (BSc) **2. Zárthelyi** **2010. december 8.**

Programtervező informatikus szak

1. feladat. *Bizonyítsa be, hogy az $f(x) := x + \ln x$ ($x \in (0, +\infty)$) függvény invertálható és számítsa ki $\left(f^{-1}\right)'(1+e)$-et.*

Megoldás. Az f függvény deriválható a $(0, +\infty)$-en, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ $(x > 0)$; f tehát szigorúan monoton növekedő $(0, +\infty)$-en, következésképpen invertálható. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján f^{-1} minden y $(= f(x)) \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ $(= \mathcal{R}_f)$ pontban deriválható és

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}, \quad y = f(x)).$$

Az $y = f(x) = x + \ln x$ egyenletből x nem fejezhető ki explicit módon, ezért $x = f^{-1}(y)$-ra explicit képlet nem adható meg. A feladat azonban csak az $y = 1 + e$ pontban kérdezi $\left(f^{-1}\right)'$-t. Nem nehéz *észrevenni*, hogy az

$$1 + e = x + \ln x$$

egyenletnek $x = e$ egy megoldása, és f szigorú monotonitása miatt ez az egyetlen megoldás. Ezért

$$\left(f^{-1}\right)'(1+e) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{e}} = \frac{e}{1+e}. \quad \blacksquare$$

2. feladat. *Döntse el, hogy léteznek-e az alábbi határértékek. Ha igen, akkor számítsa is ki azokat.*

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$, (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$.

Megoldás. (a) Mivel $\cos x > 0$, ha (például) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ezért az ilyen x-ekre

$$(1) \qquad \left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(e^{\ln \cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln \cos x}{x^2}}.$$

Először a kitevő határértékét vizsgáljuk:

$$\lim_{x \to 0} \ln \cos x = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 0} x^2 = 0,$$

ezért $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó; a L'Hospital szabály most alkalmazható:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2x} =$$

$\Big(\frac{0}{0}$ típusú kritikus határérték, a L'Hospital szabály most is alkalmazható$\Big)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Az (1) kitevőjének a 0 pontban a határértéke tehát $-\frac{1}{2}$. Mivel az *exponenciális függvény folytonos a* $-\frac{1}{2}$ *pontban*, ezért

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\ln \cos x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \lim_{x \to 0} \left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}. \quad \blacksquare$$

(b) $\frac{12}{0}$ típusú határértékről van szó. A nevező pozitív és negatív is lehet (v.ö. $\frac{1}{x}$-szel a 0-ban!); ezért a L'Hospital szabály *most nem alkalmazható.*

Először átalakítjuk a kifejezést:

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+3}{x-1}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x+3}{x-1} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x+3}{x-1} = -\infty,$$

ezért a szóban forgó határérték nem létezik. ■

3. feladat. *Írja fel az $f(x) := (x+1)^2 \ln(x+1)$ $(x > -1)$ függvények a 0 pont körüli harmadfokú Taylor-polinomját, és határozza meg, hogy a $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt.*

Megoldás. Az f függvény akárhányszor deriválható, és minden $x \in \mathcal{D}_f = (-1, +\infty)$ pontban

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2(x+1)\ln(x+1) + (x+1)^2 \cdot \frac{1}{x+1} = (x+1)\big(2\ln(x+1)+1\big),\\
f''(x) &= \big(2\ln(x+1)+1\big) + (x+1)\cdot\frac{2}{x+1} = 2\ln(x+1)+3,\\
f'''(x) &= \frac{2}{x+1},\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{2}{(x+1)^2};
\end{aligned}$$

ezért

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 3, \qquad f'''(0) = 2.$$

Az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomja:

$$\big(T_{3,0}f\big)(x) = f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \tfrac{f'''(0)}{3!}x^3 = x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk a Lagrange-féle maradéktaggal: minden $x \in \big[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\big]$ ponthoz létezik olyan 0 és x közötti ξ (tehát $|\xi| \le |x| \le \frac{1}{10}$), hogy

$$\big|f(x) - \big(T_{3,0}f\big)(x)\big| = \left|\frac{f^4(\xi)}{4!}x^4\right| = \frac{\frac{2}{(1+\xi)^2}}{4!}|x|^4 \le \frac{10^{-4}}{12}\cdot\frac{1}{(\xi+1)^2} \le \frac{10^{-4}}{12}\cdot\frac{1}{\left(\frac{9}{10}\right)^2} = \frac{10^{-2}}{12\cdot 81}.$$

Ezért

$$\Big|(x+1)^2\ln(x+1) - \big(x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\big)\Big| \le \frac{10^{-2}}{12\cdot 81},$$

ha $-\frac{1}{10} \le x \le \frac{1}{10}$. ■

4. feladat. *Határozza meg az $f(x) := (x-1)^2(x+2)^2$ $\big(x \in [-1,2]\big)$ függvény abszolút szélsőértékeit.*

Megoldás. Az f függvény polinom, ezért *folytonos* a korlátos és zárt $[-1,2]$ intervallumon. Weierstrass tétele miatt van abszolút maximuma és abszolút minimuma. Az abszolút szélsőértékhelyek az intervallum belsejében – vagyis a $(-1,2)$ intervallumban

– vannak (az ilyen helyek nyilván egyúttal lokális szélsőértékhelyek is) vagy pedig az intervallum végpontjaiban.

