Analízis 2. (BSc) **A 2. zh témakörei** **2010. december**

Programtervező informatikus szak

1. feladat. *Bizonyítsa be, hogy az* $f(x) := x + e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ *függvény invertálható,* $f^{-1} \in D^2$*, és számítsa ki* $\big(f^{-1}\big)''(1)$*-et.*

Megoldás. Az f függvény deriválható $\mathbb{R}$-en, $f'(x) = 1 + e^x > 0$ $(x \in \mathbb{R})$; f tehát szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}$-en, következésképpen invertálható. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján f^{-1} minden $y\ (= f(x)) \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\ (= \mathcal{R}_f)$ pontban deriválható és

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} = \left(\frac{1}{f' \circ f^{-1}}\right)(y) \qquad (y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}).$$

Az összetett függvény deriválási szabálya alapján $(f'(x) \neq 0)$ az $\frac{1}{f \circ f^{-1}}$ függvény deriválható és

$$\left(\frac{1}{f' \circ f^{-1}}\right)' = -\frac{1}{\big(f' \circ f^{-1}\big)^2} \cdot \big(f' \circ f^{-1}\big)' =$$

$$= -\frac{\big(f'' \circ f^{-1}\big) \cdot \big(f^{-1}\big)'}{\big(f' \circ f^{-1}\big)^2} = -\frac{f'' \circ f^{-1}}{\big(f' \circ f^{-1}\big)^3}.$$

f^{-1} tehát kétszer deriválható és minden $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ $(y = f(x))$ pontban

$$\big(f^{-1}\big)''(y) = \left(-\frac{f'' \circ f^{-1}}{\big(f' \circ f^{-1}\big)^3}\right)(y) = -\frac{f''\big(f^{-1}\big)(y)}{\Big(f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big)^3} = -\frac{f''(x)}{\big(f'(x)\big)^3}.$$

Az $y = f(x) = x + e^x$ egyenletből x nem fejezhető ki explicit módon, ezért $x = f^{-1}(y)$-ra explicit képlet nem adható meg. A feladat azonban csak az $y = 1$ pontban kérdezi $\big(f^{-1}\big)''$-t. Nem nehéz *észrevenni*, hogy az

$$(1 =)\, y = x + e^x\, (= f(x))$$

egyenletnek $x = 0$ egy megoldása, és f szigorú monotonitása miatt ez az egyetlen megoldás. Ezért

$$\big(f^{-1}\big)''(1) = -\frac{f''(0)}{\big(f'(0)\big)^3} = -\frac{\big(e^x\big)_{x=0}}{\big(1 + e^x\big)^3_{x=0}} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}.$$

2. feladat. *Döntse el, hogy léteznek-e az alábbi határértékek. Ha igen, akkor számítsa is ki azokat.*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 2x - 3}$.

Megoldás. (a) Mivel $\frac{1}{x} > 0$, ha $x > 0$, ezért

(1) $$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \left(e^{\ln \frac{1}{x}}\right)^{\sin x} = e^{(-\ln x)\cdot \sin x} \qquad (x > 0).$$

Először a kitevő határértékét vizsgáljuk:

$$\lim_{x\to 0+0} (-\ln x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} \sin x = \sin 0 = 0,$$

ezért $0 \cdot (+\infty)$ típusú kritikus határértékről van szó; a L'Hospital szabály most alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0+0} (-\ln x)\cdot \sin x = \lim_{x\to 0+0} \frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}} =$$

$$\Big(\tfrac{+\infty}{+\infty} \text{ típusú kritikus határérték, a L'Hospital szabály most is alkalmazható}\Big)$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{-\dfrac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot \cos x} = \lim_{x\to 0+0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{\cos x}.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ és $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x}{\cos x} = 0$, ezért

$$\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{\cos x} = 0.$$

Az (1) kitevőjének a 0 pontban a jobb oldali határértéke tehát 0. Mivel az *exponenciális függvény folytonos a* 0 *pontban* és $e^0 = 1$, ezért

$$\lim_{x\to 0+0} e^{(-\ln x)\cdot \sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(-\ln x)\cdot \sin x} = e^0 = 1 = \lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}. \qquad \blacksquare$$

(b) $\frac{-16}{0}$ típusú határértékről van szó. A nevező pozitív és negatív is lehet (v.ö. $\frac{1}{x}$-szel a 0-ban!); ezért a L'Hospital szabály *most nem alkalmazható.*

Először átalakítjuk a kifejezést:

$$\frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3} = \frac{(x+7)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+7}{x+3}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -3+0} \frac{x+7}{x+3} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -3-0} \frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -3-0} \frac{x+7}{x+3} = -\infty,$$

ezért a szóban forgó határérték nem létezik. $\blacksquare$

3. feladat. *Írja fel az* $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ $(x > -1)$ *függvény* 0 *pont körüli másodfokú Taylor-polinomját, és határozza meg, hogy a* $[0, \frac{1}{10}]$ *intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt.*

Megoldás. Az f függvény akárhányszor deriválható, és minden $x \in \mathcal{D}_f = (-1, +\infty)$ pontban

$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(1+x)^{-4/3}, \quad f''(x) = \tfrac{4}{9}(1+x)^{-7/3}, \quad f'''(x) = -\tfrac{28}{27}(1+x)^{-10/3},$$

ezért

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = -\tfrac{1}{3}, \qquad f''(0) = \tfrac{4}{9}.$$

Az f függvény 0 ponthoz tartozó másodfokú Taylor-polinomja:

$$\big(T_{2,0}f\big)(x) = f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{9}x^2.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk a Lagrange-féle maradéktaggal: minden $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ ponthoz létezik olyan 0 és x közötti ξ (tehát $0 < \xi < x \leq \frac{1}{10}$), hogy

$$\left|f(x) - \big(T_{2,0}f\big)(x)\right| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3\right| = \frac{\frac{28}{27} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{1+\xi})^{10}}}{3!}|x|^3 \leq \frac{28}{27} \cdot \frac{1}{6} \cdot |x|^3 = \frac{14}{81} \cdot |x|^3 \leq \frac{14}{81} \cdot \frac{1}{10^3}.$$

Ezért

$$\left|\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} - \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}\right)\right| \leq \frac{14}{81} \cdot \frac{1}{10^3},$$

ha $0 \leq x \leq \frac{1}{10}$. ■

4. feladat. *Határozza meg az* $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ $\big(x \in [-1, 5]\big)$ *függvény abszolút szélsőértékeit.*

Megoldás. Az f függvény polinom, ezért *folytonos* a korlátos és zárt $[-1, 5]$ intervallumon. Weierstrass tétele miatt van abszolút maximuma és abszolút minimuma. Az abszolút szélsőértékhelyek az intervallum belsejében – vagyis a $(-1, 5)$ intervallumban – vannak (az ilyen helyek nyilván egyúttal lokális szélsőértékhelyek is) vagy pedig az intervallum végpontjaiban.

Először a $(-1, 5)$-be eső *lokális szélsőértékhelyeket* határozzuk meg: Mivel

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1)$$

és

$$f''(x) = 12x + 6, \qquad f''(1) = 18 > 0,$$

ezért a $(-1, 5)$ intervallumban az $x = 1$ pont az egyetlen lokális szélsőértékhely, éspedig lokális minimumhely és $f(1) = -6$.

A végpontokban $f(-1) = 14$ és $f(5) = 266$, ezért a függvény *abszolút minimumhelye* az 1 pont, az *abszolút minimuma* pedig $f(1) = -6$. Az *abszolút maximumhelye* az 5 pont, az *abszolút maximuma* pedig $f(5) = 266$. ■

5. feladat. *Teljes függvényvizsgálat elvégzése után vázolja az*

$$f(x) := e^{\frac{1}{1-x}} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$$

függvény grafikonját.

Megoldás. Mivel $f(x) > 0$ minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén, ezért f grafikonja az első- és a második síknegyedben van.

Az f függvény akárhányszor (is) deriválható, és minden $x \in \mathcal{D}_f$ pontban

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}}, \qquad f''(x) = \frac{3-2x}{(1-x)^4}e^{\frac{1}{1-x}}.$$

$f'(x) > 0$ a $(-\infty, 1)$ *intervallumon* (!), ezért itt f szigorúan monoton növekedő;
$f'(x) > 0$ az $(1, +\infty)$ *intervallumon* is, ezért f ezen is szigorúan monoton növekedő.
Az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke, mert $f'(x) \neq 0$ $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$ pontban.

$f''(x) > 0$ a $(-\infty, 1)$ intervallumon, ezért itt a függvény szigorúan konvex;
$f''(x) > 0$ az $(1, \frac{3}{2})$ intervallumon is, ezért a függvény ezen is szigorúan konvex;
$f''(x) < 0$ a $(\frac{3}{2}, +\infty)$ intervallumon, ezért itt a függvény szigorúan konkáv, és az $x = \frac{3}{2}$ inflexiós pont.

A határértékeket $(\pm\infty)$-ben és az 1 pontban kell megvizsgálni:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to 0-0} e^{y} = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to 0+0} e^{y} = 1;$$

$$\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty.$$

Aszimptoták:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{x} = 0;$$

és

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0\cdot x = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 0\cdot x = 1,$$

és ez azt jelenti, hogy az $y = 0\cdot x + 1 = 1$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben is.

Az $x = 1$ helyen jobbról a görbe érintője az x tengely, mert $x \to 1+0$ esetén $f'(x) \to 0$:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = \text{ (L'Hospital) } = \lim_{y\to+\infty} \frac{2y}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2}{e^y} = 0.$$