Először a $(-1, 2)$-be eső *lokális szélsőértékhelyeket* határozzuk meg: Mivel

$$f'(x) = 2(x-1)(x+2)^2 + 2(x-1)^2(x+2) = 2(x-1)(x+2)(2x+1),$$

ezért a $(-1, 2)$ intervallumban az $x_1 = 1$ és az $x_2 = -\frac{1}{2}$ pontban *lehetnek* lokális szélsőértékek. Az $x_1 = 1$ helyen a derivált előjelet vált (negatívból megy pozitívba), ezért ez *lokális minimumhely* és $f(1) = 0$ a lokális minimum értéke. Az $x_2 = -\frac{1}{2}$-ben a derivált pozitívból megy negatívba, ezért itt *lokális maximumhely* van és $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{16}$ a lokális maximum értéke.

A végpontokban $f(-1) = 4$ és $f(2) = 16$, ezért a függvény *abszolút minimumhelye* az 1 pont, az *abszolút minimuma* pedig $f(1) = 0$. Az *abszolút maximumhelye* a 2 pont, az *abszolút maximuma* pedig $f(2) = 16$. ■

5. feladat. *Teljes függvényvizsgálat elvégzése után vázolja az*

$$f(x) := x + 2 - \frac{4x}{1+x^2} \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)$$

függvény grafikonját.

Megoldás. *Előzetes vizsgálatok:* Az f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható (akárhányszor is!).

Monotonitás és lokális szélsőértékek:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{1+x^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 - 3}{(1+x^2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \iff x^4 + 6x^2 - 3 = 0 \iff 0 \le x^2 = 2\sqrt{3} - 3$$

$$\iff x = \sqrt{2\sqrt{3} - 3} =: x_1, \quad x = -\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = -x_1.$$

A számlálóban egy másodfokúra visszavezethető kifejezés áll, ennek előjeleit figyelembe véve kapjuk, hogy
$f'(x) > 0$ a $(-\infty, -x_1)$ *intervallumon*, ezért itt f szigorúan monoton növekedő;
$f'(x) < 0$ az $(-x_1, x_1)$ *intervallumon*, ezért f ezen szigorúan monoton csökkenő;
$f'(x) > 0$ az $(x_1, +\infty)$ *intervallumon*, ezért itt f szigorúan monoton növekedő.
Az f függvénynek $-x_1$-ben tehát *lokális maximuma*, x_1-ben pedig *lokális minimuma* van.

Konvexitás, inflexió:

$$f''(x) = (-4)\cdot(-1)\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{16x}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2\cdot(-2)\cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{24x}{(1+x^2)^2} - \frac{32x^3}{(1+x^2)^3} =$$
$$= \frac{8x(3-x^2)}{(1+x^2)^3};$$

$$f''(x) = 0 \iff x = 0,\ x = \sqrt{3} =: x_2,\ x = -\sqrt{3} = -x_2.$$

Világos, hogy $x_1 = \sqrt{2\sqrt{3} - 3} < \sqrt{3} = x_2$.

$f''(x) > 0$ a $(-\infty, -x_2)$ intervallumon, ezért itt a függvény szigorúan konvex;
$f''(x) < 0$ az $(-x_2, 0)$ intervallumon, ezért a függvény ezen szigorúan konkáv;
$f''(x) > 0$ a $(0, x_2)$ intervallumon, ezért itt a függvény szigorúan konvex;
$f''(x) < 0$ az $(x_2, +\infty)$ intervallumon, ezért a függvény ezen szigorúan konkáv.

A $-x_2 = -\sqrt{3}$, az $x_0 = 0$ és az $x_2 = \sqrt{3}$ pont tehát inflexiós pont.

A határértékeket $(\pm\infty)$-ben kell megvizsgálni:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2 + x - \frac{4x}{1+x^2}\right) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(2 + x - \frac{4x}{1+x^2}\right) = -\infty.$$

Aszimptoták:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x} + 1 - \frac{4}{1+x^2}\right) = 1 = A = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

és

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{4x}{1+x^2}\right) = 2 = B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - 1\cdot x)$$

és ez azt jelenti, hogy az $y = 1\cdot x + 2 = x + 2$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben is.

Az eddigieket összefoglalva az f képe: