EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

NUMERIKUS MÓDSZEREK PÉLDATÁR

Bozsik József, Krebsz Anna

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ

Jelen példatár hiánypótló a maga nemében. A Numerikus módszerek témakörében számtalan színvonalas tankönyv és jegyzet látott már napvilágot, de a gyakorlatokon is használható példatár eddig nem volt, mely segíti az órai munkát és a zárthelyi dolgozatokra való önálló felkészülést. Igazán akkor lehet megérteni egy módszert, ha azt konkrét feladatokra alkalmazzuk. Ebben kívánunk segítséget nyújtani a példatárban összegyűjtött feladatok és azok megoldásainak segítségével. Ezt a feladat- és megoldásgyűjteményt elsősorban az ELTE IK Programtervező informatikus BSc, Informatika tanár BSc és TTK Matematika tanár BSc szakos hallgatóinak ajánljuk. Természetesen azok is haszonnal forgathatják, akik segítséget szeretnének kapni a numerikus módszerek gyakorlati alkalmazásaihoz. A példatárat ajánljuk még azok számára, akik a numerikus módszerek alapjaival feladatokon keresztül szeretnének megismerkedni.

A példatárat az ELTE-n oktatott, korábban Numerikus Analízis elnevezésű tárgy tematikáját követve építettük fel. Mivel a tárgy neve és témakörei is változtak, ezért a korábbi bővebb tematika alapján dolgoztunk, arra gondolva, hogy bizonyos részekre az MSc-s hallgatóknak lehet szükségük. Minden témakör az elméleti anyag mélyebb megértése mellett hozzásegíti az olvasót a feladatok mögött meghúzódó technikák és trükkök elsajátításához is. A példatár elkészítése során a gyakorlati szempontokat is figyelembe véve törekedtünk az egyszerű példáktól az összetett és bonyolult számításokat tartalmazó példákig minél szélesebb feladatkört bemutatni. Természetesen helyet kaptak elméleti jellegű és mélyebb absztrakciót igénylő feladatok is. A feladatmegoldások elkészítése során törekedtünk a minél érthetőbb és minél részletesebb leírásokra, esetenként többféle megoldást is adtunk. A több éves sikeres oktatási gyakorlatból kikristályosodott és letisztult példák mellett számtalan új példa is belekerült az anyagba. A feladatok fejezetenként sorszámozottak. Minden fejezet két alfejezetre bomlik, egyikben a feladatok, a másikban azok megoldásai találhatóak, így a feladatok szövege után csak néhány oldalt kell lapozni a megoldásokig. Célunk ezzel az volt, hogy az egyes fejezetek önállóan is használhatóak legyenek.

Ezúton szeretnénk köszönetet mondani Dr. Szili Lászlónak, a technikai problémák megoldásában nyújtott segítségéért és Dr. Hegedűs Csabának, aki ötletes és gondolkodtató példáival járult hozzá a példatárhoz. Köszönjük Dr. László Lajos lelkiismeretes lektori munkáját és értékes tanácsait. Továbbá köszönjük az ELTE Numerikus Analízis Tanszékének és az ELTE Informatikai Karának a példatár létrejöttéhez nyújtott támogatását.

Ajánljuk kedves családtagjainknak, akik türelmükkel és segítségükkel hozzájárultak a példatár létrejöttéhez. Halálának 5. évfordulóján Dr. Sövegjártó András emlékének ajánljuk, aki halhatatlan érdemeket szerzett az általa oly kedvelt és szeretett tárgy, a Numerikus Analízis oktatása során.

A példatárban található példák megoldásához kellemes és hasznos időtöltést kívánunk!

Budapest, 2010. november 2.

Krebsz Anna, Bozsik József

1. fejezet

VEKTOR- ÉS MÁTRIXNORMÁK, KONDÍCIÓSZÁM

1.1. Feladatok

1.1.1. Vektornormák

1. Számítsuk ki az alábbi vektor 1-es, 2-es és ∞ vektornormáját!

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi vektor 1-es, 2-es és ∞ vektornormáját!

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. Mutassuk meg, hogy $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ vektornormák ekvivalens vektornormák!

4. Mutassuk meg, hogy $\|.\|_2$ és $\|.\|_\infty$ vektornormák ekvivalens vektornormák!

5. Mutassuk meg, hogy $\|.\|_1$ és $\|.\|_2$ vektornormák ekvivalens vektornormák!

6. Írjuk fel az $\|.\|_1$ vektornorma által indukált mátrixnormát!

1.1.2. Mátrixnormák

7. Legyen $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{nxn}$ invertálható mátrix és $\|.\|_v$ egy vektornorma.

a) Igazoljuk, hogy $\|\mathbf{x}\|_T := \|\mathbf{Tx}\|_v$ vektornormát definiál!

b) Írjuk fel a $\|.\|_T$ vektornorma által indukált mátrixnormát! Mi a kapcsolat a $\|.\|_v$ által indukált mátrixnormával?

8. Számoljuk ki az alábbi A mátrix $1, 2$ és ∞ mátrixnormáit!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Számoljuk ki az alábbi A mátrix $1, 2$ és ∞ mátrixnormáit!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

10. Számoljuk ki az alábbi A mátrix $1, 2$ és ∞ mátrixnormáit!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

11. Igaz-e, hogy a *Frobenius* mátrixnorma indukált mátrixnorma?

12. Adjunk meg egy mátrixot, melynek a *Frobenius* mátrixnormája egyenlő az $\mathbf{x} = (\,1\,)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ csak egyesekből álló vektor 2-es vektornormájával?

13. Igazoljuk, hogy bármely mátrixnormára és $\forall\ \mathbf{A} \in \mathbb{K}^{nxn}$ mátrixra igaz, hogy a spektrálsugár kisebb egyenlő bármely normánál, azaz

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\| \ \ !$$

14. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ normális mátrix, akkor

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}) = \max |\lambda_i(\mathbf{A})| \ \ !$$

15. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{Q} \in \mathbb{K}^{nxn}$ unitér mátrix, akkor igazak a következő állítások.

a) $\|\mathbf{Qx}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$.

b) $\|\mathbf{Q}\|_2 = \|\mathbf{Q}^*\|_2 = 1$.

c) $\|\mathbf{QA}\|_2 = \|\mathbf{AQ}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2 \quad \forall\ \mathbf{A} \in \mathbb{K}^{nxn}$.

16. Bizonyítsuk be, hogy

$$\|\mathbf{A}\|_F = (tr(\mathbf{A}^*\mathbf{A}))^{\frac{1}{2}} \ \ !$$

17. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{Q}$ unitér mátrix, akkor

$$\|\mathbf{QA}\|_F = \|\mathbf{AQ}\|_F = \|\mathbf{A}\|_F \ \ !$$

18. Igazoljuk, hogy

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) \right)^{\frac{1}{2}} \ \ !$$

19. Mutassuk meg, hogy

a) a spektrálnorma és a *Frobenius* norma ekvivalensek!

b) a 2-es vektornorma és a *Frobenius* norma illeszkednek!

1.1.3. Kondíciószám

20. Számítsuk ki az alábbi **A** mátrix kondíciószámát 1-es és ∞ mátrixnorma esetén!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

21. Számítsuk ki az alábbi **A** mátrix kondíciószámát 2-es és *Frobenius* mátrixnorma esetén!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Számítsuk ki az alábbi **A** mátrix kondíciószámát $1, 2, \infty$ és *Frobenius* mátrixnorma esetén!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

23. Számítsuk ki az alábbi **A** mátrix kondíciószámát $1, 2, \infty$ és *Frobenius* mátrixnorma esetén!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

24. Igazoljuk, hogy a QR felbontással kapott feladat érzékenysége (kondícionáltsága) nem változik!

25. Igazoljuk, hogy a szimmetrikus, pozitív definit **A** mátrixra elkészített $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathbf{T}}$ Cholesky felbontás esetén

$$cond_2(\mathbf{A}) = cond_2(\mathbf{L}) \cdot cond_2(\mathbf{L}^{\mathbf{T}}) = (cond_2(\mathbf{L}))^2 \ \ !$$

Ez azt jelenti, hogy ha az eredeti $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer helyett az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{L}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ háromszögmátrixú egyenletrendszereket oldjuk meg, azzal a feladat érzékenysége nem változik!

1.2. Megoldások

1.2.1. Vektornormák

1. Számítsuk ki a megadott normákat!

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1 + 2 + |-3| = 6 \\
\|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \\
\|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i=1}^{n} |x_i| = \max\{1; 2; |-3|\} = 3
\end{aligned}$$

2. Számítsuk ki a megadott normákat!

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 5 + |-3| + 8 + 4 = 20 \\
\|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 9 + 64 + 16} = \sqrt{114} \\
\|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i=1}^{n} |x_i| = max\{5; |-3|; 8; 4\} = 8
\end{aligned}$$

3. A vektornormák ekvivalensek, ha

$$\exists\ c_1, c_2 > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{K}^n : \quad c_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_A \leq \|\mathbf{x}\|_B \leq c_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_A$$

Ennek megfelelően a feladat valójában két egyenlőtlenségre bomlik.

a) Először megmutatjuk, hogy

$$\exists\ c_1 > 0 : \quad c_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1.$$

Mivel

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

Vagyis $c_1 = 1$ választással készen is vagyunk.

b) Most vizsgáljuk meg az egyenlőtlenség másik oldalát.

$$\exists\ c_2 > 0 : \quad c_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty$$

$$\begin{aligned}
\forall\ j = 1, \cdots, n : \quad |x_j| &\leq \max_{i=1}^{n} |x_i| \\
&\Downarrow \\
\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| &\leq n \cdot \max_{i=1}^{n} |x_i| = n \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Vagyis $c_2 = n$ választással beláttuk a fenti egyenlőtlenséget.

Vagyis ezzel megmutattuk, hogy az 1-es és ∞ vektornormák ekvivalensek.

4. Az előző feladatban alkalmazott eljárást használjuk most is. Vagyis a feladatot két részfeladatra bontjuk.

a) Először megmutatjuk, hogy

$$\exists\ c_1 > 0 : \quad c_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2.$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\left(\max_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \\
&\Downarrow \\
\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \|x\|_2.
\end{aligned}$$

Vagyis $c_1 = 1$ választással kész is vagyunk.

b) Most vizsgáljuk meg az egyenlőtlenség másik oldalát.

$$\exists\ c_2 > 0: \quad c_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_\infty$$

Mivel

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |x_i|^2 &\le n \cdot \left(\max_{i=1}^n |x_i|\right)^2 \\ &\Downarrow \\ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} &\le \sqrt{n} \cdot \max_{i=1}^n |x_i| = \sqrt{n} \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

Vagyis $c_2 = \sqrt{n}$ választással beláttuk az egyenlőtlenséget.

Ezzel megmutattuk, hogy a 2-es és ∞ vektornormák ekvivalensek.

5. Az eddigieknek megfelelően most is két részre bontjuk a feladat megoldását.

a) Először megmutatjuk, hogy

$$\exists\ c_1 > 0: \quad c_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1.$$

A pozitív tagú összeg négyzetre emeléséből következik, hogy

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 &= (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)^2 = \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 + \\ &+ 2 \cdot |x_1||x_2| + \ldots + 2 \cdot |x_2||x_3| + \ldots + 2 \cdot |x_{n-1}||x_n| \ge \\ &\ge \sum_{i=1}^n |x_i|^2.\end{aligned}$$

Négyzetgyököt vonva ebből már következik a bizonyítandó állítás.

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \le \sum_{i=1}^n |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1$$

Vagyis $c_1 \ge 1$ választással kész is vagyunk az egyenlőtlenség egyik oldalával.

b) Most vizsgáljuk meg az egyenlőtlenség másik oldalát.

$$\exists\ c_2 > 0: \quad c_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_1 \le \|\mathbf{x}\|_2$$

A bizonyítást a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenséggel az

$$\widetilde{\mathbf{x}} = (\,|x_i|\,)_{i=1}^n, \quad \mathbf{e} = (\,1\,)_{i=1}^n$$

vektorokra felírva kapjuk.

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = <\widetilde{\mathbf{x}}\,;\,\mathbf{e}>^2 \le \|\widetilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \cdot \|\mathbf{e}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n 1 = n \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Innen gyökvonással $c_2 = \sqrt{n}$.

6. Induljunk ki a definícióból.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}$$

Becsüljük felülről a tört számlálóját. Használjuk közben az abszolútértékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget és cseréljük meg az összegzés sorrendjét.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(\mathbf{Ax})_i| = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\cdot|x_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j|\cdot\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq \max_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}|\cdot\sum_{j=1}^n |x_j| = \\ &= \max_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}|\cdot\|\mathbf{x}\|_1\end{aligned}$$

$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ esetén $\|\mathbf{x}\|_1$ normával végigosztva az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\frac{\|\mathbf{Ax}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} \leq \max_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy $\exists\ \mathbf{x}\in\mathbb{K}^n$, amelyre teljesül az egyenlőség.

Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{e_p}$, vagyis az $\mathbf{x}$ legyen a p. kanonikus bázis vektor, amely a p. pozícióban 1 és a többi helyen nulla. A p legyen az a sora a mátrixnak, ahol maximális lesz az elemek abszolútérték összege.

$$\sum_{i=1}^n |a_{ip}| = \max_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$$

Ebben az esetben az $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ és teljesül az egyenlőség.

$$\frac{\|\mathbf{Ax}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \|\mathbf{Ax}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ip}|$$

1.2.2. Mátrixnormák

7. **a)** Igazolnunk kell, hogy teljesülnek a vektornorma tulajdonságai. Ehhez a $\|.\|_v$ -vel jelölt vektornorma tulajdonságait használjuk fel.

1) $\|\mathbf{x}\|_T = \|\mathbf{Tx}\|_v = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{Tx} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

2) $\|\lambda\mathbf{x}\|_T = \|\lambda\mathbf{Tx}\|_v = |\lambda|\cdot\|\mathbf{Tx}\|_v = |\lambda|\cdot\|\mathbf{x}\|_T$

3) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_T = \|\mathbf{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|_v \leq \|\mathbf{Tx}\|_v + \|\mathbf{Ty}\|_v = \|\mathbf{x}\|_T + \|\mathbf{y}\|_T$
Tehát a norma tulajdonságok teljesülnek.

b) A vektornorma által indukált mátrixnorma

$$\|\mathbf{A}\|_T = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_T}{\|\mathbf{x}\|_T} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{TAx}\|_v}{\|\mathbf{Tx}\|_v} =$$

.

az $\mathbf{y} := \mathbf{Tx}$ helyettesítéssel

$$= \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{y}\|_v}{\|\mathbf{y}\|_v} = \|\mathbf{TAT}^{-1}\|.$$

8. A kért mátrixnormák:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{j=1}^{n} \{|-1|+1\,;0+2\} = 2,$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{i=1}^{n} \{|-1|+0\,;1+2\} = 3,$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\max_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}.$$

Határozzuk meg $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátértékeit.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}^*\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \\ &\to \quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = 3 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

Innen látszik, hogy $\lambda_1 = 3+\sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 3-\sqrt{5}.$
Innen a spektrálsugár $\rho(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \max_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = 3+\sqrt{5}$. Gyökvonással a 2 -es norma

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

9. Mivel a mátrix szimmetrikus, ezért az 1-es és ∞ normája megegyezik.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{j=1}^{n} \{4+2\,;2+4\} = 6$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{i=1}^{n} \{4+2\,;2+4\} = 6$$

Mivel a megadott mátrix szimmetrikus, ezért a spektrálnormát az eredeti mátrix spektrálsugárával számíthatjuk.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(\mathbf{A})|$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \\ &\to \quad \lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = 4 \pm 2 \end{aligned}$$

Innen látszik, hogy $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 6$, így $\rho(\mathbf{A}) = 6$ és

$$\|\mathbf{A}\|_2 = 6.$$

10. Mivel a mátrix szimmetrikus, ezért az 1-es és ∞ normája megegyezik.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{j=1}^{n} \{4+0+|-1|; 0+4+1; |-1|+1+4\} = \{5;5;6\} = 6$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{i=1}^{n} \{4+0+|-1|; 0+4+1; |-1|+1+4\} = \{5;5;6\} = 6$$

Mivel a megadott mátrix szimmetrikus, ezért a spektrálnormát az eredeti mátrix spektrálsugarával számíthatjuk.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(\mathbf{A})|$$

$$|\mathbf{A}-\mathbf{I}\lambda| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (4-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 4-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= (4-\lambda)\cdot((4-\lambda)^2-1)-(4-\lambda) = \\
&= (4-\lambda)\cdot((4-\lambda)^2-1-1) = (4-\lambda)\cdot(\lambda^2-8\lambda+14) = 0 \\
&\to \lambda_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64-56}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Innen látszik, hogy $\lambda_1 = 4$ és $\lambda_2 = 4+\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 4-\sqrt{2}$, így az eredmény

$$\|\mathbf{A}\|_2 = 4+\sqrt{2}.$$

11. Legyen $\|.\|_m$ indukált mátrixnorma. Ekkor igaz, hogy $\|\mathbf{I}\|_m = 1$. Ez minden indukált mátrixnormára igaz, így ha a *Frobenius* mátrixnorma is indukált lenne, akkor rá is teljesülnie kellene ennek a tulajdonságnak. Nézzük meg $n \neq 1$ esetén.

$$\|\mathbf{I}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1^2} = \sqrt{n^2} = n \neq 1$$

Következésképpen a *Frobenius* mátrixnorma nem indukált mátrixnorma.

12. A csupa egyesekből álló vektor 2-es vektornormája

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|1|^2} = \sqrt{n}.$$

Ha olyan mátrixot keresünk, melynek minden eleme azonos, akkor a *Frobenius* mátrix definíciója alapján

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} &= \sqrt{n} \\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a|^2 &= n \\
n^2 \cdot a &= n \\
a &= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Tehát egy lehetséges megoldás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

13. Definíció szerint $\rho(A) = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Induljunk ki a sajátérték egyenletből, jelöljük λ -val az $\mathbf{A}$ sajátértékét és $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ -val a hozzá tartozó sajátvektort. Az első lépésben megszorozzuk mind a két oldalt $\mathbf{x}^*$-gal, majd vesszük a normáját.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \lambda \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{Axx}^* &= \lambda \cdot \mathbf{xx}^* \\ \|\mathbf{A}(\mathbf{xx}^*)\| &= \|\lambda \cdot \mathbf{xx}^*\| \end{aligned}$$

A háromszög-egyenlőtlenség és a mátrix normájára vonatkozó azonosság felhasználásával és az $\|\mathbf{xx}^*\| \neq 0$-val való osztással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{xx}^*\| \geq \|\mathbf{A}(\mathbf{xx}^*)\| &= \|\lambda \cdot \mathbf{xx}^*\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{xx}^*\| \\ \|\mathbf{A}\| &\geq |\lambda| \end{aligned}$$

Mivel ez $\forall\ \lambda$ sajátértékre igaz, így a legnagyobbra is igaz, vagyis

$$\rho(A) = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)| \leq \|A\|$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

14. Az $\mathbf{A}$ mátrix normális mátrix, ha $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Ha $\mathbf{A}$ mátrix normális, akkor $\exists$ $\mathbf{U}$ unitér mátrix, amelyre $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D} = diag(\lambda_i(\mathbf{A}))$, azaz diagonalizálható és átlójában a sajátértékek vannak.
$\mathbf{U}$ unitér azt jelenti, hogy $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}$ és így $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$.

Induljunk ki $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$-ból.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^*\mathbf{A} &= (\mathbf{UDU}^*)^* \cdot \mathbf{UDU}^* \\ &= \underbrace{\mathbf{U}^{**}}_{\mathbf{U}}\mathbf{D}^*\underbrace{\mathbf{U}^*\mathbf{U}}_{\mathbf{I}}\mathbf{DU}^* \\ &= \mathbf{UD}^*\mathbf{DU}^* \end{aligned}$$

Tehát $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátértékeire

$$\begin{aligned} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) &= \lambda_i(\mathbf{D}^*\mathbf{D}) = |\lambda_i(\mathbf{D})|^2 = |\lambda_i(\mathbf{A})|^2 \\ \rho(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) &= \max \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = (\max |\lambda_i(\mathbf{A})|)^2 = \rho(\mathbf{A})^2 = \|\mathbf{A}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

15. **a)** Mivel a 2-es norma a jól ismert euklideszi távolság fogalom interpretációja, ezért ebben a pontban azt kell megmutatnunk, hogy az unitér transzformáció távolságtartó.

$$\|\mathbf{Qx}\|_2^2 = (\mathbf{Qx})^*\mathbf{Qx} = \mathbf{x}^*\mathbf{Q}^*\mathbf{Qx} = \mathbf{x}^*\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2$$

b) Az indukált mátrixnorma definícióját és az előző pontban bizonyított állítást felhasználva

$$\|\mathbf{Q}\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Qx}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = 1.$$

c) Ismét az indukált mátrixnorma definícióját és az **a)** pontbeli állítást használjuk.

$$\|\mathbf{QA}\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{QAx}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \|\mathbf{A}\|_2$$

$$\|\mathbf{AQ}\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{AQx}\|_2}{\underbrace{\|\mathbf{x}\|_2}_{\|\mathbf{Qx}\|_2}} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}(\mathbf{Qx})\|_2}{\|\underbrace{\mathbf{Qx}}_{\mathbf{y}:=\mathbf{Qx}}\|_2} = \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ay}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} = \|\mathbf{A}\|_2$$

Tehát ezzel igazoltuk az állítást.

16. Nézzük először, mit jelentenek a feladatban szereplő fogalmak.
Az $\mathbf{A}$ mátrix *Frobenius* normája definíció szerint

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

egy tetszőleges $\mathbf{B}$ mátrix nyoma (trace)

$$tr(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}.$$

Az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ mátrix főátlójában lévő elemek az alábbiak.

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ji}} \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

Ezt felhasználva, kiszámoljuk az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ mátrix nyomát(trace).

$$tr(A^*A) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|^2\right) = \|\mathbf{A}\|_F^2$$

Ezzel készen is vagyunk a bizonyítással.

17. Induljunk ki a $\mathbf{QA}$ mátrix *Frobenius* norma négyzetéből és használjuk fel az előző feladatban bebizonyított állítást.

$$\|\mathbf{QA}\|_F^2 = tr\left((\mathbf{QA})^* \cdot \mathbf{QA}\right) = tr(\mathbf{A}^* \cdot \underbrace{\mathbf{Q}^*\mathbf{Q}}_{=\mathbf{I}} \cdot \mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2^F$$

Alkalmazzuk a most és eddig megmutatott összefüggéseket! Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^*$ *Frobenius* normája megegyezik, így

$$\|\mathbf{AQ}\|_F^2 = \|((\mathbf{AQ})^*)\|_F^2 = \|\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{A}^*\|_F^2 = \|\mathbf{A}^*\|_F^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

18. Ha $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor $\exists$ $\mathbf{Q}$ unitér mátrix, amelyre

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{A}^*\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} &= \mathbf{D} = diag(\lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})) \\ (\mathbf{AQ})^* \cdot \mathbf{AQ} &= \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Induljunk ki $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátértékeinek összegéből!

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = tr(\mathbf{D}) = tr\left((\mathbf{AQ})^* \cdot \mathbf{AQ}\right)$$

Most felhasználjuk az előző két példában bebizonyított összefüggést.

$$tr\left((\mathbf{AQ})^* \cdot \mathbf{AQ}\right) = \|\mathbf{AQ}\|_F^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2$$

Ezzel be is bizonyítottuk a kívánt összefüggést.

19. Mindkét állításhoz használjuk fel az előző eredményeket. Ne felejtsük el, hogy a $\lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ sajátértékek nem negatívak!

a) Induljunk ki az $\mathbf{A}$ spektrálnorma négyzetéből.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_2^2 &= \max_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \\ &= \|A\|_F^2 \le n \cdot \max_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = n \cdot \|\mathbf{A}\|_2^2 \end{aligned}$$

Tehát mind a két oldalból négyzetgyököt vonva kapjuk az alábbi összefüggést.

$$\|\mathbf{A}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_F \le \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_2$$

Ez pedig a megadott mátrixnormára az ekvivalencia definíciója.

b) A $\|.\|_v$ vektornorma és a $\|.\|_m$ mátrixnorma illeszkedik, ha minden $\mathbf{A}$ mátrixra és $\mathbf{x}$ vektorra

$$\|\mathbf{Ax}\|_v \le \|\mathbf{A}\|_m \cdot \|\mathbf{x}\|_v.$$

A 2 -es mátrixnorma illeszkedik az őt indukáló 2 -es vektornormához. Az előző feladatbeli norma becslést felhasználva

$$\|\mathbf{Ax}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_F \cdot \|\mathbf{x}\|_2.$$

Tehát a $\|.\|_2$ vektornorma és a $\|.\|_F$ mátrixnorma illeszkednek.

1.2.3. Kondíciószám

20. Legyen $\|.\|_m$ mátrixnorma és $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{nxn}$ $(n \in \mathbb{N})$ invertálható mátrix.

A kondíciószám fogalma: $cond_m(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_m \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_m$.

A feladat megoldásához első lépésként meg kell határoznunk az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezután a megfelelő mátrixnormákat kell meghatároznunk.

a) Először az 1-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_1 &= \max\{4,9\} = 9\\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_1 &= \max\{10,3\} = 10\\ cond_1(\mathbf{A}) &= 9\cdot 10 = 90\end{aligned}$$

b) Most a ∞ mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_\infty &= \max\{3,10\} = 10\\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_\infty &= \max\{9,4\} = 9\\ cond_\infty(\mathbf{A}) &= 10\cdot 9 = 90\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy 2×2-es esetre mindig megegyezik az 1-es és ∞ mátrixnormákhoz tartozó kondíciószám. Ennek a meggondolását az olvasóra bízzuk.

21. Az előző feladatban leírtaknak megfelelően első lépésként meghatározzuk az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

Most már csak a megfelelő mátrixnormákat kell meghatároznunk.

a) Először a 2-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg. Mivel a mátrix szim metrikus, ezért egyszerűbben számolható a mátrixnorma.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}) = \max|\lambda_i(\mathbf{A})|$$

Ehhez ki kell számítanunk a mátrix sajátértékeit.

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0\\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0\\ \lambda_{1,2} &= \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = 1\pm 2\end{aligned}$$

Tehát a mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 3$.

A 2 -es norma szimmetrikus mátrix esetén a maximális abszolútértékű sajátérték,

$$\|\mathbf{A}\|_2 = 3.$$

Most már csak az inverz mátrixra kell ugyanezt megismételni. Egy egyszerűsítéssel élünk és nem a fent bemutatott módszert ismételjük meg. Mivel az $\mathbf{A^{-1}}$ sajátértéke az $\mathbf{A}$ sajátértékének reciproka, így

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \max\left|\frac{1}{\lambda_i}\right| = \frac{1}{\min|\lambda_i|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ezt felhasználva

$$cond_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{3}{1} = 3.$$

b) A következő lépésben meghatározzuk a *Frobenius* márixnormához tartozó kondíciószámot.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_F &= (1^2+2^2+2^2+1^2)^{\frac{1}{2}} = (1+4+4+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}\\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_F &= \frac{1}{3}((-1)^2+2^2+2^2+(-1)^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(1+4+4+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{10}\\ cond_F(\mathbf{A}) &= \sqrt{10}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{10} = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, ezért $\|\mathbf{A}\|_2$ a legkisebb norma és $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2$.
Az $\mathbf{A^{-1}}$-re ugyanez igaz, tehát a $cond_2(\mathbf{A})$ a legkisebb kondíciószám.

22. Az előző feladatban leírtaknak megfelelően első lépésként meghatározzuk az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ezután a megfelelő mátrixnormákat kell meghatároznunk.

a) Először az 1-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &= \max\{\,2, 2\} = 2 \\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_1 &= \max\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{3}{2} \\ cond_1(\mathbf{A}) &= 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \end{aligned}$$

b) Most a ∞ mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max\{\,1, 3\} = 3 \\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_\infty &= \max\{\,1, 1\} = 1 \\ cond_\infty(\mathbf{A}) &= 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

c) A következőkben a 2-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg. Az $\|\mathbf{A}\|_2$-t már a 8. feladatban meghatároztuk $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$.
Az $\|\mathbf{A^{-1}}\|_2$-hoz először az $(\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}}$ mátrix sajátértékeit kell meghatároznunk.

$$(\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} |(\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} \frac{5}{4} - \lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \left(\left(\frac{5}{4} - \lambda\right)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) - \frac{1}{16}\right) = \lambda^2 - \frac{6}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0 \\ 4\lambda^2 - 6\lambda + 1 &= 0. \\ \lambda_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{8} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Tehát a mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ és $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$.
Innen

$$\rho((\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}}) = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{A^{-1}}\|_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}.$$

A 2-es kondíciószám

$$cond_2(\mathbf{A}) = \sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Egy kevesebb számolást igénylő megoldást is mutatunk. Az $(\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}}$ mátrix sajátértékeit meghatározhatjuk közvetlenül az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeiből, ugyanis

$$(\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1}, \quad \text{és} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A^{-1}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{A},$$

vagyis $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ hasonló, a sajátértékeik megegyeznek. Az $(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-\mathbf{1}}$ sajátértékei az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátértékeinek reciprokai, azaz $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ és $\frac{1}{3+\sqrt{5}}$.

$$\rho((\mathbf{A}^{-\mathbf{1}})^*\mathbf{A}^{-\mathbf{1}}) = \frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{A}^{-\mathbf{1}}\|_2 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$$

d) Már csak a *Frobenius* márixnormához tartozó kondíciószámot kell meghatároznunk.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_F &= ((-1)^2+0^2+1^2+2^2)^{\frac{1}{2}} = (1+0+1+4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6} \\
\|\mathbf{A}^{-\mathbf{1}}\|_F &= \frac{1}{2}((-2)^2+0^2+1^2+1^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4+0+1+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \\
cond_F(\mathbf{A}) &= \sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{6}{2} = 3
\end{aligned}$$

23. Az előző feladatban leírtaknak megfelelően első lépésként meghatározzuk az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{12}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Már csak a megfelelő mátrixnormákat kell meghatároznunk.

a) Először az 1-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_1 &= \max\{6, 6\} = 6 \\
\|\mathbf{A}^{-\mathbf{1}}\|_1 &= \frac{1}{12}\cdot\max\{6, 6\} = \frac{1}{2} \\
cond_1(\mathbf{A}) &= 6\cdot\frac{1}{2} = 3
\end{aligned}$$

b) Most a ∞ mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_\infty &= \max\{6, 6\} = 6 \\
\|\mathbf{A}^{-\mathbf{1}}\|_\infty &= \frac{1}{12}\cdot\max\{6, 6\} = \frac{1}{2} \\
cond_\infty(\mathbf{A}) &= 6\cdot\frac{1}{2} = 3
\end{aligned}$$

c) A következőkben a 2-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 2\cdot 2 = 0 \\
\lambda^2 - 8\lambda + 12 &= 0 \\
\lambda_{1,2} &= \frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2} = \frac{8\pm 4}{2} = 4\pm 2
\end{aligned}$$

Tehát a mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 6$.

Számolhatunk kondíciószámot közvetlenül a sajátértékekből

$$cond_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{6}{2} = 3.$$

d) Most már csak a *Frobenius* márixnormához tartozó kondíciószámot kell meghatároznunk.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_F &= (4^2+2^2+2^2+4^2)^{\frac{1}{2}} = (16+4+4+16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\
\|\mathbf{A^{-1}}\|_F &= \frac{1}{12}(4^2+(-2)^2+(-2)^2+4^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}(16+4+4+16)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}\sqrt{40} = \frac{\sqrt{10}}{6} \\
cond_F(\mathbf{A}) &= 2\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{6} = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

24. Induljunk ki az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldásából úgy, hogy felhasználjuk az $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$ felbontást!

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{QRx} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^*\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Korábban láttuk, hogy az unitér mátrixok esetén az ortogonális transzformációk normatartóak, így

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_2 &= \|\mathbf{QR}\|_2 = \|\mathbf{R}\|_2 \\
\|\mathbf{A^{-1}}\|_2 &= \|(\mathbf{QR})^{-1}\|_2 = \|\mathbf{R^{-1}}\cdot\mathbf{Q}^*\|_2 = \|\mathbf{R}^{-1}\|_2
\end{aligned}$$

vagyis $cond_2(\mathbf{A}) = cond_2(\mathbf{R})$.

Látjuk hogy az eredeti és a felső háromszögmátrixú lineáris egyenletrendszer kondíciószáma megegyezik, ez azt jelenti, hogy a **QR** felbontás nem változtatja meg a lineáris egyenletrendszer érzékenységét.

25. A Cholesky felbontásból $\mathbf{A}=\mathbf{LL^T}$. Elvégezve az **L** mátrix-szal egy hasonlósági transzformációt azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{L^{-1}AL}=\mathbf{L^TL}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{LL^T}$ és $\mathbf{L^TL}$ hasonlóak, a sajátértékeik megegyeznek, így a spektrálsugaruk is.

$$\rho\,(\mathbf{A}) = \rho\,(\mathbf{LL^T}) = \rho\,(\mathbf{L^TL})$$

A 2-es (spektrálnorma) definíciójából

$$\|\mathbf{L}\|_2^2 = \varrho(\mathbf{L^TL}) = \varrho(\mathbf{LL^T}) = \|\mathbf{L^T}\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{L}\|_2 = \|\mathbf{L^T}\|_2.$$

A fenti gondolatmenetet ismételjük meg az $\mathbf{L^{-1}}$-re. Mivel

$$\mathbf{A^{-1}} = (\mathbf{LL^T})^{-1} = (\mathbf{L^T})^{-1}\cdot\mathbf{L^{-1}} = (\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{L^{-1}},$$

az **L** mátrix-szal elvégezve egy hasonlósági transzformációt

$$\mathbf{L^{-1}A^{-1}L} = \mathbf{L^{-1}}\cdot(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}.$$

Tehát $(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{L^{-1}}$ és $\mathbf{L^{-1}}\cdot(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}$ hasonlóak, a sajátértékeik megegyeznek, így a spektrálsugaruk is.

$$\rho\,(\mathbf{A^{-1}}) = \rho\,((\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{L^{-1}}) = \rho\,(\,\mathbf{L^{-1}}\cdot(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}})$$

A 2-es (spektrálnorma) definíciójából

$$\|\mathbf{L^{-1}}\|_2^2 = \varrho(\,(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{L^{-1}}) = \varrho(\,\mathbf{L^{-1}}\cdot(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}) = \|(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{L^{-1}}\|_2 = \|(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\|_2.$$

Innen látjuk, hogy

$$cond_2(\mathbf{L}) = \|\mathbf{L}\|_2 \cdot \|\mathbf{L^{-1}}\|_2 = \|\mathbf{L^T}\|_2 \cdot \|(\mathbf{L^T})^{-1}\|_2 = cond_2(\mathbf{L^T}).$$

Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A^{-1}}$ is szimmetrikus mátrix, a 2-es mátrixnorma a spektrálsugarukból közvetlenül is számolható.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{L}\|_2^2, \quad \|\mathbf{A^{-1}}\|_2 = \rho(\mathbf{A^{-1}}) = \|\mathbf{L^{-1}}\|_2^2$$

Ezzel minden részletet bizonyítottunk a befejezéshez.

$$\|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A^{-1}}\|_2 = cond_2(\mathbf{A}) = (cond_2(\mathbf{L}))^2$$

2. fejezet

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSÁNAK ITERÁCIÓS MÓDSZEREI

2.1. Feladatok

2.1.1. Egyszerű iteráció

1. Adott az $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}\mathbf{x_k} + \mathbf{c}$ egyenlőség, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

Konvergens-e $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-re? Írjuk fel a hibabecslést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez? Melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál?

2. Adott az $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}\mathbf{x_k} + \mathbf{c}$ egyenlőség, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

Konvergens-e $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-re? Írjuk fel a hibabecslést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez? Melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál?

3. Adott az $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}\mathbf{x_k} + \mathbf{c}$ egyenlőség, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

Konvergens-e $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^2$-re? Írjuk fel a hibabecslést! Hány lépés kell a 10^{-2} pontosság eléréséhez? Melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál?

4. Adott az $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}\mathbf{x_k} + \mathbf{c}$ egyenlőség, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

Konvergens-e $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^4$-re? Írjuk fel a hibabecslést! Hány lépés kell a 10^{-4} pontosság eléréséhez? Melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál?

2.1.2. Jacobi-iteráció

5. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $J(1)$?

6. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $J(1)$?

7. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $J(1)$?

8. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a lineáris egyenletrendszer Jacobi-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést!

9. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a lineáris egyenletrendszer Jacobi-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést!

10. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a lineáris egyenletrendszer Jacobi-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 3 lépést!

2.1.3. Gauss–Seidel-iteráció

11. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $S(1)$?

12. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
Konvergál-e a mátrixra felírt $S(1)$?

13. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
Konvergál-e a mátrixra felírt $S(1)$?

14. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
Konvergál-e a mátrixra felírt $S(1)$?

15. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Konvergál-e a mátrixra felírt $S(1)$?

16. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Megoldható-e a feladat Gauss-Seidel-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 3 lépést!

17. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$
Megoldható-e a feladat Gauss-Seidel-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

18. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Megoldható-e a feladat Gauss-Seidel-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

19. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Megoldható-e a feladat Gauss-Seidel-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-2} pontosság eléréséhez?

20. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a feladat Gauss-Seidel-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

2.1.4. Paraméteres iterációk: csillapított Jacobi-iteráció és a relaxációs módszer

21. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk az **A** mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt! Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

22. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk az **A** mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt! Milyen ω-ra lesz konvergens?

23. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk az **A** mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt! Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

24. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk az **A** mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt! Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

25. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk az **A** mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt! Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

26. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vizsgáljuk meg az **A**-ra felírt relaxációs módszert! Adjunk olyan ω paramétert, melyre a módszer gyorsabb a Gauss–Seidel-iterációnál!

27. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a relaxációs módszert!
$\omega = \frac{1}{2}$ esetén számítsuk ki a relaxációs módszer két lépését az $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ kezdővektorral! Adjunk olyan ω paramétert, melyre a módszer gyorsabb a Gauss–Seidel-iterációnál!

28. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a relaxációs módszert! $\omega = \frac{1}{2}$ paraméter esetén hajtsuk végre a relaxációs módszer két lépését! Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

29. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt relaxációs módszer? Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

2.1.5. Richardson-iteráció

30. Tekintsük az

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{c}\mathbf{A}\right)\mathbf{x_k} + \frac{2}{c}\,\mathbf{b}$$

Richardson-iterációt az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására,
ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix és $c \in \mathbb{R}^+ : \ \rho(\mathbf{A}) < c$.
Igazoljuk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0}$-ra konvergens!

31. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a 30. feladatban szereplő Richardson-iterációt és bizonyítsuk a módszer konvergenciáját, ha tudjuk, hogy $\rho(\mathbf{A}) < 6 = c$.
Az $\mathbf{x_0} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ kezdővektorral végezzünk két lépést és adjuk meg az iteráció hibabecslését.

32. Tekintsük az

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\right)\mathbf{x_k} + \frac{7}{9c}\,\mathbf{b}$$

Richardson-iterációt az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására,
ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix és $c \in \mathbb{R}^+ : \ \rho(\mathbf{A}) < c$.
Igazoljuk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0}$-ra konvergens!

33. Tekintsük az

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{5c}\mathbf{A}\right)\mathbf{x_k} + \frac{1}{5c}\,\mathbf{b}$$

Richardson-iterációt az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására,
ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix és $c \in \mathbb{R}^+ : \ \rho(\mathbf{A}) < c$.
Igazoljuk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0}$-ra konvergens!

34. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a Richardson-iterációt! Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén konvergens? Mi az optimális paraméter?

35. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a Richardson-iterációt! Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén konvergens? Mi az optimális paraméter?

2.1.6. ILU-algoritmus

36. Legyen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ -12 & -8 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e az ILU-algoritmus? Ha igen, akkor tegyünk meg 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

37. Legyen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e az ILU-algoritmus? Ha igen, akkor tegyünk meg 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

38. Legyen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e az ILU-algoritmus? Ha igen, akkor tegyünk meg 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-2} pontosság eléréséhez?

39. Legyen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e az ILU-algoritmus? Ha igen, akkor tegyünk meg 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

40. Legyen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e az ILU-algoritmus? Ha igen, akkor tegyünk meg 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-4} pontosság eléréséhez?

2.2. Megoldások

2.2.1. Egyszerű iteráció

26. Első lépésként meg kell vizsgálni a konvergenciát. Ehhez használjuk fel az elégséges feltételt.

Elégséges feltétel:
Ha valamely illeszkedő mátrixnormában az átmenetmátrixra $\|\mathbf{B}\| < 1$, akkor $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ -ből indítva az iterációt, konvergens lesz az $(\mathbf{x_k})$ iterációs sorozat. Tehát a konvergencia sem $\mathbf{x}_0$-tól, sem pedig c-től nem függ.

Konkrét példánkra

$$\|\mathbf{B}\|_1 = \max_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = 0,6 < 1,$$

tehát $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ -re konvergens.

Hibabecslés:
A k. közelítő vektorra adott hibabecslés alakja

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^k}{1-q}\, \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|,$$

ahol $q = \|\mathbf{B}\|$ a kontrakciós együttható.

Ahhoz, hogy a képletet alkalmazzuk, ki kell számítanunk $\mathbf{x_1}$ -et. Ehhez ki kell számolnunk az iteráció első lépését. Mivel bármely $\mathbf{x_0}$ -ból indítva az iteráció konvergens, ezért válasszunk egy kezdővektort. Legyen $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

Így már kiszámolható a hibabecslés. ($q = \|\mathbf{B}\|_1 = 0,6$ a $\mathbf{B}$ mátrix 1-es normája.)

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_1 \le \frac{0,6^k}{1-0,6} \cdot 0,7$$

Lépésszám:
Meg kell határoznunk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

$$\frac{0,6^k}{1-0,6} \cdot 0,7 \le 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \frac{7}{4} &\le 10^{-3} \\
\frac{7}{4} \cdot 10^3 &\le \left(\frac{5}{3}\right)^k \\
\lg\left(\frac{7}{4} \cdot 10^3\right) &\le k \cdot \lg\left(\frac{5}{3}\right) \\
k &\ge \frac{\lg\left(\frac{7}{4} \cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{5}{3}\right)} \approx 14,6
\end{aligned}$$

Tehát $k \geq 15$ lépés elegendő a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

Utolsó lépésként azt kell meghatároznunk, hogy melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál az iteráció. Az iteráció $\mathbf{x}$ határértékére (a fixpontra)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{B})}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Tehát a megoldás

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 0,7 & -0,2 \\ 0 & -0,1 & 0,6 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{b} &= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

27. Első lépésként meg kell vizsgálni a konvergenciát. Ehhez használjuk fel az elégséges feltételt.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}\|_1 &= \max_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = 1 \qquad \Rightarrow \text{Nem alkalmas!} \\
\|\mathbf{B}\|_\infty &= \max_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = 0,9 < 1
\end{aligned}$$

Tehát $\forall \ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$-re konvergens.

Hibabecslés:
Az alábbi képletet alkalmazzuk.

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|$$

Ahhoz, hogy a képletet alkalmazni tudjuk, ki kell számítanunk $\mathbf{x_1}$ -et. Ehhez ki kell számolnunk az iteráció első lépését. Mivel minden $\mathbf{x_0}$-ból indítva az iteráció konvergens, ezért válasszunk egy kezdővektort. Legyen $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{B}$ mátrix ∞-normája alkalmas q-nak, így már kiszámolható a hibabecslés a ∞ normában.

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{0,9^k}{1-0,9} \cdot 0,3$$

Lépésszám:

Meg kell határoznunk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

$$\begin{aligned}
\frac{0,9^k}{0,1}\cdot 0,3 &\leq 10^{-3}\\
\left(\frac{9}{10}\right)^k\cdot 3 &\leq 10^{-3}\\
3\cdot 10^3 &\leq \left(\frac{10}{9}\right)^k\\
\lg\left(3\cdot 10^3\right) &\leq k\cdot\lg\left(\frac{10}{9}\right)\\
k &\geq \frac{\lg\left(3\cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{10}{9}\right)}\approx 75,99
\end{aligned}$$

Tehát $k\geq 80$ lépés elég a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

Utolsó lépésként azt kell meghatároznunk, hogy melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál az iteráció. Az iteráció $\mathbf{x}$ határértékére (a fixpontra)

$$\mathbf{x}=\mathbf{B}\mathbf{x}+\mathbf{c}\quad\Longleftrightarrow\quad\underbrace{(\mathbf{I}-\mathbf{B})}_{\mathbf{A}}\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\Longleftrightarrow\quad\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}.$$

Tehát a megoldás

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,1&0,3&0,1\\0,5&0,3&0,1\\0&0,4&0,1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,9&-0,3&-0,1\\-0,5&0,7&-0,1\\0&-0,4&0,9\end{bmatrix}\\
\mathbf{b} &= \mathbf{c}=\begin{bmatrix}0,2\\0,3\\0,1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

28. A feladat megoldásához először meg kell vizsgálni a konvergencia teljesülését. Ehhez használjuk fel az elégséges feltételt.

$$\|\mathbf{B}\|_1=\max_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}|=0,9<1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő mátrixnormát, aminek az értéke kisebb mint 1, ezért $\forall\ \mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^3$-re konvergens.

Hibabecslés.
Az alábbi képletet alkalmazzuk.

$$\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|\leq\frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|$$

Ahhoz, hogy a képletet alkalmazni tudjuk, ki kell számítanunk $\mathbf{x_1}$ -et. Ehhez ki kell számolnunk az iteráció első lépését. Mivel minden $\mathbf{x_0}$-ból indítva az iteráció konvergens, ezért válasszunk egy kezdővektort. Legyen $\mathbf{x_0}=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}^T$.

$$\mathbf{x_1}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{x_0}+\mathbf{c}=\mathbf{c}=\begin{bmatrix}0,1\\0,3\end{bmatrix}$$

Így már kiszámolható a hibabecslés. ($\mathbf{B}$ mátrix egyes normája alkalmas q-nak.)

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_1 \leq \frac{0,9^k}{1-0,9} \cdot 0,4$$

Lépésszám:
Meg kell határoznunk a lépésszámot a 10^{-2} pontosság eléréséhez.

$$\begin{aligned}
\frac{0,9^k}{0,1} \cdot 0,4 &\leq 10^{-2} \\
\left(\frac{9}{10}\right)^k \cdot 4 &\leq 10^{-2} \\
4 \cdot 10^2 &\leq \left(\frac{10}{9}\right)^k \\
\lg\left(4 \cdot 10^2\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{10}{9}\right) \\
k &\geq \frac{\lg\left(4 \cdot 10^2\right)}{\lg\left(\frac{10}{9}\right)} \approx 56,87
\end{aligned}$$

Tehát $k \geq 57$ lépés elég a 10^{-2} pontosság eléréséhez.

Utolsó lépésként azt kell meghatároznunk, hogy melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál az iteráció. Az iteráció $\mathbf{x}$ határértékére (a fixpontra)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c} \iff \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{B})}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Tehát a megoldás

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,7 & 0,1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{b} &= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

29. Első lépésként meg kell vizsgálni a konvergenciát. Ehhez használjuk fel az elégséges feltételt:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}\|_1 &= \max_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} |a_{ij}| = 1 \quad \Rightarrow \text{Nem alkalmas!} \\
\|\mathbf{B}\|_\infty &= \max_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} |a_{ij}| = 1 \quad \Rightarrow \text{Nem alkalmas!} \\
\|\mathbf{B}\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} |a_{ij}|^2} = \sqrt{0,72} \approx 0,85 < 1
\end{aligned}$$

Tehát $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$-re konvergens.

Hibabecslés.
Az alábbi képletet alkalmazzuk.

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|$$

Ahhoz, hogy a képletet alkalmazni tudjuk, ki kell számítanunk $\mathbf{x_1}$ -et. Ehhez ki kell számolnunk az iteráció első lépését. Mivel minden $\mathbf{x_0}$-ból indítva az iteráció konvergens, ezért válasszunk egy kezdővektort. Legyen $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

A hibabecslés így már kiszámolható. Mivel a $\|.\|_F$ norma illeszkedik a $\|.\|_2$ normára, ezért a hibabecslésben használhatjuk a vektoroknál a $\|.\|_2$ normát. ($\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_F$-normája alkalmas q-nak.)

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \frac{0,85^k}{1-0,85} \cdot 0,55$$

Lépésszám:
Meg kell határoznunk a lépésszámot a 10^{-4} pontosság eléréséhez.

$$\begin{aligned}
\frac{0,85^k}{0,15} \cdot 0,55 &\leq 10^{-4} \\
\left(\frac{17}{20}\right)^k \cdot \frac{11}{3} &\leq 10^{-4} \\
\frac{11}{3} \cdot 10^4 &\leq \left(\frac{20}{17}\right)^k \\
\lg\left(\frac{11}{3} \cdot 10^4\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{20}{17}\right) \\
k &\geq \frac{\lg\left(\frac{11}{3} \cdot 10^4\right)}{\lg\left(\frac{20}{17}\right)} \approx 50,5
\end{aligned}$$

Tehát $k \geq 51$ lépés elég a 10^{-4} pontosság eléréséhez.

Utolsó lépésként azt kell meghatároznunk, hogy melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál az iteráció. Az iteráció $\mathbf{x}$ határértékére (a fixpontra)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{B})}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Tehát a megoldás

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,3 & -0,3 \\ -0,2 & 0,8 & -0,1 & -0,1 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 & -0,2 \\ -0,3 & -0,1 & -0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \\
\mathbf{b} &= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

2.2.2. Jacobi-iteráció

30. A továbbiakban a Jacobi-módszerre a $J(1)$ rövidítést fogjuk használni, utalva ezzel arra, hogy a csillapított Jacobi-iterációban $\omega = 1$ paraméterrel kapjuk meg a Jacobi-iterációt.
Tudjuk, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Innen a Jacobi-iteráció

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{-\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\text{\textit{átmenetmátrix}}} \cdot \mathbf{x_k} + \underbrace{\mathbf{D^{-1}b}}_{\mathbf{c}}.$$

Első lépésként meg kell határoznunk az átmenetmátrixot.

$$\mathbf{B}_{J(1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$$

ahol

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{J(1)} &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mivel megkaptuk az átmenetmátrixot, meg kell vizsgálnunk, hogy melyik konvergencia tétel feltételei teljesülnek. Először megvizsgáljuk az elégséges feltételt.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}_{J(1)}\|_1 &= 4 \\ \|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty &= 4 \\ \|\mathbf{B}_{J(1)}\|_F &= \sqrt{18} > 4 \end{aligned}$$

Mint látható mindegyik normával kapott eredmény nagyobb, mint egy, tehát az elégséges feltétel ebben az esetben nem használható.

Megjegyzés. Ha a mátrixban találhatóak 1-nél nagyobb elemek, akkor az elégséges feltétel nem használható.

Mivel az elégséges feltételt nem tudtuk használni, a szükséges és elégséges feltételt kell alkalmaznunk

Szükséges és elégséges feltétel:
$\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$-ből indított iteráció konvergens $\Leftrightarrow \rho(\mathbf{B}) < 1$, ahol $\rho(\mathbf{B}) = \max_{i=1}^n |\lambda_i|$ a B mátrix spektrálsugara. A spektrálsugár nagysága mutatja a konvergencia gyorsaságát.

A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & q \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 2) - 2(-\lambda - 2) - 2(2 + 2\lambda) = \\
&= -\lambda^3 + 2\lambda + 2\lambda + 4 - 4 - 4\lambda = \\
&= -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 0}
\end{aligned}$$

A sajátértékek alapján a mátrix spektrálsugara

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 0 < 1,$$

így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-re $J(1)$ konvergens lesz!
Ha az átmenetmátrix spektrálsugara nulla, akkor véges iterációra számíthatunk, legfeljebb n lépésben konvergál.

31. Első lépésként meg kell határoznunk az átmenetmátrixot.

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{3}{8} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \frac{3}{8} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg a konvergenciát! Először az elégséges feltételt vizsgáljuk.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_1 &= 2 \\
\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty &= 2 \\
\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_F &= \sqrt{4 + \frac{9}{64}} > 2
\end{aligned}$$

Mint látható mindegyik normával kapott eredmény nagyobb mint egy, tehát az elégséges feltétel ebben az esetben nem használható, ezért a szükséges és elégséges feltételt kell alkalmaznunk.
A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ \frac{3}{8} & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \lambda^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\lambda_{1,2}| = \sqrt{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

Mint látható a sajátértékek komplex számok, de $\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \sqrt{\frac{3}{4}} < 1$, így a konvergencia teljesül.

32. Első lépésként meg kell határoznunk az átmenetmátrixot.

$$\mathbf{B}_{J(1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}),$$

ahol

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{J(1)} &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Az átmenetmátrixot megkapva, lehetőségünk van a konvergencia vizsgálatára. Mivel $|a_{13}| > 1$, ezért az elégséges feltétel biztosan nem teljesül. A szükséges és elégséges feltétel teljesülését kell megvizsgálnunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -3 \\ -\frac{1}{3} & -\lambda & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda \cdot (\lambda^2) - 3 \cdot \left(-\frac{\lambda}{4}\right) = \\ &= -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \\ &\Rightarrow -\lambda^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad \boxed{\lambda_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

Most már tudjuk a mátrix spektrálsugarát.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866 < 1$$

Tehát a Jacobi-iteráció konvergens a megadott mátrixra.

33. Első lépésként meg kell vizsgálnunk, hogy a feladatra konvergens-e a Jacobi-iteráció.

Először ki kell számolni az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Megkaptuk az átmenetmátrixot, az elégséges feltételt kell megvizsgálnunk.

$$\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_1 = \frac{17}{30} \approx 0,56 < 1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. Ezzel tehát beláttuk, hogy a feladat megoldható Jacobi-iterációval.

Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első két lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Tudjuk, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Innen a Jacobi-iteráció

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{-\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\text{átmenetmátrix}} \cdot \mathbf{x_k} + \underbrace{\mathbf{D^{-1}b}}_{\mathbf{c}}.$$

Most

$$\mathbf{B}_{J(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

1. lépés:

$$\mathbf{x_1} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{11}{90} \\ \frac{11}{90} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{41}{90} \\ \frac{26}{90} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

34. Első lépésként meg kell vizsgálnunk, hogy a feladatra konvergens-e a Jacobi-iteráció. Először ki kell számolni az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Megkaptuk az átmenetmátrixot, az elégséges feltételt kell megvizsgálnunk.

$$\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke kisebb, mint egy, teljesül az a feltétel, hogy $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. Ezzel tehát beláttuk, hogy a feladat megoldható Jacobi-iterációval.
Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első két lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legkézenfekvőbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{D^{-1}b}$$

képletet felhasználva, könnyen elvégezhetjük az első két lépést.
1. lépés:

$$\mathbf{x_1} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2 &= -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

35. Első lépésként meg kell vizsgálnunk, hogy a feladatra konvergens-e a Jacobi-iteráció. Először ki kell számolni az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Megkaptuk az átmenetmátrixot, az elégséges feltételt kell megvizsgálnunk. Mivel a mátrix elemei kivétel nélkül egynél nagyobb számok, ezért az elégséges feltételt nem lehet alkalmazni. A szükséges és elégséges feltételt kell alkalmazni. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 2) - 2(-\lambda - 2) - 2(2 + 2\lambda) = \\
&= -\lambda^3 + 2\lambda + 2\lambda + 4 - 4 - 4\lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \ -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 0}
\end{aligned}$$

Az átmenetmátrix spektrálsugara

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 0 < 1.$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy a Jacobi-iteráció bármely $\mathbf{x_0}$ vektorra konvergens, így a feladat megoldható Jacobi-iterációval.
Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első három lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. A legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{D^{-1}b}$$

képletet felhasználva, könnyen elvégezhetjük az első három lépést.
1. lépés:

$$\mathbf{x_1} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_0} + \underbrace{\mathbf{D^{-1}b}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Az iteráció 3. lépése:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_3} &= \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2.2.3. Gauss–Seidel-iteráció

36. A továbbiakban a Gauss–Seidel-iterációra az $S(1)$ rövidítést fogjuk használni, utalva ezzel arra, hogy a relaxációs módszerben $\omega = 1$ paraméterrel kapjuk meg a Gauss–Seidel-iterációt. Tudjuk, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{Ux} + (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}.$$

Innen a Jacobi-iteráció

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U}}_{\text{átmenetmátrix}} \cdot \mathbf{x_k} + \underbrace{(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}.$$

A feladatunk, hogy meghatározzuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk. Tudjuk, hogy

$$\mathbf{B}_{S(1)} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}$$

ahol,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezt felhasználva kapjuk meg a $\mathbf{B}_{S(1)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{S(1)} &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A konvergencia vizsgálatához először megpróbáljuk használni az elégséges feltételt.

Elégséges feltétel:
Ha valamely illeszkedő mátrixnormában az átmenetmátrixra $\|\mathbf{B}\| < 1$, akkor $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ -ből indítva az iterációt, konvergens lesz az $(\mathbf{x_k})$ iterációs sorozat.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}_{S(1)}\|_1 &= 1,5 \\ \|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty &= 1 \\ \|\mathbf{B}_{S(1)}\|_F &= \sqrt{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

Mivel nem találtunk olyan mátrixnormát, ami kisebb lenne egynél, ezért a szükséges és elégséges feltételt használjuk.

Szükséges és elégséges feltétel:
$\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$-ből indított iteráció konvergens $\Leftrightarrow \rho(\mathbf{B}) < 1$, ahol $\rho(\mathbf{B}) = \max_{i=1}^n |\lambda_i|$ a B mátrix spektrálsugara.

A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \\
&= -\lambda\left(\lambda^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3}=0}
\end{aligned}$$

A sajátértékek segítségével kiszámoljuk a spektrálsugarat.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 0 < 1$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy az **A** mátrixra felírt S(1) iteráció konvergens.
Ha az átmenetmátrix spektrálsugara nulla, akkor véges iterációra számíthatunk, legfeljebb n lépésben konvergál.

37. A feladatunk, hogy meghatározzuk, hogy az **A** mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A konvergencia vizsgálatához először megpróbáljuk az elégséges feltételt használni. Mivel a mátrixban találhatóak egynél nagyobb elemek is, ezért az elégséges feltétel nem teljesül. A szükséges és elégséges feltétellel kell próbálkoznunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1-\lambda & -\frac{1}{2} = \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda\left((-1-\lambda)\left(-\frac{3}{2}-\lambda\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)(-3)\right) = \\
&= -\lambda\left(\frac{3}{2}+\lambda+\frac{3}{2}\lambda+\lambda^2-\frac{3}{2}\right) = \\
&= -\lambda^3-\frac{5}{2}\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2}=0} \\
&= -\lambda-\frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = -\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

Mivel találtunk egynél nagyobb sajátértéket, ezért a spektrálsugár is nagyobb lesz egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{5}{2} > 1$$

Mint látható nem teljesül a szükséges és elégséges feltétel, ezért a konvergencia nem teljesül minden kezdővektorra!

38. A feladatunk, hogy meghatározzuk, hogy az **A** mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban egynél nagyobb abszolút értékű elemek vannak, ezért az elégséges feltétel nem használható. A szükséges és elégséges feltétellel kell próbálkoznunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 8 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda\left((2-\lambda)(-6-\lambda)+8\right) = \\
&= -\lambda(12-2\lambda+6\lambda+\lambda^2+8) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \\
&\Rightarrow \lambda^2+4\lambda-4 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{8}}
\end{aligned}$$

Mivel találtunk egynél nagyobb sajátértéket, ezért a spektrálsugár is nagyobb lesz egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 2+\sqrt{8} > 1$$

Mint látható nem teljesül a szükséges és elégséges feltétel, ezért a konvergencia nem teljesül minden kezdővektorra.

39. A feladatunk, hogy meghatározzuk, hogy az **A** mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban egynél nagyobb abszolút értékű elemek vannak, ezért az elégséges feltétel nem használható. A szükséges és elégséges feltétellel kell próbálkoznunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda\left(\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)-\left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \\
&= -\lambda\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}\lambda+\lambda^2+\frac{1}{8}\right) = \\
&= -\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2}=0} \\
& \quad -\lambda-\frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = -\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

A sajátértékek segítségével az átmenetmátrix spektrálsugara kiszámítható.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{1}{4} < 1$$

Mivel a spektrálsugár egynél kisebb, ezért az **A** mátrixra felírt S(1) iteráció konvergens minden kezdővektorra.

40. A feladatunk, hogy eldöntsük, az **A** mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban egynél nagyobb abszolút értékű elemek vannak, ezért az elégséges feltételt nem használhatjuk. A szükséges és elégséges feltételt kell alkalmaznunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -4 & -1 \\ 0 & -4-\lambda & -4 \\ 0 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda\left((-4-\lambda)(4-\lambda)-(-4)\cdot 4\right) = \\
&= -\lambda(-16+4\lambda-4\lambda+\lambda^2+16) = \\
&= -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3}=0}
\end{aligned}$$

A sajátértékek segítségével az átmenetmátrix spektrálsugara kiszámítható.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 0 < 1$$

Ha az átmenetmátrix spektrálsugara nulla, akkor véges iterációra számíthatunk, legfeljebb n lépésben konvergál.

41. A feladatunk, hogy eldöntsük, az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban vannak egy abszolútértékű elemek, ezért az elégséges feltételt nem használhatjuk. A szükséges és elégséges feltételt kell alkalmaznunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 0) = \\
&= -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 0}
\end{aligned}$$

Mivel az átmenetmátrix felsőháromszög alakú és diagonálisában nullák vannak, ezért ránézésre is látszik, hogy a nulla háromszoros sajátértéke. Az átmenetmátrix spektrálsugara így nulla.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 0 < 1$$

Ha az átmenetmátrix spektrálsugara nulla, akkor véges iterációra számíthatunk, legfeljebb n lépésben konvergál.

Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első három lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ -ra konvergens, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Tudjuk, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{Ux} + (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}.$$

Innen a Gauss-Seidel-iteráció

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}}_{\textit{átmenetmátrix}} \cdot \mathbf{x_k} + \underbrace{(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}.$$

Ezt felhasználva, el tudjuk végezni az iteráció első három lépését.

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_0} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \\
&= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_1} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. lépés:

$$\begin{aligned}\mathbf{x_3} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_2}+(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{B}_{S(1)}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c}=\\ &= \begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Mint látható, az iteráció a 2. lépéstől kezdve ugyanazt a vektort adja. Ez az

$$\mathbf{x}=-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U}\mathbf{x}+(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}$$

fixpontegyenlet- illetve a vele ekvivalens $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldása.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy az iteráció az átmenetmátrix meghatározása nélkül is elvégezhető, vagyis nincs szükség mátrix invertálásra az iterációs lépések számításához. Ehhez az iterációt szorozzuk meg balról $(\mathbf{D}+\mathbf{L})$-el, majd rendezzük át a következőképpen.

$$\begin{aligned}\mathbf{x_{k+1}} &= -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}+(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}\\ (\mathbf{D}+\mathbf{L})\cdot\mathbf{x_{k+1}} &= -\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}+\mathbf{b}\\ \mathbf{D}\cdot\mathbf{x_{k+1}} &= -\mathbf{L}\cdot\mathbf{x_{k+1}}-\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}+\mathbf{b}\\ \mathbf{x_{k+1}} &= -\mathbf{D}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{x_{k+1}}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}-\mathbf{b})\end{aligned}$$

Koordinátákkal felírva

$$x_i^{(k+1)}=-\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}+\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}-b_i\right),\quad i=1,\dots,n.$$

A képletből látszik, hogy a következő koordináta közelítéséhez a már kiszámított új koordinátát használjuk. 3×3-as mátrix esetén az alakja

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_{11}}\cdot\left(a_{12}\cdot x_2^{(0)}+a_{13}\cdot x_3^{(0)}-b_1\right)\\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{a_{22}}\cdot\left(a_{21}\cdot x_1^{(1)}+a_{23}\cdot x_3^{(0)}-b_2\right)\\ x_3^{(1)} &= -\frac{1}{a_{33}}\cdot\left(a_{31}\cdot x_1^{(1)}+a_{32}\cdot x_2^{(1)}-b_3\right).\end{aligned}$$

Alkalmazzuk ebben az alakban a konkrét iterációt!

1. lépés:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_2^{(0)}+1\cdot x_3^{(0)}-1\right)=-(0+0-1)=1\\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_1^{(1)}-1\cdot x_3^{(0)}-1\right)=-(0-0-1)=1\\ x_3^{(1)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(1\cdot x_1^{(1)}+1\cdot x_2^{(1)}-1\right)=-(1+1-1)=-1\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_2^{(1)}+1\cdot x_3^{(1)}-1\right)=-(0-1-1)=2\\ x_2^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_1^{(2)}-1\cdot x_3^{(1)}-1\right)=-(0-(-1)-1)=0\\ x_3^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(1\cdot x_1^{(2)}+1\cdot x_2^{(2)}-1\right)=-(2+0-1)=-1\end{aligned}$$

3. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_2^{(2)}+1\cdot x_3^{(2)}-1\right)=-(0+(-1)-1)=2\\
x_2^{(3)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_1^{(3)}-1\cdot x_3^{(2)}-1\right)=-(0-(-1)-1)=0\\
x_3^{(3)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(1\cdot x_1^{(3)}+1\cdot x_2^{(3)}-1\right)=-(2+0-1)=-1
\end{aligned}$$

Látjuk, hogy a korábbi számolással egyező eredményt kaptunk.

42. Meg kell vizsgálnunk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U}=\\
&= -\begin{bmatrix}4&0&0\\-1&4&0\\0&-1&4\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=\\
&= -\begin{bmatrix}\frac14&0&0\\\frac1{16}&\frac14&0\\\frac1{64}&\frac1{16}&\frac14\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=\\
&= -\begin{bmatrix}0&-\frac14&0\\0&-\frac1{16}&-\frac14\\0&-\frac1{64}&-\frac1{16}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac14&0\\0&\frac1{16}&\frac14\\0&\frac1{64}&\frac1{16}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A konvergencia bizonyításához az elégséges feltételt alkalmazzuk.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty=\frac{5}{16}<1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát a Gauss-Seidel-iterációval mindig konvergens sorozatot kapunk. Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első 2 lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0}=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}^T=\mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}}=-(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}+(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$$

sorozattal tudjuk az iteráció lépéseit kiszámolni. Ezt felhasználva végezzük el az iteráció első két lépését!

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_0}+(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{B}_{S(1)}\cdot\mathbf{0}+\mathbf{c}=\\
&= \mathbf{c}=\begin{bmatrix}\frac14&0&0\\\frac1{16}&\frac14&0\\\frac1{64}&\frac1{16}&\frac14\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\6\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12\\\frac{13}{8}\\\frac{29}{32}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_1}+(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{B}_{S(1)}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{c}=\\
&= \begin{bmatrix}0&\frac14&0\\0&\frac1{16}&\frac14\\0&\frac1{64}&\frac1{16}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac12\\\frac{13}{8}\\\frac{29}{32}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac12\\\frac{13}{8}\\\frac{29}{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{29}{32}\\\frac{125}{64}\\\frac{253}{256}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Végezzük el a két lépést az előző feladatban ismertetett módon, az átmenetmátrix felhasználása nélkül is! A következő koordináta közelítéséhez a már kiszámított új koordinátát használjuk.
1. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{1}{4}\cdot\left(-x_2^{(0)}+0\cdot x_3^{(0)}-2\right)=-\frac{1}{4}(0+0-2)=\frac{1}{2}\\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{4}\cdot\left(-x_1^{(1)}-x_3^{(0)}-6\right)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}-0-6\right)=\frac{13}{8}\\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{4}\cdot\left(0\cdot x_1^{(1)}-x_2^{(1)}-2\right)=-\frac{1}{4}\left(0-\frac{13}{8}-2\right)=\frac{29}{32}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(-x_2^{(1)}+0\cdot x_3^{(1)}-2\right)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{13}{8}+0-2\right)=\frac{29}{32}\\
x_2^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(-x_1^{(2)}-x_3^{(1)}-6\right)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{29}{32}-\frac{29}{32}-6\right)=\frac{125}{64}\\
x_3^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_1^{(2)}-x_2^{(2)}-2\right)=-\frac{1}{4}\left(0-\frac{125}{64}-2\right)=\frac{253}{256}
\end{aligned}$$

Látjuk, hogy a korábbi számolással egyező eredményt kaptunk. Ez a megoldás akkor előnyös, ha nem kell kiszámolni az átmenetmátrixot. Ha csak konvergenciát kellett volna a feladatban bizonyítani, azt megtehettük volna az átmenetmátrix nélkül is, hiszen a Gauss–Seidel-iteráció konvergencia tétele szimmetrikus, pozitív definit mátrixok esetén (a konkrét $\mathbf{A}$ ilyen) garantálja a konvergenciát.

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.
($q=\frac{5}{16}$ a kontrakciós együttható, a $\mathbf{B}_{S(1)}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normája.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|_\infty \quad\le\quad \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_\infty &\le 10^{-3}\\
\frac{\left(\frac{5}{16}\right)^k}{1-\frac{5}{16}}\cdot\left\|\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{13}{8}\\ \frac{29}{32}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\|_\infty &\le 10^{-3}\\
\left(\frac{5}{16}\right)^k\cdot\frac{\frac{13}{8}}{\frac{11}{16}}=\left(\frac{5}{16}\right)^k\cdot\frac{13}{8}\cdot\frac{16}{11} &\le 10^{-3}\\
\frac{26}{11}\cdot 10^3 &\le \left(\frac{16}{5}\right)^k\\
\lg\left(\frac{26}{11}\cdot 10^3\right) &\le k\cdot\lg\left(\frac{16}{5}\right)\\
\frac{\lg\left(\frac{26}{11}\cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{16}{5}\right)}\approx 6,68 &\le k
\end{aligned}$$

Mint látható $k\ge 7$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot.

43. A feladat megoldásához először azt kell megvizsgálnunk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0}\in\mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens-e. Ehhez ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{32} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{11}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{11}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{11}{16} \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{11}{32} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A konvergencia vizsgálatához az elégséges feltételt alkalmazzuk.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty = \frac{13}{16} < 1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Az első 2 lépés kiszámolásához, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ alaklmas, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$$

sorozattal tudjuk az iteráció lépéseit kiszámolni. Végezzük el az iteráció első két lépését!

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_0} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)}\cdot\mathbf{0} + \mathbf{c} = \\
&= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{32} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_1} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)}\cdot\mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{11}{16} \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{11}{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{128} \\ \frac{47}{512} \\ \frac{47}{1024} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez. ($q = \frac{13}{16}$ a kontrakciós együttható, a $\mathbf{B}_{S(1)}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normája.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty &\le \frac{\left(\frac{13}{16}\right)^k}{1-\frac{13}{16}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty \le 10^{-3} \\
\left(\frac{13}{16}\right)^k \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{16}} = \left(\frac{13}{16}\right)^k \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} &\le 10^{-3} \\
\frac{4}{3}\cdot 10^3 &\le \left(\frac{16}{13}\right)^k \\
\lg\left(\frac{4}{3}\cdot 10^3\right) &\le k \cdot \lg\left(\frac{16}{13}\right) \\
\frac{\lg\left(\frac{4}{3}\cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{16}{13}\right)} \approx 34,65 &\le k
\end{aligned}$$

Látható, hogy $k \geq 35$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot.

44. A feladat megoldásához először azt kell megvizsgálnunk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz-e. Ehhez ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Alkalmazhatjuk az elégséges feltételt.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_1 = \frac{2}{3} < 1$$

Az átmenetmátrix normája egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Az első 2 lépés kiszámolásához, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t választunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$-ra konvergens az iteráció, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_k} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$$

sorozattal tudjuk az iteráció lépéseit kiszámolni.

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_0} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \\
&= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_1} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{48} \\ \frac{5}{72} \\ \frac{47}{48} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.
($q = \frac{2}{3}$ a kontrakciós együttható, a $\mathbf{B}_{S(1)}$ mátrix $\|.\|_1$ normája.)

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \ \leq\ \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_1 \leq 10^{-2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1-\frac{2}{3}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_1 &\leq 10^{-2} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{7}{6} \cdot 3 &\leq 10^{-2} \\
\frac{7}{2} \cdot 10^2 &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^k \\
\lg\left(\frac{7}{2} \cdot 10^2\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{3}{2}\right) \\
\frac{\lg\left(\frac{7}{2} \cdot 10^2\right)}{\lg\left(\frac{3}{2}\right)} \approx 14,45 &\leq k
\end{aligned}$$

Tehát $k \geq 15$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-2} pontosságot!

45. A feladat megoldásához először azt kell megvizsgálnunk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz-e. Ehhez ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{13}{50} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{6}{25} & -\frac{12}{25} \\ 0 & \frac{39}{50} & \frac{3}{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{6}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & -\frac{39}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Alkalmazhatjuk az elégséges feltételt.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty = \frac{21}{25} < 1$$

Az átmenetmátrix normája egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Az első 2 lépés kiszámolásához, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t választunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$-ra konvergens az iteráció, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_k} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$$

sorozattal tudjuk az iteráció lépéseit kiszámolni.

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_0} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \\
&= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{13}{50} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} \\ -\frac{7}{50} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_1} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{6}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & -\frac{39}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} \\ -\frac{7}{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} \\ -\frac{7}{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{250} \\ \frac{51}{625} \\ -\frac{563}{2500} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez. ($q = \frac{21}{25}$ a kontrakciós együttható, a $\mathbf{B}_{S(1)}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normája.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty &\leq \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty \leq 10^{-3} \\
\frac{\left(\frac{21}{25}\right)^k}{1-\frac{21}{25}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} \\ -\frac{7}{50} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty &\leq 10^{-3} \\
\left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{25}} = \left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{4} &\leq 10^{-3} \\
\frac{5}{4} \cdot 10^3 &\leq \left(\frac{25}{21}\right)^k \\
\lg\left(\frac{5}{4} \cdot 10^3\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{25}{21}\right) \\
\frac{\lg\left(\frac{5}{4} \cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{25}{21}\right)} \approx 40,90 &\leq k
\end{aligned}$$

Tehát $k \geq 41$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot!

2.2.4. Paraméteres iterációk: csillapított Jacobi-iteráció és a relaxációs módszer

46. A feladatunk, hogy megállapítsuk, hogy a csillapított Jacobi-iteráció milyen ω esetén lesz konvergens. A módszer képletét a következőképpen származtathatjuk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad \omega\mathbf{x} = -\omega\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D^{-1}b} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad (1-\omega)\mathbf{x} + \omega\mathbf{x} &= (1-\omega)\mathbf{x} - \omega\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D^{-1}b} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} &= \left((1-\omega)\mathbf{I} - \omega\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\right)\mathbf{x} + \mathbf{D^{-1}b}
\end{aligned}$$

A kapott fixpontegyenletből felírhatjuk az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \overbrace{\left((1-\omega)\mathbf{I} - \omega\,\underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(1)}}\right)}^{\mathbf{B}_{J(\omega)}}\mathbf{x_k} + \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Mint látható a képletben megtalálható a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrix is, mely a Jacobi-iteráció átmenetmátrixa. Azt is észrevehetjük, hogy a képletben az $\omega = 1$ választással visszakapjuk az egyszerű Jacobi-iteráció képletét. Ahhoz, hogy megállapítsuk, pontosan melyek azok az ω-k, melyekre konvergens a módszer, a szükséges és elégséges feltételt kell alkalmaznunk.

Szükséges és elégséges feltétel:
$\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$-ből indítva az iterációt konvergens lesz pontosan akkor, ha $\rho(\mathbf{B}) < 1$, ahol $\rho(\mathbf{B}) = \max_{i=1}^n |\lambda_i|$ a B mátrix spektrálsugara.

A feltétel alkalmazásához ki kell számítanunk a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot. Először azonban érdemes meghatároznunk a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ebből már könnyen származtatható a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(\omega)} &= (1-\omega)\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = (1-\omega)\mathbf{I} + w\mathbf{B}_{J(\omega)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & \frac{\omega}{4} & 0 \\ \frac{\omega}{4} & 1-\omega & \frac{\omega}{4} \\ 0 & \frac{\omega}{4} & 1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A szükséges és elégséges feltétel használatához szükségünk van a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeire. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(\omega)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & \frac{\omega}{4} & 0 \\ \frac{\omega}{4} & 1-\omega-\lambda & \frac{\omega}{4} \\ 0 & \frac{\omega}{4} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \left(\frac{\omega}{4}\right)^2\right) - \frac{\omega}{4}\left((1-\omega-\lambda)\frac{\omega}{4}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \left(\frac{\omega}{4}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{4}\right)^2\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{\omega^2}{8}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda) - \frac{\omega}{\sqrt{8}}\right)\left((1-\omega-\lambda) + \frac{\omega}{\sqrt{8}}\right) = 0
\end{aligned}$$

A három sajátérték paraméteres alakja a következő lesz.

$$\begin{aligned}
1-\omega-\lambda_1(\omega) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1(\omega) = 1-\omega} \\
1-\omega-\lambda_2(\omega) - \frac{\omega}{\sqrt{8}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{\omega}{\sqrt{8}}} \\
1-\omega-\lambda_3(\omega) + \frac{\omega}{\sqrt{8}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{\omega}{\sqrt{8}}}.
\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy az iteráció konvergens legyen a spektrálsugárnak kisebbnek kell lennie egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(\omega)}) = \max\{|\lambda_1(\omega)|, |\lambda_2(\omega)|, |\lambda_3(\omega)|\} < 1$$

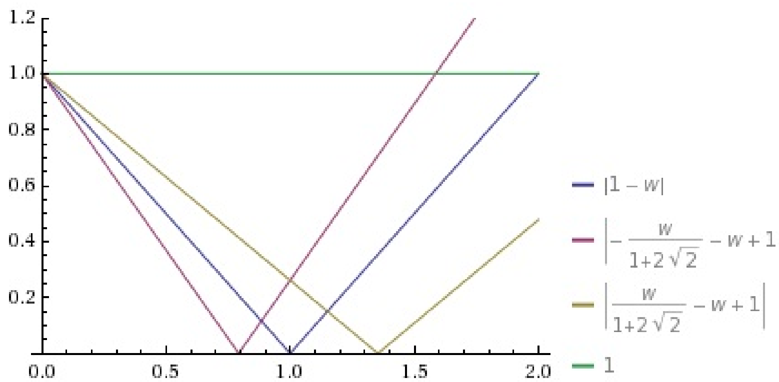
Látjuk, hogy a kapott függvények az abszolút értéken belül lineárisan függnek ω-tól, így grafikonjuk V alakú lesz. A könnyebb átláthatóság kedvéért érdemes felrajzolnunk a függvényeket. Ehhez először ki kell számítani az x tengellyel való metszéspontokat.

$$\lambda_1(\omega) = 1-\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1$$

$$\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{\omega}{\sqrt{8}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{8}}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}+1}$$

$$\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{\omega}{\sqrt{8}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{8}}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-1}$$

A metszéspontok meghatározása után már fel lehet rajzolni az ábrát.



2.1. ábra.

Amint az 2.1 ábrán is látható, arra az intervallumra lesz szükségünk, ahol mind a három függvény grafikonja 1 alatt van. Ez a $(0,\,2\omega_2)$ intervallum, hiszen ha $2\cdot\omega_2$-nél nagyobb ω, akkor $|\lambda_2|$ nagyobb lesz egynél, illetve ha ω kisebb 0, akkor a helyzet ugyanez. Tehát

$$\omega \in (0,\,2\omega_2)$$

esetén bármely kezdővektorra konvergens lesz a csillapított Jacobi-iteráció.
Az ábráról az is leolvasható, hogy az optimális ω-t a $\lambda_2(\omega)$ és $\lambda_3(\omega)$ függvények metszéspontjánál kapjuk.

$$\begin{aligned}
|\lambda_2(\omega_{opt})| &= |\lambda_3(\omega_{opt})| \\
\lambda_2(\omega_{opt}) &= -\lambda_3(\omega_{opt}) \\
1-\omega_{opt}-\frac{\omega_{opt}}{\sqrt{8}} &= -(1-\omega_{opt}+\frac{\omega_{opt}}{\sqrt{8}}) \\
1-\omega_{opt}-\frac{\omega_{opt}}{\sqrt{8}} &= -1+\omega_{opt}-\frac{\omega_{opt}}{\sqrt{8}} \\
\omega_{opt} &= 1
\end{aligned}$$

Tehát az optimális paraméter $\omega_{opt} = 1$, azaz a Jacobi-iteráció gyorsabb bármely paraméteres változatánál.

47. A feladatunk, hogy megállapítsuk, hogy a csillapított Jacobi-iteráció milyen ω esetén lesz konvergens. Ehhez első lépésként írjuk fel az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \overbrace{((1-\omega)\mathbf{I}-\omega\,\underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(1)}})}^{\mathbf{B}_{J(\omega)}}\mathbf{x_k}+\omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Mint látható a képletben megtalálható a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrix is. Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy milyen ω-ra konvergens, alkalmaznunk kell a szükséges és elégséges feltételt. A feltétel alkalmazásához ki kell számítanunk a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot. Érdemes előbb a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrixot kiszámolnunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ebből már könnyen származtatható a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(\omega)} &= (1-\omega)\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = (1-\omega)\mathbf{I} + w\mathbf{B}_{J(\omega)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & \frac{2\omega}{3} & 0 \\ \frac{4\omega}{3} & 1-\omega & \frac{4\omega}{3} \\ 0 & \frac{2\omega}{3} & 1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A szükséges és elégséges feltétel használatához szükségünk van a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeire. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(\omega)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & \frac{2\omega}{3} & 0 \\ \frac{4\omega}{3} & 1-\omega-\lambda & \frac{4\omega}{3} \\ 0 & \frac{2\omega}{3} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{8\omega^2}{9}\right) - \frac{2\omega}{3}\left((1-\omega-\lambda)\frac{4\omega}{3}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{8\omega^2}{9} - \frac{8\omega^2}{9}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{16\omega^2}{9}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda) - \frac{4\omega}{3}\right)\left((1-\omega-\lambda) + \frac{4\omega}{3}\right) = 0
\end{aligned}$$

A három sajátérték paraméteres alakja a következő lesz.

$$\begin{aligned}
1-\omega-\lambda_1(\omega) = 0 &\Rightarrow \boxed{\lambda_1(\omega) = 1-\omega} \\
1-\omega-\lambda_2(\omega) - \frac{4\omega}{3} = 0 &\Rightarrow \boxed{\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{4\omega}{3}} \\
1-\omega-\lambda_3(\omega) + \frac{4\omega}{3} = 0 &\Rightarrow \boxed{\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{4\omega}{3}}
\end{aligned}$$

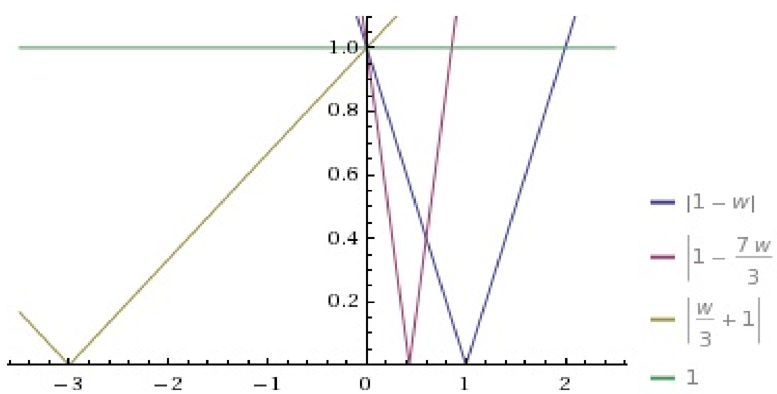
Ahhoz, hogy az iteráció konvergens legyen, a spektrálsugárnak kisebbnek kell lennie egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(\omega)}) = \max\{|\lambda_1(\omega)|, |\lambda_2(\omega)|, |\lambda_3(\omega)|\} < 1$$

Látjuk, hogy a kapott függvények az abszolút értéken belül lineárisan függnek ω-tól, így grafikonjuk V alakú lesz. A könnyebb átláthatóság kedvéért érdemes felrajzolnunk a függvényeket. Ehhez ki kell számítani az x tengellyel való metszéspontokat.

$$\begin{aligned} \lambda_1(\omega) &= 1-\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1 \\ \lambda_2(\omega) &= 1-\omega-\frac{4\omega}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{1+\frac{4}{3}} = \frac{3}{7} \\ \lambda_3(\omega) &= 1-\omega+\frac{4\omega}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{1-\frac{4}{3}} = -3 \end{aligned}$$

A metszéspontok meghatározása után már fel tudjuk rajzolni az ábrát.



2.2. ábra.

Azok az ω-k lennének jók, ahol mindhárom függvény grafikon 1 alatt van, hiszen ekkor lenne a spektrálsugár kisebb egynél. Azonban - mint az a 2.2 ábrán is látható - nincs olyan pont ahol mindhárom függvény 1 alatt lenne. Mindhárom metszi az y tengelyt az 1 pontban, azonban, ha $\omega > 0$, akkor a $|\lambda_3(\omega)| > 1$, ha $\omega < 0$ akkor $|\lambda_1(\omega)| > 1$ és $|\lambda_2(\omega)| > 1$. Ebből következik, hogy nincs olyan ω amire konvergens lenne!

48. Az a feladatunk, hogy megállapítsuk, hogy a csillapított Jacobi-iteráció milyen ω esetén lesz konvergens. Ehhez első lépésként írjuk fel az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \overbrace{\left((1-\omega)\mathbf{I} - \omega \underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(1)}}\right)}^{\mathbf{B}_{J(\omega)}} \mathbf{x_k} + \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Mint látható a képletben megtalálható a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrix is. Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy milyen ω-ra konvergens, alkalmaznunk kell a szükséges és elégséges feltételt. A feltétel alkalmazásához ki kell számítanunk a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot. Először azonban érdemes külön kiszámolni a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután már fel tudjuk írni a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(\omega)} &= (1-\omega)\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = (1-\omega)\mathbf{I} + w\mathbf{B}_{J(\omega)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & \frac{2\omega}{3} & 0 \\ \frac{2\omega}{3} & 1-\omega & \frac{2\omega}{3} \\ 0 & \frac{2\omega}{3} & 1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A szükséges és elégséges feltétel használatához szükségünk van a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeire. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(\omega)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & \frac{2\omega}{3} & 0 \\ \frac{2\omega}{3} & 1-\omega-\lambda & \frac{2\omega}{3} \\ 0 & \frac{2\omega}{3} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{4\omega^2}{9}\right) - \frac{2\omega}{3}\left((1-\omega-\lambda)\frac{2\omega}{3}\right) \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{4\omega^2}{9} - \frac{4\omega^2}{9}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{8\omega^2}{9}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda) - \frac{\sqrt{8}\omega}{3}\right)\left((1-\omega-\lambda) + \frac{\sqrt{8}\omega}{3}\right) = 0
\end{aligned}$$

A három sajátérték paraméteres alakja a következő lesz.

$$\begin{aligned}
1-\omega-\lambda_1(\omega) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1(\omega) = 1-\omega} \\
1-\omega-\lambda_2(\omega) - \frac{\sqrt{8}\omega}{3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{\sqrt{8}\omega}{3}} \\
1-\omega-\lambda_3(\omega) + \frac{\sqrt{8}\omega}{3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{\sqrt{8}\omega}{3}}
\end{aligned}$$

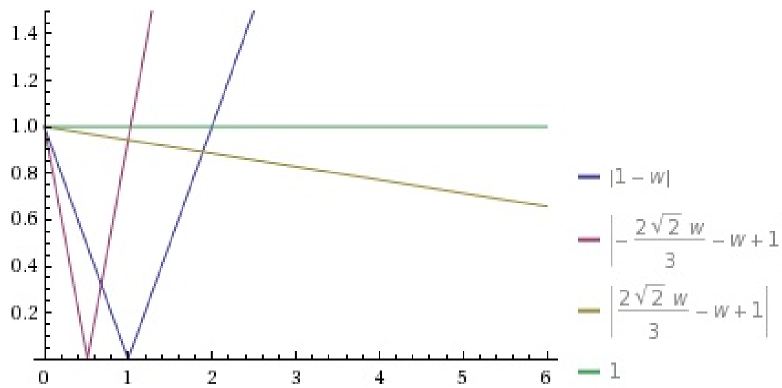
Ahhoz, hogy az iteráció konvergens legyen, a spektrálsugárnak kisebbnek kell lennie egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(\omega)}) = \max\{|\lambda_1(\omega)|, |\lambda_2(\omega)|, |\lambda_3(\omega)|\} < 1$$

A könnyebb átláthatóság kedvéért érdemes felrajzolnunk a függvényeket. Ehhez ki kell számítani az x tengellyel vett metszéspontokat.

$$\lambda_1(\omega) = 1 - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1$$
$$\lambda_2(\omega) = 1 - \omega - \frac{\sqrt{8}\omega}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{8}}{3}}$$
$$\lambda_3(\omega) = 1 - \omega + \frac{\sqrt{8}\omega}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{8}}{3}}$$

A metszéspontok meghatározása után már fel lehet rajzolni az ábrát.



2.3. ábra.

Amint az a 2.3 ábrán is látható, arra az intervallumra lesz szükségünk ahol mind a három függvény grafikon 1 alatt van. Ez a $(0, 2\omega_2)$ intervallum, hiszen ha $2\omega_2$-nél nagyobb ω, akkor $|\lambda_2|$ nagyobb lesz egynél, bár a többi 1 alatt marad, de a λ_2 miatt a spektrálsugár így is nagyobb lesz 1-nél. Ha $\omega < 0$ akkor mind a három függvény egynél nagyobb. Tehát

$$\omega \in (0, 2\omega_2)$$

esetén bármely kezdővektorra konvergens lesz a csillapított Jacobi-iteráció.
Az ábráról az is leolvasható, hogy az optimális ω-t a λ_2 és λ_3 metszéspontjánál kapjuk.

$$\begin{aligned}
|\lambda_2(\omega_{opt})| &= |\lambda_3(\omega_{opt})| \\
\lambda_2(\omega_{opt}) &= -\lambda_3(\omega_{opt}) \\
1 - \omega_{opt} - \frac{\sqrt{8}\omega_{opt}}{3} &= -(1 - \omega_{opt} + \frac{\sqrt{8}\omega_{opt}}{3}) \\
1 - \omega_{opt} - \frac{\sqrt{8}\omega_{opt}}{3} &= -1 + \omega_{opt} - \frac{\sqrt{8}\omega_{opt}}{3} \\
\omega_{opt} &= 1
\end{aligned}$$

Tehát az optimális paraméter $\omega_{opt} = 1$, azaz a Jacobi-iteráció gyorsabb bármely paraméteres változatánál.

49. Az a feladatunk, hogy megállapítsuk, hogy a csillapított Jacobi-iteráció milyen ω esetén lesz konvergens $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$-re. Ehhez először írjuk fel az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \overbrace{((1-\omega)\mathbf{I} - \omega \underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(1)}})}^{\mathbf{B}_{J(\omega)}} \mathbf{x_k} + \omega \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Mint látható, a képletben megtalálható a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrix is. Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy milyen ω-ra konvergens, alkalmaznunk kell a szükséges és elégséges feltételt. A feltétel alkalmazásához ki kell számítanunk a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot. Először azonban érdemes külön kiszámolni a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrixot, így később egyszerűbb lesz felírni a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután már fel tudjuk írni a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(\omega)} &= (1-\omega)\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = (1-\omega)\mathbf{I} + w\mathbf{B}_{J(\omega)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & -\frac{\omega}{4} \\ -\omega & 1-\omega & -\omega \\ -\omega & 0 & 1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A szükséges és elégséges feltétel használatához szükségünk van a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeire. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(\omega)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & 0 & -\frac{\omega}{4} \\ -\omega & 1-\omega-\lambda & -\omega \\ -\omega & 0 & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\omega-\lambda)((1-\omega-\lambda)^2 + 0\cdot\omega) - \frac{\omega}{4}(\omega(1-\omega-\lambda)) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{\omega^2}{4}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda) - \frac{\omega}{2}\right)\left((1-\omega-\lambda) + \frac{\omega}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

A három sajátérték paraméteres alakja a következő lesz.

$$\begin{aligned}
1-\omega-\lambda_1(\omega) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1(\omega) = 1-\omega} \\
1-\omega-\lambda_2(\omega) - \frac{\omega}{2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{\omega}{2}} \\
1-\omega-\lambda_3(\omega) + \frac{\omega}{2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{\omega}{2}}
\end{aligned}$$

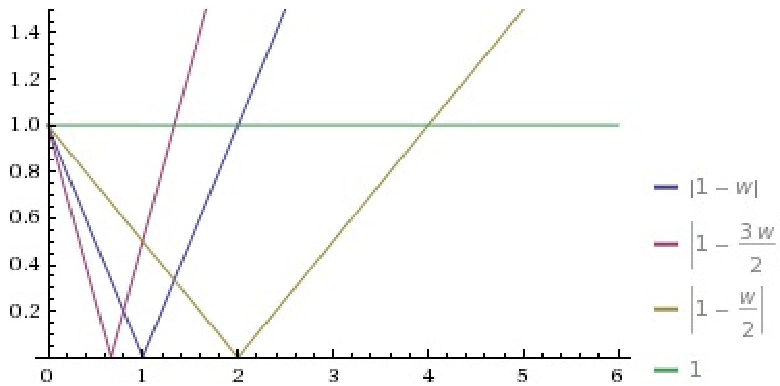
Ahhoz, hogy az iteráció konvergens legyen, a spektrálsugárnak kisebbnek kell lennie egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(\omega)}) = \max\{|\lambda_1(\omega)|, |\lambda_2(\omega)|, |\lambda_3(\omega)|\} < 1$$

A könnyebb átláthatóság kedvéért érdemes felrajzolni a függvényeket. Ehhez ki kell számítani az x tengellyel való metszéspontokat.

$$\lambda_1(\omega) = 1 - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1$$
$$\lambda_2(\omega) = 1 - \omega - \frac{\omega}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$
$$\lambda_3(\omega) = 1 - \omega + \frac{\omega}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

A metszéspontok meghatározása után már fel lehet rajzolni az ábrát.



2.4. ábra.

Amint az a 2.4 ábrán is látható, arra az intervallumra lesz szükségünk ahol mind a három függvénygrafikon 1 alatt van. Ez a $(0, 2\omega_2)$ intervallum, hiszen ha $2\omega_2$-nél nagyobb ω, akkor $|\lambda_2|$ nagyobb lesz egynél, emiatt a spektrálsugár meghaladja egyet. Ha $\omega < 0$ akkor mind a három függvény egynél nagyobb. Tehát

$$\omega \in (0, \frac{4}{3})$$

esetén bármely kezdővektorra konvergens lesz a csillapított Jacobi-iteráció.
Az ábráról az is leolvasható, hogy az optimális ω-t a λ_2 és λ_3 metszéspontjánál kapjuk:

$$\begin{aligned}
|\lambda_2(\omega_{opt})| &= |\lambda_3(\omega_{opt}) \\
\lambda_2(\omega_{opt}) &= -\lambda_3(\omega_{opt}) \\
1 - \omega_{opt} - \frac{\omega_{opt}}{2} &= -(1 - \omega_{opt} + \frac{\omega_{opt}}{2}) \\
1 - \omega_{opt} - \frac{\omega_{opt}}{2} &= -1 + \omega_{opt} - \frac{\omega_{opt}}{2} \\
\omega_{opt} &= 1
\end{aligned}$$

Tehát az optimális paraméter $\omega_{opt} = 1$, azaz a Jacobi-iteráció gyorsabb bármely paraméteres változatánál.

50. Az a feladatunk, hogy megállapítsuk, hogy a csillapított Jacobi-iteráció milyen ω esetén lesz konvergens. Ehhez első lépésként írjuk fel az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \overbrace{((1-\omega)\mathbf{I} - \omega \underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(1)}})}^{\mathbf{B}_{J(\omega)}} \mathbf{x_k} + \omega \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Mint látható a képletben megtalálható a $B_{J(1)}$ mátrix is. Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy milyen ω-ra konvergens, alkalmaznunk kell a szükséges és elégséges feltételt. A feltétel alkalmazásához ki kell számítanunk a $B_{J(\omega)}$ mátrixot. Érdemes előbb a $B_{J(1)}$ mátrixot kiszámolnunk.

$$
\begin{aligned}
B_{J(1)} &= -D^{-1}(L+U) = \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ezután már fel tudjuk írni a $B_{J(\omega)}$ mátrixot:

$$
\begin{aligned}
B_{J(\omega)} &= (1-\omega)I - wD^{-1}(L+U) = (1-\omega)I + wB_{J(\omega)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & \frac{2\omega}{5} \\ \frac{3\omega}{5} & 1-\omega & \frac{3\omega}{5} \\ \frac{2\omega}{5} & 0 & 1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

A szükséges és elégséges feltétel használatához szükségünk van a $B_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeire. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$
\begin{aligned}
\det(B_{J(\omega)} - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & 0 & \frac{2\omega}{5} \\ \frac{3\omega}{5} & 1-\omega-\lambda & \frac{3\omega}{5} \\ \frac{2\omega}{5} & 0 & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\omega-\lambda)(1-\omega-\lambda)^2 - \frac{2\omega}{5}\,\frac{2\omega}{5}(1-\omega-\lambda) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{4\omega^2}{25}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda) - \frac{2\omega}{5}\right)\left((1-\omega-\lambda) + \frac{2\omega}{5}\right) = 0
\end{aligned}
$$

A három sajátérték paraméteres alakja a következő lesz.

$$
\begin{aligned}
1-\omega-\lambda_1(\omega) = 0 \;&\Rightarrow\; \boxed{\lambda_1(\omega) = 1-\omega} \\
1-\omega-\lambda_2(\omega) - \frac{2\omega}{5} = 0 \;&\Rightarrow\; \boxed{\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{2\omega}{5}} \\
1-\omega-\lambda_3(\omega) + \frac{2\omega}{5} = 0 \;&\Rightarrow\; \boxed{\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{2\omega}{5}}
\end{aligned}
$$

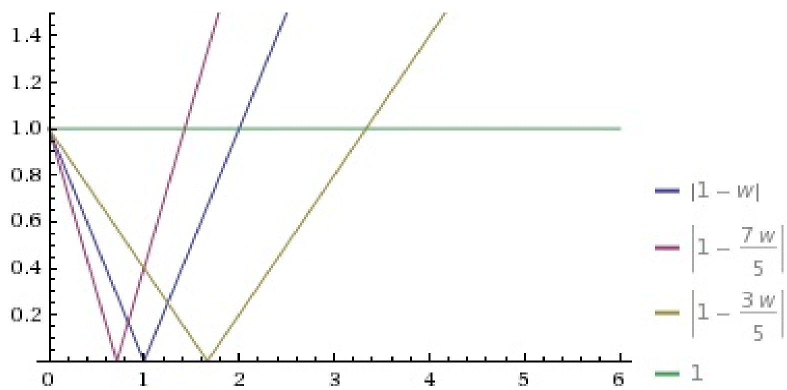
Ahhoz, hogy az iteráció konvergens legyen, a spektrálsugárnak kisebbnek kell lennie egynél.

$$
\rho(B_{J(\omega)}) = \max\{|\lambda_1(\omega)|; |\lambda_2(\omega)|; |\lambda_3(\omega)|\} < 1
$$

A könnyebb átláthatóság kedvéért érdemes felrajzolni a függvényeket. Ehhez ki kell számítani az x tengellyel való metszéspontokat.

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\omega) = 1-\omega = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_1 = 1 \\
\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{2\omega}{5} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{1+\frac{2}{5}} = \frac{5}{7} \\
\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{2\omega}{5} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

A metszéspontok meghatározása után már fel lehet rajzolni az ábrát.



2.5. ábra.

Amint az a 2.5 ábrán is látható, arra az intervallumra lesz szükségünk ahol mind a három függvény grafikon 1 alatt van. Ez a $(0, 2\omega_2)$ intervallum, hiszen ha $2\omega_2$-nél nagyobb ω, akkor $|\lambda_2|$ nagyobb lesz egynél, emiatt a spektrálsugár meghaladja egyet. Ha $\omega < 0$, akkor mind a három függvény egynél nagyobb. Tehát

$$\omega \in (0, \frac{10}{7})$$

esetén bármely kezdővektorra konvergens lesz a csillapított Jacobi-iteráció.
Az ábráról az is leolvasható, hogy az optimális ω-t a λ_2 és λ_3 metszéspontjánál kapjuk.

$$\begin{aligned}
|\lambda_2(\omega_{opt})| &= |\lambda_3(\omega_{opt})| \\
\lambda_2(\omega_{opt}) &= -\lambda_3(\omega_{opt}) \\
1-\omega_{opt}-\frac{2\omega_{opt}}{5} &= -(1-\omega_{opt}+\frac{2\omega_{opt}}{5}) \\
1-\omega_{opt}-\frac{2\omega_{opt}}{5} &= -1+\omega_{opt}-\frac{2\omega_{opt}}{5} \\
\omega_{opt} &= 1
\end{aligned}$$

Tehát az optimális paraméter $\omega_{opt} = 1$, azaz a Jacobi-iteráció gyorsabb bármely paraméteres változatánál.

51. A relaxációs módszer képletét a következőképpen származtathatjuk. Induljunk ki a Gauss–Seidel-iteráció fixpontegyenletté való átrendezéséből.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{Ux} + (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x} &= -\mathbf{U}\mathbf{x}+\mathbf{b} \quad |\cdot\omega \\
\mathbf{D}\mathbf{x} &= \mathbf{D}\mathbf{x} \quad |\cdot(1-\omega) \\
\omega(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x}+(1-\omega)\mathbf{D}\mathbf{x} &= [-\omega\mathbf{U}+(1-\omega)\mathbf{D}]\cdot\mathbf{x}+\omega\mathbf{b} \\
(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})\mathbf{x} &= [(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}]\cdot\mathbf{x}+\omega\mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= (\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}]\cdot\mathbf{x}+\omega(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}$$

A fixpontegyenletből felírhatjuk az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}]}_{\mathbf{B}_{S(\omega)}}\cdot\mathbf{x_k}+\underbrace{\omega(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{S(\omega)}}$$

Írjuk fel a konkrét **A**-ra a relaxációs módszer átmenetmátrixát!

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(\omega)} &= (\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}] = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \omega & 1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\left(\begin{bmatrix} 2(1-\omega) & 0 \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & -2\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\omega & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2(1-\omega) & 2\omega \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega \\ -\omega(1-\omega) & -\omega^2+1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\omega = 1$ esetén a Gauss–Seidel-iteráció átmenetmátrixa

$$\mathbf{B}_{S(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrix sajátértékei: 0 és -1, ezért $\rho(\mathbf{B}_{S(1)}) = 1$, így a Gauss–Seidel iteráció általában nem konvergál. Keressünk olyan ω paramétert, melyre a módszer konvergál!
Például $\omega = \frac{1}{2}$ esetén

$$\mathbf{B}_{S(\frac{1}{2})} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Látjuk, hogy $\|\mathbf{B}_{S(\frac{1}{2})}\|_1 = \frac{3}{4}$, így a módszer konvergens minden kezdővektorra.

52. A relaxációs módszer néhány lépésének számolásához nincs szükségünk az átmenetmátrixra, helyette a módszer koordinátás alakját használjuk. Ennek előnye, hogy nem kell mátrix inverzet számolni hozzá. A koordinátánkénti számoláshoz alakítsuk át a formulát.
$(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})$-el szorozzuk be az iterációt.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})\cdot\mathbf{x_{k+1}} &= [(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}]\cdot\mathbf{x_k}+\omega\mathbf{b} \\
\mathbf{D}\cdot\mathbf{x_{k+1}} &= -\omega\mathbf{L}\cdot\mathbf{x_{k+1}}-\omega\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}+\omega\mathbf{b}+(1-\omega)\mathbf{D}\cdot\mathbf{x_k} \\
\mathbf{x_{k+1}} &= \underbrace{-\omega\mathbf{D^{-1}}\cdot[\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{x_{k+1}}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}-\mathbf{b}\,]}_{\omega\mathbf{x_{k+1}}^{S(1)}}+(1-\omega)\mathbf{x_k}
\end{aligned}$$

Mint látható a képlet felírható a Gauss–Seidel-iteráció $k+1$. lépésével és a k. közelítő vektor segítségével. Írjuk fel a koordinátás alakot is (a koordináták alsó indexbe, a lépés száma felső indexbe kerül).

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{\omega}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)}+\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}-b_i\right)+(1-\omega)x_i^{(k)}, \quad i=1,\dots,n.$$

A kapott alakból könnyen számolható az iteráció egy lépése. Azt is észrevehetjük, hogy a képletben $\omega = 1$ választással visszakapjuk a Gauss–Seidel-iteráció képletét.
2×2-es mátrix esetén az k. lépés alakja

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{\omega}{a_{11}} \cdot \left(a_{12} \cdot x_2^{(k)} - b_1\right) + (1-\omega)x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{\omega}{a_{22}} \cdot \left(a_{21} \cdot x_1^{(k+1)} - b_2\right) + (1-\omega)x_2^{(k)} \end{aligned}$$

Alkalmazzuk $\omega = \frac{1}{2}$ esetén a konkrét iteráció két lépését!
1. lépés:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(x_2^{(0)} - 3\right) + (1-\omega)x_1^{(0)} = \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot (-3) = \frac{3}{8} \\ x_2^{(1)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(x_1^{(1)} - (-3)\right) + (1-\omega)x_2^{(0)} = \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8} + 3\right) = -\frac{27}{64} \end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(x_2^{(1)} - 3\right) + (1-\omega)x_1^{(1)} = \\ &= \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{27}{64} - 3\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right) = \frac{219}{512} + \frac{3}{16} = \frac{315}{512} \\ x_2^{(2)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(x_1^{(2)} - (-3)\right) + (1-\omega)x_2^{(1)} = \\ &= \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{315}{512} + 3\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{27}{64}\right) = -\frac{1851}{4096} - \frac{27}{128} = -\frac{2715}{4096} \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy konvergenciát bizonyítsunk valamely paraméter esetén, használhatjuk a tanult konvergenciatételeket.

1. Tétel: Ha a relaxációs módszer konvergens, akkor $\omega \in (0;2)$.
Ez azt jelenti, hogy az $\omega \leq 0$ és $2 \leq \omega$ paraméterekkel nem kell foglalkoznunk konvergencia vizsgálat esetén.

2. Tétel: Ha az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, pozitív definit és $\omega \in (0;2)$, akkor a relaxációs módszer bármely kezdővektorra konvergens.

A feladatban megadott mátrixra a 2. Tétel feltételei teljesülnek, ezért $\omega \in (0;2)$ esetén a relaxációs módszer konvergens. Írjuk fel a konkrét $\mathbf{A}$-ra a relaxációs módszer átmenetmátrixát!

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{S(\omega)} &= (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}] = \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \omega & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 4(1-\omega) & 0 \\ 0 & 4(1-\omega) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{16}\omega & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4(1-\omega) & \omega \\ 0 & 4(1-\omega) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1-\omega & -\frac{1}{4}\omega \\ -\frac{1}{4}\omega(1-\omega) & \frac{1}{16}\omega^2 + 1 - \omega \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A Maple V program segítségével megkaphatjuk a mátrix sajátértékeit, amelyből a spektrálsugár számolható.

$$\lambda_{1,2}(\omega) = 1 - \omega + \frac{1}{32}\omega^2 \pm \frac{1}{32}\omega\sqrt{\omega^2 - 64\omega + 64}$$

Mivel ezek nagyon bonyolultak, ezért más megoldást választunk ω keresésére.
$\omega = 1$ esetén a Gauss–Seidel-iteráció átmenetmátrixa

$$\mathbf{B}_{S(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrix sajátértékei: 0 és $\frac{1}{16}$, ezért $\rho(\mathbf{B}_{S(1)}) = \frac{1}{16}$, így a Gauss–Seidel iteráció konvergál minden kezdővektorra. Keressünk olyan ω paramétert, melyre a módszer gyorsabb! A spektrálsugár alapján számolni komplikált lenne, helyette mátrixnormával dolgozunk.
$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_1 = \frac{5}{16} = 0,3125$, ezért olyan paramétert keresünk, melyre az átmenetmátrix 1-es normája ennél kisebb. Például $\omega = 1,01$ esetén

$$\mathbf{B}_{S(1,01)} = \begin{bmatrix} -0,01 & -0,2525 \\ 0,002525 & 0,05375625 \end{bmatrix}.$$

Látjuk, hogy $\|\mathbf{B}_{S(1,01)}\|_1 = |-0,2525| + 0,05375625 = 0,30625625$, így az 1-es normában számolt kontrakciós együttható kisebb, mint $\omega = 1$ esetén. Ebben a vektornormában jobb becslés adható a módszerre.

53. Írjuk fel a koordinátás alakot, mellyel az iterációt végezzük.

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right) + (1-\omega) x_i^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, n$$

3×3-as mátrix esetén az k. lépés alakja

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -\frac{\omega}{a_{11}} \cdot \left(a_{12} \cdot x_2^{(k)} + a_{13} \cdot x_3^{(k)} - b_1 \right) + (1-\omega) x_1^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{\omega}{a_{22}} \cdot \left(a_{21} \cdot x_1^{(k+1)} + a_{23} \cdot x_3^{(k)} - b_2 \right) + (1-\omega) x_2^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{\omega}{a_{33}} \cdot \left(a_{31} \cdot x_1^{(k+1)} + a_{32} \cdot x_2^{(k+1)} - b_3 \right) + (1-\omega) x_3^{(k)}
\end{aligned}$$

Alkalmazzuk $\omega = \frac{1}{2}$ esetén a konkrét iteráció két lépését az $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ kezdővektorral!
1. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_2^{(0)} - 2 \right) + (1-\omega) x_1^{(0)} = \left(-\frac{1}{8} \right) \cdot (-2) = \frac{1}{4} \\
x_2^{(1)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_1^{(1)} - x_3^{(0)} - 6 \right) + (1-\omega) x_2^{(0)} = \left(-\frac{1}{8} \right) \left(-\frac{1}{4} - 6 \right) = \frac{25}{32} \\
x_3^{(1)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_2^{(1)} - 2 \right) + (1-\omega) x_3^{(0)} = \left(-\frac{1}{8} \right) \left(\frac{25}{32} - 2 \right) = \frac{39}{256}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_2^{(1)} - 2 \right) + (1-\omega) x_1^{(1)} = \\
&= \left(-\frac{1}{8} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} - 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{9}{32} + \frac{1}{8} = \frac{13}{32} \\
x_2^{(2)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_1^{(2)} - 6 \right) + (1-\omega) x_2^{(1)} = \\
&= \left(-\frac{1}{8} \right) \left(\frac{13}{32} - 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{32} \right) = \frac{179}{256} + \frac{25}{64} = \frac{279}{256} \\
x_3^{(2)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_2^{(2)} - 2 \right) + (1-\omega) x_3^{(1)} = \\
&= \left(-\frac{1}{8} \right) \left(\frac{279}{256} - 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{39}{256} \right) = \frac{233}{2048} + \frac{39}{512} = \frac{389}{2048}
\end{aligned}$$

A feladatban megadott mátrixra a 2. Tétel feltételei teljesülnek, ezért $\omega \in (0;2)$ esetén a relaxációs módszer konvergens. Nézzük a speciálisan tridiagonális mátrixokra igaz konvergenciatételt!

3. Tétel: Ha az **A** mátrix szimmetrikus, pozitív definit és tridiaginális, akkor a Jacobi-iteráció, a Gauss–Seidel-iteráció és a relaxációs módszer $\omega \in (0;2)$ esetén bármely kezdővektorra konvergens. Az optimális paraméter

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(\mathbf{B}_{J(1)})}} \in (0;2)$$

Az optimális paraméterre az optimális spektrálsugár értéke

$$\rho(\mathbf{B}_{S(\omega_{opt})}) = \omega_{opt} - 1 < \rho(\mathbf{B}_{S(1)}) = \rho(\mathbf{B}_{J(1)})^2, \quad \text{ha } \rho(\mathbf{B}_{J(1)}) > 0.$$

Ha $\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = 0$, akkor

$$\rho(\mathbf{B}_{S(\omega_{opt})}) = \rho(\mathbf{B}_{S(1)}) = \rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = 0.$$

Számítsuk ki a Jacobi-iteráció átmenetmátrixát, hogy alkalmazni tudjuk a tételt!

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda \cdot (\lambda^2 - \frac{1}{16}) - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\lambda\right) = \\
&= -\lambda^3 + \frac{1}{8}\lambda = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \\
&\Rightarrow -\lambda^2 + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{8} \\
&\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}}, \quad \boxed{\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{8}}}
\end{aligned}$$

Most már tudjuk az átmenetmátrix spektrálsugarát.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

A 3. Tétel képletébe helyettesítve

$$\begin{aligned}
\omega_{opt} &= \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{8}}} = \frac{8}{4+\sqrt{14}} \approx 1,0334 \\
\rho(\mathbf{B}_{S(\omega_{opt})}) &= \omega_{opt} - 1 \approx 0,0334.
\end{aligned}$$

54. A feladatban megadott mátrixra a 2. Tétel feltételei teljesülnek, ezért $\omega \in (0;2)$ esetén a relaxációs módszer konvergens. Sőt a 3. Tétel feltételei is teljesülnek. Alkalmazzuk rá ez utóbbit. Számítsuk ki a Jacobi-iteráció átmenetmátrixát!

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\ &= -\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

A karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}_{J(1)}-\lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix}-\lambda&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\lambda&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&-\lambda\end{vmatrix} = \\ &= -\lambda\cdot(\lambda^2-\frac{1}{4})-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\lambda\right) = \\ &= -\lambda^3+\frac{1}{4}\lambda = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \\ &\Rightarrow -\lambda^2+\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \boxed{\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

Most már tudjuk az átmenetmátrix spektrálsugarát.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A 3. Tétel képletébe helyettesítve

$$\begin{aligned}\omega_{opt} &= \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{4}{2+\sqrt{2}} \approx 1,1716 \\ \rho(\mathbf{B}_{S(\omega_{opt})}) &= \omega_{opt}-1 \approx 0,1716.\end{aligned}$$

2.2.5. Richardson-iteráció

55. A feladatunk, hogy megállapítsuk konvergens lesz-e a Richardson-iteráció. Ehhez kétféle megoldási módszert használhatunk.

1. módszer:
Hivatkozunk a Richardson-iteráció tanult konvergencia tételére, mely szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra $p \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$ paraméter esetén az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I}-p\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{x_k}+p\cdot\mathbf{b}$$

iteráció bármely kezdővektorra konvergens.
Felhasználva, hogy $0 < \rho(\mathbf{A}) < c$, fel tudjuk írni a következő egyenlőtlenséget.

$$0<\rho(\mathbf{A})<c \quad \Rightarrow \quad 0<p=\frac{2}{c}<\frac{2}{\rho(\mathbf{A})} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{c} \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$$

Ezzel beláttuk, hogy a Richardson-iteráció konvergens lesz $\forall\ \mathbf{x_0}$-ra!

2. módszer:
A szükséges és elégséges feltételt is használhatjuk, azaz vizsgálhatjuk konkrétan az átmenetmátrix spektrálsugarát, $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesülését.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = -\frac{2}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \frac{2}{c}\,\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{x} + \frac{2}{c}\,\mathbf{b}$$

Írjuk fel a fixpontegyenletből a Richardson-iterációt!

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{x_k} + \frac{2}{c}\,\mathbf{b}$$

Látjuk, hogy az átmenetmátrix $\mathbf{B} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{c}\mathbf{A}\right)$.
Írjuk fel a kapcsolatot $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sajátértékei között! Sejtés: $\lambda_i(\mathbf{B}) = 1 - \frac{2}{c}\lambda_i$.
Ezt könnyen beláthatjuk az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt sajátérték egyenletből.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Av}_i &= \lambda_i\mathbf{v}_i \\
-\frac{2}{c}\mathbf{Av}_i &= -\frac{2}{c}\lambda_i\mathbf{v}_i \\
\mathbf{v}_i - \frac{2}{c}\mathbf{Av}_i &= \mathbf{v}_i - \frac{2}{c}\lambda_i\mathbf{v}_i \\
\underbrace{\left(\mathbf{I} - \frac{2}{c}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{B}}\mathbf{v}_i &= \left(1 - \frac{2}{c}\lambda_i\right)\mathbf{v}_i
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ sajátértékeire felírt feltétel mit ad $\mathbf{B}$ sajátértékeire.

$$\begin{aligned}
0 < \lambda_i < c& \\
0 < \frac{2}{c}\lambda_i < 2& \\
-1 < \frac{2}{c}\lambda_i - 1 < 1& \\
-1 < 1 - \frac{2}{c}\lambda_i < 1& \quad \Rightarrow \quad \left|1 - \frac{2}{c}\lambda_i\right| < 1
\end{aligned}$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesül, azaz a Richardson-iteráció bármely kezdővektorra konvergens lesz!

56. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A Gersgorin tételből tudjuk, hogy $\mathbf{A}$ pozitív definit és sajátértékeire a $2 < \lambda_i < 6$ becslés adható. Azonban a Gersgorin tétel ismerete nélkül a sajátértékek előállításával is megoldható a feladat.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 1) + (-1)\cdot(4-\lambda) = \\
&= (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 2) = (4-\lambda)(4-\lambda-\sqrt{2})(4-\lambda+\sqrt{2}) = 0
\end{aligned}$$

Innen a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 4 - \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 4 + \sqrt{2}.$$

Látjuk hogy a feladat kitűzésében szereplő $\rho(\mathbf{A}) < 6$ korlát helyes.
Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a 30. példában szereplő Richardson-iterációt.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{6}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x_k} + \frac{2}{6}\,\mathbf{b} = \underbrace{\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{x_k} + \underbrace{\frac{1}{3}\,\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}$$

Látjuk, hogy a $p = \frac{1}{3}$ paramétert kell alkalmaznunk a Richardson-iterációban. A 30. feladat megoldásában bizonyítottuk a módszer konvergenciáját bármely kezdőértékre. Számítsuk ki az iteráció $\mathbf{B}$ átmenetmátrixát és $\mathbf{c}$ vektorát.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{c} &= \frac{1}{3}\,\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Végezzünk két lépést az iterációval az $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ vektorból indulva!
1. lépés:

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{c} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A k. közelítő vektorra adott hibabecslés alakja

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_2 \le \frac{q^k}{1-q}\,\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_2,$$

ahol $q = \|\mathbf{B}\|_F = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0,88 < 1$ a kontrakciós együttható és

$$\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_2 = \|\mathbf{x_1}\|_2 = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Mivel a könnyen számolható mátrixnormák közül csak a *Frobenius*-norma egynél kisebb, így a hibabecslést a hozzá illeszkedő 2-es vektornormában kell felírnunk. Az iteráció hibabecslése

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_2 \le \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^k}{1 - \frac{\sqrt{7}}{3}} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \approx (0,88)^k \cdot 15,46.$$

57. El kell döntenünk, hogy konvergens lesz-e a Richardson-iteráció. Ehhez kétféle megoldási módszert használhatunk.

1. módszer:
Hivatkozunk a Richardson-iteráció tanult konvergencia tételére, mely szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra $p \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$ paraméter esetén az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció bármely kezdővektorra konvergens.
Felhasználva, hogy $0 < \rho(\mathbf{A}) < c$, fel tudjuk írni a következő egyenlőtlenséget.

$$0 < \rho(\mathbf{A}) < c < \frac{9}{7}c$$

$$p = \frac{7}{9c} < \frac{1}{\rho(\mathbf{A})} < \frac{2}{\rho(\mathbf{A})} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{7}{9c} \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$$

Ezzel beláttuk, hogy a Richardson-iteráció konvergens lesz $\forall\ \mathbf{x_0}$-ra!

2. módszer:
A szükséges és elégséges feltételt is használhatjuk, azaz vizsgálhatjuk konkrétan az átmenetmátrix spektrálsugarát, $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesülését.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = -\frac{7}{9c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \frac{7}{9c}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x} + \frac{7}{9c}\mathbf{b}$$

Írjuk fel a fixpontegyenletből a Richardson-iterációt!

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x_k} + \frac{7}{9c}\mathbf{b}$$

Látjuk, hogy az átmenetmátrix $\mathbf{B} = \left(\mathbf{I} - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\right)$.
Írjuk fel a kapcsolatot $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sajátértékei között! Sejtés: $\lambda_i(\mathbf{B}) = 1 - \frac{7}{9c}\lambda_i$.
Ezt könnyen beláthatjuk az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt sajátérték egyenletből.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \\
-\frac{7}{9c}\mathbf{A}\mathbf{v}_i &= -\frac{7}{9c}\lambda_i \mathbf{v}_i \\
\mathbf{v}_i - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i - \frac{7}{9c}\lambda_i \mathbf{v}_i \\
\underbrace{\left(\mathbf{I} - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{B}}\mathbf{v}_i &= \left(1 - \frac{7}{9c}\lambda_i\right)\mathbf{v}_i
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ sajátértékeire felírt feltétel mit ad $\mathbf{B}$ sajátértékeire.

$$\begin{gathered}
0 < \lambda_i < c \\
0 < \frac{7}{9c}\lambda_i < \frac{7}{9c} \cdot c = \frac{7}{9} < 1 \\
-1 < \frac{7}{9c}\lambda_i - 1 < 0 \\
0 < 1 - \frac{7}{9c}\lambda_i < 1 \quad \Rightarrow \quad \left|1 - \frac{7}{9c}\lambda_i\right| < 1
\end{gathered}$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesül, azaz a Richardson-iteráció bármely kezdővektorra konvergens lesz!

58. Be kell bizonyítanununk, hogy konvergens lesz a Richardson-iteráció. Ezt kétféle módszerrel is beláthatjuk.

1. módszer:

Hivatkozunk a Richardson-iteráció tanult konvergencia tételére, mely szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra $p \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$ paraméter esetén az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció bármely kezdővektorra konvergens.

Felhasználva, hogy $0 < \rho(\mathbf{A}) < c$, fel tudjuk írni a következő egyenlőtlenséget.

$$\begin{aligned} 0 < \rho(\mathbf{A}) &< c \\ 0 < \frac{c}{2} &< \frac{\rho(\mathbf{A})}{2} \\ \frac{1}{5c} < \frac{1}{c} < \frac{2}{c} &< \frac{2}{\rho(\mathbf{A})} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{5c} \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right) \end{aligned}$$

Mivel teljesül, hogy $p = \frac{1}{5c} \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$, ezért a Richardson-iteráció konvergens lesz $\forall\ \mathbf{x}_0$-ra!

2. módszer:

A szükséges és elégséges feltételt is használhatjuk, azaz vizsgálhatjuk konkrétan az átmenetmátrix spektrálsugarát, $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesülését.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = -\frac{7}{3c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \frac{7}{3c}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - \frac{7}{3c}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x} + \frac{7}{3c}\mathbf{b}$$

Írjuk fel a fixpontegyenletből a Richardson-iterációt!

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{5c}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x_k} + \frac{1}{5c}\mathbf{b}$$

Látjuk, hogy az átmenetmátrix $\mathbf{B} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{5c}\mathbf{A}\right)$.

Írjuk fel a kapcsolatot $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sajátértékei között! Sejtés: $\lambda_i(\mathbf{B}) = 1 - \frac{1}{5c}\lambda_i$.

Ezt könnyen beláthatjuk az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt sajátérték egyenletből.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \\ -\frac{1}{5c}\mathbf{A}\mathbf{v}_i &= -\frac{1}{5c}\lambda_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_i - \frac{1}{5c}\mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i - \frac{1}{5c}\lambda_i \mathbf{v}_i \\ \underbrace{\left(\mathbf{I} - \frac{1}{5c}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{B}} \mathbf{v}_i &= \left(1 - \frac{1}{5c}\lambda_i\right)\mathbf{v}_i \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ sajátértékeire felírt feltétel mit ad $\mathbf{B}$ sajátértékeire.

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_i &< c \\ 0 < \frac{1}{5c}\lambda_i &< \frac{1}{5c} \cdot c = \frac{1}{5} < 1 \\ -1 < \frac{1}{5c}\lambda_i - 1 &< 0 \\ 0 < 1 - \frac{1}{5c}\lambda_i &< 1 \quad \Rightarrow \quad \left|1 - \frac{1}{5c}\lambda_i\right| < 1 \end{aligned}$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesül, azaz a Richardson-iteráció bármely kezdővektorra konvergens lesz!

59. Hivatkozunk a Richardson-iteráció tanult konvergencia tételére. Legyenek

$$0 < m = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = M$$

az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei. A tétel szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció pontosan a $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. A módszer optimális paramétere, melyre a leggyorsabb a konvergencia $p_{opt} = \frac{M-m}{M+m}$. Látjuk, hogy a feladat megoldásához az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit ismernünk kell. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomját!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 1) + (-1) \cdot (4-\lambda) = \\
&= (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 2) = (4-\lambda)(4-\lambda-\sqrt{2})(4-\lambda+\sqrt{2}) = 0
\end{aligned}$$

Innen a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 4 - \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 4 + \sqrt{2}.$$

A tételben szereplő jelöléseket használva

$$m = 4 - \sqrt{2}, \quad M = 4 + \sqrt{2}.$$

Tehát az iteráció a $p \in (0; \frac{2}{4+\sqrt{2}})$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra és

$$p_{opt} = \frac{M-m}{M+m} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,3536$$

az optimális paraméter.

60. Hivatkozunk a Richardson-iteráció tanult konvergencia tételére. Legyenek

$$0 < m = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = M$$

az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei. A tétel szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció pontosan a $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. A módszer optimális paramétere, melyre a leggyorsabb a konvergencia $p_{opt} = \frac{M-m}{M+m}$. Látjuk, hogy a feladat megoldásához az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit ismernünk kell. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomját!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (2-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0
\end{aligned}$$

Innen a sajátértékek a tételben szereplő jelöléseket használva

$$\lambda_1 = 1 = m, \quad \lambda_2 = 3 = M.$$

Tehát az iteráció a $p \in (0; \frac{2}{3})$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra és

$$p_{opt} = \frac{M-m}{M+m} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

az optimális paraméter.

2.2.6. ILU-algoritmus

61. Írjuk fel először az ILU-algoritmus konstrukcióját.

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \quad\Leftrightarrow\quad (\mathbf{P}-\mathbf{Q})\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{Px}=\mathbf{Qx}+\mathbf{b} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{x}=\mathbf{P^{-1}Qx}+\mathbf{P^{-1}b}$$

A fixpontegyenletből az iteráció alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}}_{\textit{átmenetmátrix}}\ \mathbf{x_k} + \underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}.$$

A feladat megoldásához először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{P^{-1}Q} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ -12 & -8 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Mint látható, a mátrixban kis elemek találhatók, ezért a konvergencia vizsgálatához alkalmazható az elégséges feltétel.

$$\|\mathbf{B}\|_\infty = \frac{2}{3} < 1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia bármely kezdőértékre. Az első 2 lépés kiszámolásához, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektort választani. Végezzük el az iteráció első két lépését!

1. lépés:

$$\begin{aligned}\mathbf{x_1} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_0} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{0}+\mathbf{c}=\mathbf{c} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}\mathbf{x_2} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{c} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} \\ -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Számoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.
($q = \frac{2}{3}$ megegyezik a $\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normájával.)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|_\infty = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_\infty &\leq 10^{-3} \\ \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1-\frac{2}{3}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty &\leq 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot 3 &\leq 10^{-3} \\
3 \cdot 10^3 &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^k \\
\lg\left(3 \cdot 10^3\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{3}{2}\right) \\
\frac{\lg\left(3 \cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{3}{2}\right)} \approx 19,75 &\leq k
\end{aligned}$$

Mint látható $k \geq 20$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot.

62. A feladat megoldásához először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{P^{-1}Q} = \\
&= \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban kis elemek vannak, ezért a konvergencia vizsgálatához alkalmazható az elégséges feltétel.

$$\|\mathbf{B}\|_\infty = \frac{4}{5} < 1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első 2 lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektort venni. Az iteráció alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{c}.$$

Ezt felhasználva, el tudjuk végezni az iteráció első két lépését.

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{7}{20} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

($q = \frac{4}{5}$ megegyezik a $\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normájával.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty &\leq 10^{-3} \\
\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^k}{1-\frac{4}{5}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty &\leq 10^{-3} \\
\left(\frac{4}{5}\right)^k \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \left(\frac{4}{5}\right)^k \cdot \frac{5}{2} &\leq 10^{-3} \\
\frac{5}{2} \cdot 10^3 &\leq \left(\frac{5}{4}\right)^k \\
\lg\left(\frac{5}{2} \cdot 10^3\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{5}{4}\right) \\
\frac{\lg\left(\frac{5}{2} \cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{5}{4}\right)} \approx 35,06 &\leq k
\end{aligned}$$

Amint az látható $k \geq 36$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot.

63. A feladat megoldásához először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{P^{-1}Q} = \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{5}{24} & \frac{5}{72} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & 0 & -\frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{36} & 0 & \frac{5}{36} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A mátrixban kis elemek találhatók, ezért a konvergencia vizsgálatához érdemes az elégséges feltétel alkalmazásával próbálkozni.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}\|_1 &= \frac{37}{36} > 1 \Rightarrow \text{Nem alkalmas!} \\
\|\mathbf{B}\|_\infty &= \frac{10}{9} > 1 \Rightarrow \text{Nem alkalmas!} \\
\|\mathbf{B}\|_F &= \frac{\sqrt{1138}}{36} \approx 0,9371 < 1
\end{aligned}$$

Az $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ is nagyobb egynél, de a $\|.\|_F$ egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első 2 lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektort venni. Az iteráció alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{c}.$$

Ezt felhasználva, el tudjuk végezni az iteráció első két lépését.

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{5}{24} & \frac{5}{72} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{36} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{c}= \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & 0 & -\frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{36} & 0 & \frac{5}{36} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{36} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{36} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{7}{108} \\ \frac{13}{36} \\ -\frac{7}{432} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-2} pontosság eléréséhez. ($q = 0,9371$ megegyezik a $\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_F$ normájával, és mivel a $\|.\|_F$ illeszkedik a $\|.\|_2$ normára, ezért használhatjuk a vektoroknál a 2-es normát.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|_2 = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_2 &\le 10^{-2} \\
\frac{\left(\frac{\sqrt{1138}}{36}\right)^k}{1-\frac{\sqrt{1138}}{36}}\cdot\left\|\begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{36} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\|_2 &\le 10^{-2} \\
(0,9371)^k\cdot\frac{0,3525}{0,0629} = (0,9371)^k\cdot 5,6 &\le 10^{-2} \\
5,6\cdot 10^2 &\le (1,0672)^k \\
\lg\left(5,6\cdot 10^2\right) &\le k\cdot\lg(1,0672) \\
\frac{\lg\left(5,6\cdot 10^2\right)}{\lg(1,0672)} \approx 97,3 &\le k
\end{aligned}$$

Mint látható $k \geq 98$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-2} pontosságot.

64. Első lépésként azt kell megvizsgálnunk, hogy $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz-e. Ehhez ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{P^{-1}Q} = \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{9}{56} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{14} & 0 \\ \frac{5}{14} & -\frac{25}{56} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban kis elemek vannak, ezért a konvergencia vizsgálatához alkalmazható az elégséges feltétel.

$$\|\mathbf{B}\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első 2 lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektort venni. Az iteráció alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_k}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{x_k}+\mathbf{c}.$$

Ezt felhasználva, el tudjuk végezni az iteráció első két lépését.

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_0}+\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{0}+\mathbf{c}=\mathbf{c}= \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{9}{56} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{14} & 0 \\ \frac{5}{14} & -\frac{25}{56} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}\mathbf{x_2} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{c}=\\ &= \begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}\\0\\\frac{3}{4}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez. ($q=\frac{1}{2}$ megegyezik a $\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normájával.)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|_\infty = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_\infty &\le 10^{-3}\\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}\cdot\left\|\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\|_\infty &\le 10^{-3}\\ \left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot 2 &\le 10^{-3}\\ 2\cdot 10^3 &\le (2)^k\\ \lg\left(2\cdot 10^3\right) &\le k\cdot\lg(2)\\ \frac{\lg\left(2\cdot 10^3\right)}{\lg(2)}\approx 10,97 &\le k\end{aligned}$$

Amint az látható $k\ge 11$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot!

65. Első lépésként azt kell megvizsgálnunk, hogy $\forall\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz-e. Ehhez ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\mathbf{B}=\mathbf{P^{-1}Q}=\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{5}\\\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

Mivel a mátrixban kis elemek vannak, ezért a konvergencia vizsgálatához alkalmazható az elégséges feltétel.

$$\|\mathbf{B}\|_\infty=\frac{1}{2}<1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első 2 lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb az $\mathbf{x_0}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T=\mathbf{0}$ vektort venni. Az iteráció alakja

$$\mathbf{x_{k+1}}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_k}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{x_k}+\mathbf{c}.$$

Ezt felhasználva, el tudjuk végezni az iteráció első két lépését.

1. lépés:

$$\begin{aligned}\mathbf{x_1} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_0}+\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{0}+\mathbf{c}=\mathbf{c}=\\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}\mathbf{x_2} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{c}=\\ &= \begin{bmatrix}0 & \frac{2}{5}\\\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{5}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Végül ki kell számolnunk a lépésszámot a 10^{-4} pontosság eléréséhez. ($q = \frac{1}{2}$ megegyezik a $\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normájával.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty &\leq 10^{-4} \\
\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \|_\infty &\leq 10^{-4} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 2 &\leq 10^{-4} \\
2 \cdot 10^4 &\leq (2)^k \\
\lg\left(2 \cdot 10^4\right) &\leq k \cdot \lg(2) \\
\frac{\lg\left(2 \cdot 10^4\right)}{\lg(2)} \approx 14,29 &\leq k
\end{aligned}$$

Amint az látható $k \geq 15$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-4} pontosságot!

3. fejezet

Nemlineáris egyenletek megoldása

3.1. Feladatok

3.1.1. Polinomok gyökeinek becslése

1. Adjunk alsó és felső becslést a $P(x) = 3x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x - 6$ polinom gyökeinek abszolút értékére!

2. Adjunk alsó és felső becslést a $P(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 + 8$ polinom gyökeinek abszolút értékére!

3. Adjunk alsó és felső becslést a $P(x) = 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 + x - 1$ polinom gyökeinek abszolút értékére!

4. Adjunk alsó és felső becslést a $P(x) = x^3 - 6x^2 - 2x + 4$ polinom gyökeinek abszolút értékére!

3.1.2. Intervallumfelezés módszere

5. Határozzuk meg az $x^2 - 2 = 0$ egyenlet $[1\,;2]$ -beli megoldását intervallumfelezéssel, $\frac{1}{10}$ -es pontossággal!

6. Határozzuk meg az $x^2 - 3 = 0$ egyenlet $[-2\,;-1]$ -beli megoldását intervallumfelezéssel, $\frac{1}{10}$ -es pontossággal!

7. Határozzuk meg az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet $[0\,;1]$ -beli megoldását intervallumfelezéssel, $\frac{1}{10}$ -es pontossággal! Hány lépés szükséges az $\frac{1}{1000}$ -es pontossághoz?

8. Határozzuk meg az $x^3 - x - 2 = 0$ egyenlet közelítő megoldását intervallumfelezéssel, $\frac{1}{10}$ -es pontossággal! Keressünk jó induló intervallumot!

9. Közelítsük a $\sqrt[3]{4}$-et! Számoljuk ki $\frac{1}{10}$ -es pontossággal!

3.1.3. Fixpont iteráció

10. Az $x^3 - 5x + 2 = 0$ egyenlet $[0\,;1]$ -beli megoldására az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 2}{5}$$

iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját és írjuk fel a hibabecslését!

11. Az $x^3 - 4x - 2 = 0$ egyenlet megoldására az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 - 2}{4}$$

iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját és írjuk fel a hibabecslését. Adjunk meg egy - lehetőleg minél tágabb - intervallumot, melyen konvergál a sorozat! Mennyi a konvergenciarendje?

12. Az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet megoldására az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 1}{3}$$

iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját valamely intervallumon és írjuk fel a hibabecslését!

13. Mutassuk meg, hogy a $\varphi(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{x}$ függvény kontrakció az $[1\,;2]$ intervallumon. Igazoljuk, hogy az

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{3} + \frac{1}{x_k}$$

sorozat $\sqrt{\frac{3}{2}}$ -hez konvergál minden $x_0 \in [1\,;2]$ kezdőértékre! Adjunk az iterációra hibabecslést!

14. Az $x^2 - 2\sqrt{x} - 2 = 0$ egyenlet pozitív megoldására a következő iterációt használjuk

$$x_{k+1} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x_k} + 1}.$$

Mely intervallumon konvergál és mennyi a konvergenciarendje?

15. Az $\sqrt{x} - x + 1 = 0$ egyenlet $[1\,;4]$-beli megoldására az

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k} + 1$$

iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját és írjuk fel a hibabecslését.

16. Adjunk meg az $x = \sqrt{x+1}$ egyenlet $[0\,;3]$-beli megoldásához konvergáló sorozatot. Bizonyítsuk a konvergenciát! Mennyi a konvergenciarendje?

17. Adjunk meg az $x = (x-1)^3$ egyenlet megoldásához konvergáló sorozatot. Mely intervallumból vegyük a kezdőértékeket?

18. Az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldására vizsgáljuk az

$$x_{k+1} = 1 + \frac{2}{x_k}, \quad y_{k+1} = \frac{y_k^2 + 2}{2y_k - 1}$$

iterációkat. Melyik sorozat konvergens? Milyen kezdőérték esetén? Bizonyítsuk a konvergenciát!

19. Az $x^3 - x - 1 = 0$ egyenlet megoldására az $[1\,;2]$ intervallumon vizsgáljuk az

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1, \quad y_{k+1} = \frac{2y_k^3 + 1}{3y_k^2 - 1}$$

iterációkat. Melyik sorozat konvergens? Bizonyítsuk a konvergenciát!

20. Adjunk a $3x = \sin(x) + 1$ egyenlet megoldására egy konvergens sorozatot!
Bizonyítsuk a sorozat konvergenciáját és annak rendjét! Mely intervallumból indítva konvergál?

21. Igazoljuk, hogy az

$$x_{k+1} = x_k \cdot \frac{x_k^2 + 3A}{3x_k^2 + A}$$

iteráció $\left(A > 0, x_0 > 0, x_0^2 > A\right)$ esetén konvergál! Mi a határértéke? Adjuk meg a hibabecslését és bizonyítsuk a konvergenciarendjét!

3.1.4. Newton-módszer

22. Az $f(x) = e^{2x} + 4x$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton-módszert!
Igazoljuk a módszer másodrendű konvergenciáját a gyök valamely környezetében!

23. Az $f(x) = \cos(x) - 4x + 2$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton-módszert!
Igazoljuk a módszer másodrendű konvergenciáját a gyök valamely környezetében!

24. Az $f(x) = \sin(x) - 2x + 1 = 0$ egyenlet megoldására írjuk fel a Newton-módszert!
Milyen intervallumból indítva konvergál az iteráció? Mennyi a konvergenciarendje?

25. Az $f(x) = e^x - \frac{1}{4}\,x - 2 = 0$ egyenlet megoldására írjuk fel a Newton-módszert!
Milyen intervallumból indítva konvergál az iteráció? Mennyi a konvergenciarendje?

26. Írjuk fel a Newton-módszert az $f(x) = \frac{1}{3}\,x^2 - x - 1 = 0$ megoldására!
Milyen kezdőértékekre konvergál? Bizonyítsuk a konvergenciát!

27. Az $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x} - 2 = 0$ egyenlet pozitív gyökének közelítésére írjuk fel a Newton-módszert és bizonyítsuk a konvergenciáját! Mely intervallumon konvergál?

28. Írjuk fel a Newton-módszert az $f(x) = -\frac{x}{1+x} = 0$ egyenlet megoldására!
Milyen intervallumból indítva konvergál a kapott iteráció? Mit mondhatunk a konvergenciarendjéről?

3.2. Megoldások

3.2.1. Polinomok gyökeinek becslése

1. A $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ alakú valós együtthatós polinom gyökeinek abszolútértékére (ha $a_n \neq 0$ és $a_0 \neq 0$) a következő alsó- és felső becslés adható.

$$\frac{1}{1 + \frac{\max\{|a_n|,\ldots,|a_1|\}}{|a_0|}} = r \leq |x_k| \leq R = 1 + \frac{\max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\}}{|a_n|}$$

Alkalmazzuk a $P(x) = 3x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x - 6$ polinom együtthatóira.

$$R = 1 + \frac{\max\{|-1|,\, |-5|,\, 4,\, |-6|\}}{3} = 1 + \frac{6}{3} = 3,$$

$$r = \frac{1}{1 + \frac{\max\{3, |-1|, |-5|, 4\}}{|-6|}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{6}} = \frac{6}{11}$$

Tehát a polinom x_k gyökére $\frac{6}{11} \leq |x_k| \leq 3$.

2. A $P(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 + 8$ polinom együtthatóiból

$$R = 1 + \frac{\max\{0, 2, 1, 0, 8\}}{|-1|} = 1 + \frac{8}{1} = 9,$$
$$r = \frac{1}{1 + \frac{\max\{|-1|, 2, 1\}}{8}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{8}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Tehát a polinom x_k gyökére $\frac{4}{5} \leq |x_k| \leq 9$.

3. A $P(x) = 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 + x - 1$ polinom együtthatóiból

$$R = 1 + \frac{\max\{|-3|, |-6|, 1\}}{4} = 1 + \frac{6}{4} = 2,5$$
$$r = \frac{1}{1 + \frac{\max\{4, |-3|, |-6|, 1\}}{|-1|}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{1}} = \frac{1}{7}.$$

Tehát a polinom x_k gyökére $\frac{1}{7} \leq |x_k| \leq 2,5$.

4. A $P(x) = x^3 - 6x^2 - 2x + 4$ polinom együtthatóiból

$$R = 1 + \frac{\max\{|-6|, |-2|, 4\}}{1} = 1 + \frac{6}{1} = 7$$
$$r = \frac{1}{1 + \frac{\max\{1, |-6|, |-2|\}}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Tehát a polinom x_k gyökére $\frac{4}{5} \leq |x_k| \leq 7$.

3.2.2. Intervallumfelezés módszere

5. Legyen $[x_0; y_0] = [1; 2]$ a kiindulási intervallum. Mivel

$$x_0^2 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$
$$y_0^2 - 2 = 4 - 2 = 2 > 0,$$

ezért a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.

1. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Mivel $(1,5)^2 - 2 = 2,25 - 2 > 0$, ezért az $[x_1; y_1]$ intervallumot válasszuk úgy, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_1 = 1$, $y_1 = 1,5$ legyen.

2. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1 + 1,5}{2} = \frac{2,5}{2} = 1,25.$$

Mivel $(1,25)^2 - 2 = 1,5625 - 2 < 0$, ezért az $[x_2; y_2]$ intervallumra $x_2 = 1,25$, $y_2 = 1,5$, így tartalmazza a gyököt.

3. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1,25 + 1,5}{2} = \frac{2,75}{2} = 1,375.$$

Mivel $(1,375)^2 - 2 = 1,890625 - 2 < 0$, ezért $x_3 = 1,375$, $y_3 = 1,5$ és az $[x_3; y_3]$ intervallum tartalmazza a gyököt.

Az utolsó intervallum hossza $0,125$. Ennek a felezőpontja $1,4375$ már $\frac{1}{10}$-es pontosságú közelítése a gyöknek.

6. Legyen $[x_0; y_0] = [-2; -1]$ a kiindulási intervallum. Mivel

$$x_0^2 - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$$
$$y_0^2 - 3 = 1 - 3 = -2 < 0,$$

ezért a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.

1. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{(-2) + (-1)}{2} = \frac{-3}{2} = -1,5.$$

Mivel $(-1,5)^2 - 3 = 2,25 - 3 < 0$, ezért az $[x_1; y_1]$ intervallumot válasszuk úgy, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_1 = -2$, $y_1 = -1,5$ legyen.

2. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{(-2) + (-1,75)}{2} = \frac{-3,5}{2} = -1,75.$$

Mivel $(-1,75)^2 - 2 = 3,0625 - 3 > 0$, ezért az $[x_2; y_2]$ intervallum olyan legyen, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_2 = -1,75$, $y_2 = -1,5$ legyen.

3. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{(-1,75) + (-1,5)}{2} = \frac{-3,25}{2} = -1,625.$$

Mivel $(1,625)^2 - 3 = 2,640625 - 3 < 0$, ezért $x_3 = -1,75$, $y_3 = -1,625$ és az $[x_3; y_3]$ intervallum tartalmazza a gyököt.

Az utolsó intervallum hossza $0,125$. Ennek a felezőpontja $-1,6875$ már $\frac{1}{10}$-es pontosságú közelítése a gyöknek.

7. Legyen $[x_0; y_0] = [0\,; 1]$ a kiindulási intervallum. Mivel

$$x_0^3 - 3x_0 + 1 = 1 > 0$$
$$y_0^3 - 3y_0 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1 < 0,$$

ezért a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.

1. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0,5.$$

Mivel $(0,5)^3 - 3 \cdot 0,5 + 1 = -0,3750 < 0$, ezért az $[x_1; y_1]$ intervallumot válasszuk úgy, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_1 = 0$, $y_1 = 0,5$ legyen.

2. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{0 + 0,5}{2} = 0,25.$$

Mivel $(0,25)^3 - 3 \cdot 0,25 + 1 = 0.265625 > 0$, ezért az $[x_2; y_2]$ intervallum olyan legyen, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_2 = 0,25$, $y_2 = 0,5$.

3. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{0,25 + 0,5}{2} = 0,375.$$

Mivel $(0,375)^3 - 3 \cdot 0,375 + 1 = -0,072265625 < 0$, ezért $x_3 = 0,25$, $y_3 = 0,375$ és az $[x_3; y_3]$ intervallum tartalmazza a gyököt.

Az utolsó intervallum hossza $0,125$. Ennek a felezőpontja $0,3125$ már $\frac{1}{10}$-es pontosságú közelítése a gyöknek.

8. Keressünk kiindulási intervallumot, ahol a végpontokban a polinom értéke különböző előjelű. Az $[x_0; y_0] = [1; 2]$ jó választás, mivel

$$x_0^3 - x_0 - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 < 0$$
$$y_0^3 - y_0 - 2 = 8 - 2 - 2 = 4 > 0,$$

ezért a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.

1. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5.$$

Mivel $(1,5)^3 - 1,5 - 2 = -0,125 < 0$, ezért az $[x_1; y_1]$ intervallumot válasszuk úgy, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_1 = 1,5$, $y_1 = 2$ legyen.

2. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1,5 + 2}{2} = 1,75.$$

Mivel $(0,75)^3 - 0,75 - 2 = 1,609375 > 0$, ezért az $[x_2; y_2]$ intervallum olyan legyen, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_2 = 1,5$, $y_2 = 1,75$.

3. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1,5 + 1,75}{2} = 1,625.$$

Mivel $(1,625)^3 - 1,625 - 2 = 0,666015625 > 0$, ezért $x_3 = 1,5$, $y_3 = 1,625$ és az $[x_3; y_3]$ intervallum tartalmazza a gyököt.

Az utolsó intervallum hossza $0,125$. Ennek a felezőpontja $1,5625$ már $\frac{1}{10}$-es pontosságú közelítése a gyöknek.

9. A $\sqrt[3]{4}$ közelítéséhez keressünk egy egyenletet, melynek gyöke és egy kiindulási intervallumot. Az $x^3 - 4 = 0$ alkalmas egyenlet, a kiindulási intervallumunk legyen $[x_0; y_0] = [1; 2]$.
Ez jó választás, mivel

$$1^3 - 4 = 1 - 4 = -3 < 0$$
$$2^3 - 4 = 8 - 4 = 4 > 0,$$

ezért a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.

1. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5.$$

Mivel $(1,5)^3 - 4 = -0,625 < 0$, ezért az $[x_1; y_1]$ intervallumot válasszuk úgy, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_1 = 1,5$, $y_1 = 2$ legyen.

2. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1,5 + 2}{2} = 1,75.$$

Mivel $(0,75)^3 - 4 = 1,359375 > 0$, ezért az $[x_2; y_2]$ intervallum legyen olyan, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_2 = 1,5$, $y_2 = 1,75$.

3. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1,5 + 1,75}{2} = 1,625.$$

Mivel $(1,625)^3 - 4 = 0.291015625 > 0$, ezért $x_3 = 1,5$, $y_3 = 1,625$ és az $[x_3; y_3]$ intervallum tartalmazza a gyököt.

Az utolsó intervallum hossza $0,125$. Ennek a felezőpontja $1,5625$ már $\frac{1}{10}$-es pontosságú közelítése a gyöknek.

3.2.3. Fixpont iteráció

10. Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \frac{x^3+2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 5x + 2 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Vizsgáljuk meg, hogy a $\varphi(x) = \frac{x^3+2}{5}$ függvény a $[0;1]$ intervallumot $[0\,;1]$-be képezi-e. Mivel φ szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon vagy a derivált segítségével), ezért

$$\varphi\left([0;1]\right) = [\varphi(0)\,;\,\varphi(1)] = \left[\frac{2}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right] \subset [0;1].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció a $[0;1]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{3\cdot\xi^2}{5} \le \frac{3}{5} = q, \quad \xi \in [0;1]$$

miatt φ kontrakció $[0;1]$-en.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A hibabecslés $x_0 \in [0\,;1]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le 0,6^k \cdot |x_0 - x^*| \le 0,6^k.$$

11. Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \frac{x^3-2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x - 2 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. A $[-1;0]$ intervallum jó választás, mert

$$(-1)^3 - 4\cdot(-1) - 2 = -1 + 4 - 2 = 1 > 0$$
$$0^3 - 4\cdot 0 - 2 = -2 < 0,$$

így a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.
A $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ függvény a $[-1\,;0]$ intervallumot a $[-1\,;0]$-ba képezi, ugyanis φ szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon vagy a derivált segítségével) és

$$\phi\left([-1;0]\right) = [\varphi(-1)\,;\,\varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4}\,;-\frac{1}{2}\right] \subset [-1;0].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció a $[-1\,;0]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{3\cdot\xi^2}{4} \le \frac{3}{4} = q, \quad \xi \in [-1\,;0]$$

miatt φ kontrakció $[-1\,;0]$-n.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A hibabecslés $x_0 \in [-1\,;0]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le 0,75^k \cdot |x_0 - x^*| \le 0,75^k.$$

12. Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \frac{x^3+1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x + 1 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. A $[0;1]$ intervallum jó választás, mert

$$(0)^3 - 3\cdot 0 + 1 = 1 > 0$$
$$1^3 - 3\cdot 1 + 1 = -1 < 0,$$

így a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.
A $\varphi(x) = \frac{x^3+1}{3}$ függvény a $[0;1]$ intervallumot $[0;1]$-be képezi? Mivel φ szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon vagy a derivált segítségével), ezért

$$\phi\left([0;1]\right) = [\varphi(0)\,;\,\varphi(1)] = \left[\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right] \subset [0;1].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció a $[0;1]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$\varphi'(\xi) = \xi^2 \leq 1 = q, \quad \xi \in [0;1]$$

bizonyítható, ami nem elegendő a kontrakció bizonyításához. Ahhoz, hogy kontrakció legyen az intervallumot csökkentenünk kell. Legyen $[0\,;\,0,9]$ az új intervallum, ekkor

$$|\varphi'(\xi)| = \xi^2 \leq 0,81 = q, \quad \xi \in [0;\,0,9].$$

Tehát φ kontrakció $[0;\,0,9]$-en.

c) Vizsgáljuk az új intervallumra is a beleképezést.

$$\phi\left([0;\,0,9]\right) = [\varphi(0);\varphi(0,9)] = \left[\frac{1}{3}\,;\,0,576\dot{3}\right] \subset [0\,;\,0,9].$$

A $[0\,;\,0,9]$ intervallummal a fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra.

d) A hibabecslés a fixponttételből $x_0 \in [0\,;\,0,9]$ esetén

$$|x_k - x^*| \leq 0,81^k \cdot |x_0 - x^*| \leq 0,81^k.$$

13. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Vizsgáljuk meg, hogy a $\varphi(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{x}$ függvény a $[1;2]$ intervallumot $[1;2]$-be képezi-e. A

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}$$

$[1;\sqrt{3})$-n negatív, a $(\sqrt{3};2]$-n pozitív, így φ-nek $\sqrt{3}$-ban lokális minimuma van.
A φ függvény $[1;\sqrt{3})$-n monoton fogyó, a $(\sqrt{3};2]$-n monoton növő,

$$\varphi(1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3},$$

$$\varphi(2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6},$$

$$\varphi(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 1,155,$$

ezért

$$\phi\left([1;2]\right) = [\varphi(\sqrt{3}); \varphi(1)] = \left[1,155; \frac{4}{3}\right] \subset [1;2].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció a $[1;2]$ intervallumon. A Lagrange-féle középérték-tételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{\xi^2}\right| \le q, \quad \xi \in [1;2]$$

ahol

$$q = \max\left\{|\varphi'(1)|, |\varphi'(2)|\right\} = \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{12}\right\} = \frac{2}{3} < 1.$$

Tehát φ kontrakció $[1;2]$-en.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A feladatban szereplő $x_{k+1} = \frac{x_k}{3} + \frac{1}{x_k}$ sorozat konvergál a φ $[1;2]$-beli fixpontjához, így az x^*-gal jelölt fixpont kielégíti az $x = \frac{x}{3} + \frac{1}{x}$ egyenletet.

$$x = \frac{x}{3} + \frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; 3x^2 = x^2 + 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

d) A hibabecslés $x_0 \in [1;2]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot |x_0 - x^*| \le \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

14. Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x} + 1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2\sqrt{x} - 2 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Legyen $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x} - 2$, keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. Az $[1;4]$ intervallum jó választás, mert

$$f(1) = 1^2 - 2\sqrt{1} - 2 = -3 < 0$$
$$f(4) = 4^2 - 2\sqrt{4} - 2 = 10 > 0,$$

így a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt. Vizsgáljuk meg, hogy a $\varphi(x) = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x} + 1}$ függvény az $[1;4]$ intervallumot $[1;4]$-be képezi-e. Mivel

$$\varphi'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} > 0,$$

ezért φ szigorúan monoton növő függvény

$$\phi\left([1;4]\right) = [\varphi(1); \varphi(4)] = [2; \sqrt{6}] \subset [1;4].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[1;4]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{\xi+\sqrt{\xi}}} \le \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} = q, \quad \xi \in [0;1]$$

miatt φ kontrakció $[1;4]$-en.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A hibabecslés $x_0 \in [1;4]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot |x_0 - x^*| \le \frac{3}{2^{2k}}.$$

A sorozat konvergenciarendje 1, mivel a Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists\ \xi_k \in [x_k;x^*]$ vagy $[x^*;x_k]$ intervallumban, hogy

$$|x_{k+1} - x^*| = |\varphi(x_k) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi_k)| \cdot |x_k - x^*|.$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^1} = \lim_{k\to\infty}|\varphi'(\xi_k)| = \lim_{k\to\infty}|\varphi'(x^*)| =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{x^*+\sqrt{x^*}}} = c \ne 0.$$

15. Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \sqrt{x} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} - x + 1 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Vizsgáljuk meg, hogy a $\varphi(x) = \sqrt{x} + 1$ függvény az $[1;4]$ intervallumot $[1;4]$-be képezi-e. Mivel φ szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon vagy a derivált segítségével), ezért

$$\phi([1;4]) = [\varphi(1)\,;\,\varphi(4)] = [2;3] \subset [1;4].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[1;4]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \le \frac{1}{2} = q, \quad \xi \in [1;4]$$

miatt φ kontrakció $[1;4]$-en.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A hibabecslés $x_0 \in [1;4]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le \left(\frac{1}{2}\right)^k |x_0 - x^*| \le \frac{3}{2^k}.$$

16. Az iterációs sorozatot az $x = \sqrt{x+1}$ alakból a fixponttétel segítségével kapjuk. A feladatra a fixponttételt alkalmazzuk $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$ választással, így a sorozat $x_{k+1} = \sqrt{x_k+1}$ lesz.

a) Vizsgáljuk meg, hogy a φ függvény a $[0;3]$ intervallumot $[0;3]$-be képezi-e.
Mivel φ szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon), ezért

$$\phi\left([0;3]\right) = [\varphi(0)\,;\,\varphi(3)] = [1;2] \subset [0;3].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[0;3]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{1}{2\sqrt{\xi+1}} \le \frac{1}{2} = q, \quad \xi \in [0;3]$$

miatt φ kontrakció $[0;3]$-en.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra.
A hibabecslés $x_0 \in [0;3]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot |x_0 - x^*| \le \frac{3}{2^k}.$$

A sorozat konvergenciarendje 1, mivel a Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists\ \xi_k \in [x_k;x^*]$ vagy $[x^*;x_k]$ intervallumban, hogy

$$|x_{k+1} - x^*| = |\varphi\left(x_k\right) - \varphi\left(x^*\right)| = |\varphi'(\xi_k)| \cdot |x_k - x^*|.$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^1} = \lim_{k\to\infty} |\varphi'(\xi_k)| = \lim_{k\to\infty} |\varphi'(x^*)| =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x^*+1}} = c \ne 0.$$

17. Iterációs sorozatot úgy kapunk, hogy az egyenletet átrendezzük a vele ekvivalens $x = \varphi(x)$ alakra, majd felírjuk és vizsgáljuk az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozatot. Egy kézenfekvő választás a

$$x = (x-1)^3 = \varphi(x),$$

míg egy másik az egyenlet átrendezéséből kapott

$$x = (x-1)^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{x} + 1 = \psi(x).$$

Az elsőként adott $\varphi(x)$-ről belátható, hogy divergens sorozatot generál, míg a második konvergens sorozatot.

a) Az eredeti egyenlet ekvivalens az $f(x) = (x-1)^3 - x = 0$ egyenlettel. Bolzano tétellel keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. Az $[1;3]$ és $[2;3]$ intervallum is jó választás, mert

$$f(1) = (1-1)^3 - 1 = -1 < 0$$
$$f(2) = (2-1)^3 - 2 = -1 < 0$$
$$f(3) = (3-1)^3 - 3 = 5 > 0.$$

b) Az elsőként választott $\varphi(x) = (x-1)^3$-re elég megnéznünk a a deriváltját a $[2;3]$ intervallumon, mely tartalmazza a gyököt.

$$|\varphi'(x)| = 3(x-1)^2 \ge 3, \quad x \in [2;3]$$

Így a $\varphi(x) = (x-1)^3$ nem lehet kontrakció $[2;3]$-n.

c) A $\varphi(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ függvény az $[1;3]$ intervallumon szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon) és

$$\phi\left([1;3]\right) = [\varphi(1)\,;\,\varphi(3)] = [2\,;\,\sqrt[3]{3}+1] \subset [1;3].$$

Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[1;3]$ intervallumon. A Lagrange-féle középérték-tételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}} \leq \frac{1}{3} = q, \quad \xi \in [1;3]$$

miatt φ kontrakció $[1;3]$-n. A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra.

18. Iterációs sorozatot úgy kapunk, hogy az egyenletet átrendezzük a vele ekvivalens $x = \varphi(x)$ alakra, majd vizsgáljuk az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozatot. Az (x_k) sorozatot a $\varphi(x) = 1 + \frac{2}{x}$, míg az (y_k) sorozatot a $\psi(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ függvénnyel kaptuk.

a) Az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet ekvivalens az $x = \varphi(x)$ és az $x = \psi(x)$ fixpont egyenlettel. Az $[1;3]$ intervallum jó, mert

$$f(1) = 1^2 - 1 - 2 = -2 < 0$$
$$f(3) = 3^2 - 3 - 2 = 4 > 0$$

miatt az intervallum tartalmaz gyököt.

b) A $\varphi(x) = 1 + \frac{2}{x}$-re elég megnéznünk a deriváltját az $[1;3]$ intervallumon.

$$\frac{4}{9} \leq |\varphi'(x)| = \frac{4}{x^2} \leq 4, \quad x \in [1;3]$$

Így a $\varphi(x) = 1+\frac{2}{x}$ nem lehet kontrakció $[1;3]$-n. Megpróbálhatnánk szűkíteni az intervallumot, de a 2-t tartalmaznia kell, mert gyök. Viszont $|\varphi'(2)| = 1$, vagyis az intervallumot szűkítve sem lehetne 1-nél kisebb.

c) Vizsgáljuk a $\psi(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ függvény deriváltját.

$$\psi'(x) = 2 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{(2x-1)^2}$$

Vegyük észre, hogy a számlálóban az $f(x)$ függvény szerepel, így a $\psi'(x^*) = 0$. Másrészt $x \in [1;2]$ esetén $f(x) \leq 0$ és $\psi'(x) \leq 0$, ami ψ monoton csökkenését, míg $x \in [2;3]$ esetén $f(x) \geq 0$ és $\psi'(x) \geq 0$, ami ψ monoton növekedését garantálja, azaz 2-ben ψ-nek lokális minimuma van. Mivel $\psi(1) = 3$, $\psi(2) = 2$ és $\psi(3) = \frac{11}{5}$

$$\psi\left([1;3]\right) = [\psi(2)\,;\,\psi(1)] = [2;3] \subset [1;3].$$

Igazolnunk kell még, hogy ψ kontrakció az $[1;3]$ intervallumon.

$$\psi''(x) = 2 \cdot \frac{(2x-1)^2 - 4(x^2 - x - 2)}{(2x-1)^3} = \frac{14}{(2x-1)^3} > 0,$$

így ψ' szigorúan monoton növő és

$$-4 = \psi'(1) \leq \psi'(x) \leq \psi'(3) = \frac{8}{25}.$$

Látszik, hogy finomítanunk kell az intervallumot.

d) Nézzük az $[1,5\,;\,3]$ intervallumot, ami szintén tartalmazza a gyököt, így a fentiek alapján

$$\psi\left([1,5\,;\,3]\right) = [\psi(2)\,;\,\psi(1,5)] = [2\,;\,\frac{17}{8}] \subset [1,5\,;\,3].$$

$$-\frac{5}{8} = \psi'(1,5) \le \psi'(x) \le \psi'(3) = \frac{8}{25},$$

A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\psi'(\xi)| \le \frac{5}{8} = q < 1 \quad \xi \in [1,5;\,3]$$

miatt φ kontrakció $[1,5\,;\,3]$-n. A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a fixponttétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A sorozat konvergenciarendje 2, mivel a Taylor-formula és $\psi'(x^*) = 0$ miatt $\exists\ \xi_k \in [y_k;\,x^*]$ vagy $[x^*;\,y_k]$ intervallumban, hogy

$$|y_{k+1} - x^*| = |\psi\left(y_k\right) - \psi\left(x^*\right)| = \frac{1}{2}|\psi''(\xi_k)| \cdot |y_k - x^*|^2.$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|y_{k+1} - x^*|}{|y_k - x^*|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\psi''(\xi_k)| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\psi''(x^*)| = c \ne 0.$$

e) Vegyük észre, hogy az $y_{k+1} = \frac{y_k^2+2}{2y_k-1}$ sorozat az $f(x) = 0$ egyenletre felírt Newton-módszer, így a Newton-módszer konvergenciatételei segítségével is bizonyítható az (y_k) sorozat konvergenciája.

19. Iterációs sorozatot úgy kapunk, hogy az egyenletet átrendezzük a vele ekvivalens $x = \varphi(x)$ alakra, majd vizsgáljuk az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozatot. Az (x_k) sorozatot a $\varphi(x) = x^3 - 1$, míg az (y_k) sorozatot a $\psi(x) = \frac{2x^3+1}{3x^2-1}$ függvénnyel kaptuk.

a) Az $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ egyenlet ekvivalens az $x = \varphi(x)$ és az $x = \psi(x)$ fixpont egyenlettel. Az $[1;2]$ intervallum jó, mert

$$f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$$
$$f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$$

miatt az intervallum tartalmaz gyököt.

b) A $\varphi(x) = x^3 - 1$ -re elég megnéznünk a deriváltját az $[1;2]$ intervallumon.

$$3 \le |\varphi'(x)| = 3x^2 \le 12, \quad x \in [1;2]$$

Így a $\varphi(x) = 3x^2$ nem lehet kontrakció $[1;2]$-n. Másrészt

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x^*| &= |\varphi\left(x_k\right) - \varphi\left(x^*\right)| = |(x_k)^3 - (x^*)^3| = \\ &= |x_k - x^*| \cdot |(x_k)^2 + x_k x^* + (x^*)^2| = \\ &= |x_k - x^*| \cdot \left((x_k)^2 + x_k x^* + (x^*)^2\right) \ge \\ &\ge 3 \cdot |x_k - x^*| \ge 3^{k+1} \cdot |x_0 - x^*|, \end{aligned}$$

vagyis a hibasorozat végtelenhez tart, így a vizsgált sorozat divergens.

c) Vizsgáljuk a $\psi(x) = \frac{2x^3+1}{3x^2-1}$ függvény deriváltját.

$$\psi'(x) = \frac{6x(x^3 - x - 1)}{(3x^2 - 1)^2}$$

Vegyük észre, hogy a számlálóban az $f(x)$ függvény szerepel, így a $\psi'(x^*) = 0$. Másrészt $x \in [1\,;\,x^*]$ esetén $f(x) \leq 0$ és $\psi'(x) \leq 0$, ami ψ monoton csökkenését, míg $x \in [x^*;\,2]$ esetén $f(x) \geq 0$ és $\psi'(x) \geq 0$, ami ψ monoton növekedését garantálja, azaz x^*-ban ψ-nek lokális minimuma van. Mivel $\psi(1) = \frac{3}{2}$, $\psi(x^*) = x^*$ és $\psi(2) = \frac{17}{11}$

$$\psi\left([1;2]\right) = [\psi(x^*)\,;\,\psi(2)] = [x^*;\,\frac{17}{11}] \subset [1;2].$$

Igazolnunk kell még, hogy ψ kontrakció az $[1;2]$ intervallumon. Mivel $x \in [1;2]$ esetén

$$\psi''(x) = 6 \cdot \frac{2x^3 + 9x^2 + 2x + 1}{(3x^2 - 1)^3} > 0,$$

így ψ' szigorúan monoton növő és

$$-\frac{3}{2} = \psi'(1) \leq \psi'(x) \leq \psi'(2) = \frac{60}{121}.$$

Látszik, hogy finomítanunk kell az intervallumot.

d) Nézzük az $[1,1\,;\,2]$ intervallumot, ami szintén tartalmazza a gyököt és

$$\psi\left([1,1\,;\,2]\right) = [\psi(x^*);\psi(1,1)] = [x^*;\,1,5922] \subset [1,1;\,2].$$

$$-0,7338 \approx \psi'(1,1) \leq \psi'(x) \leq \psi'(2) = \frac{60}{121},$$

A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\psi'(\xi)| \leq 0,7338 = q < 1 \quad \xi \in [1,1;\,2]$$

miatt φ kontrakció $[1,1\,;\,2]$-n. A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a fixponttétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A sorozat konvergenciarendje 2, mivel a Taylor-formula és $\psi'(x^*) = 0$ miatt $\exists\ \xi_k \in [y_k;\,x^*]$ vagy $[x^*;\,y_k]$ intervallumban, hogy

$$|y_{k+1} - x^*| = |\psi\left(y_k\right) - \psi\left(x^*\right)| = \frac{1}{2} \cdot |\psi''(\xi_k)| \cdot |y_k - x^*|^2.$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|y_{k+1} - x^*|}{|y_k - x^*|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\psi''(\xi_k)| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\psi''(x^*)| = c \neq 0.$$

e) Vegyük észre, hogy az $y_{k+1} = \frac{2y_k^3+1}{3y_k^2-1}$ sorozat az $f(x) = 0$ egyenletre felírt Newton-módszer, így a Newton-módszer konvergenciatételei segítségével is bizonyítható az (y_k) sorozat konvergenciája.

20. Iterációs sorozatot úgy kapunk, hogy az egyenletet átrendezzük $x = \varphi(x)$ alakra, majd felírjuk és vizsgáljuk az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozatot. Egy kézenfekvő választás a $\varphi(x) = \frac{1}{3}\left(\sin(x) + 1\right)$, így a sorozat

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(\sin(x_k) + 1\right).$$

a) Az eredeti egyenlet ekvivalens az $f(x) = 3x - \sin(x) - 1 = 0$ egyenlettel. Bolzano tétellel keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. A $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$ intervallum jó választás, mert

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} + 1 - 1 =< 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 1 - 1 > 0$$

b) A $\varphi(x) = \frac{1}{3}(\sin(x) + 1)$ függvény a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon monoton növő függvény (könnyen bizonyítható a deriváltja segítségével) és

$$\phi\left(\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\varphi(-\frac{\pi}{2})\,;\,\varphi(\frac{\pi}{2})\right] = \left[0\,;\,\frac{2}{3}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{1}{3} \cdot |\cos(x)| \leq \frac{1}{3} = q, \quad \xi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

miatt φ kontrakció $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$-n. A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra.

21. Belátjuk, hogy a $x_{k+1} = x_k \cdot \frac{x_k^2+3A}{3x_k^2+A}$ sorozat alulról korlátos és monoton fogyó, ebből következik a konvergenciája.

a) Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy $\sqrt{A} \leq x_k, \ \forall k \in \mathbb{N}$ -re.

$\sqrt{A} \leq x_0$ a feladat feltételéből következik.

Tegyük fel, hogy $\sqrt{A} \leq x_k$ teljesül, igazoljuk $k+1$-re az állítást. Mivel

$$\begin{aligned}
0 &\leq (x_k - \sqrt{A})^3 \\
3\sqrt{A}(x_k)^2 + A\sqrt{A} &\leq (x_k)^3 + 3Ax_k \\
\sqrt{A} &\leq \frac{(x_k)^3 + 3Ax_k}{3(x_k)^2 + A} = x_{k+1},
\end{aligned}$$

ezért a sorozat alulról korlátos.

b) Belátjuk, hogy a korlátosságból következik a monotonitás.

$$\begin{aligned}
x_{k+1} = \frac{(x_k)^3 + 3Ax_k}{3(x_k)^2 + A} &\leq x_k \\
(x_k)^3 + 3Ax_k &\leq 3(x_k)^3 + Ax_k \\
2Ax_k &\leq 2(x_k)^3 \\
\sqrt{A} &\leq x_k
\end{aligned}$$

Tehát a sorozat monoton fogyó, így konvergens, jelöljük a határértékét x^*-gal.

$$x^* = \lim_{k\to\infty}(x_{k+1}) = \lim_{k\to\infty}\frac{(x_k)^3 + 3Ax_k}{3(x_k)^2 + A} = \frac{(x^*)^3 + 3Ax^*}{3(x^*)^2 + A}$$

A kapott egyenletet megoldva $x^* = \sqrt{A}$-t kapunk.

c) A hibabecsléshez felhasználjuk a következő átalakítást

$$\begin{aligned}
x_{k+1} - \sqrt{A} = \varphi(x_k) - \varphi(\sqrt{A}) &= \frac{(x_k)^3 + 3Ax_k}{3x_k^2 + A} - \sqrt{A} = \\
&= \frac{(x_k)^3 + 3Ax_k - 3\sqrt{A}x_k^2 + A\sqrt{A}}{3x_k^2 + A} = \\
&= \frac{(x_k - \sqrt{A})^3}{3x_k^2 + A}.
\end{aligned}$$

Ezt felhasználva a harmadrendű konvergencia bizonyítható.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1} - \sqrt{A}|}{|x_k - \sqrt{A}|^3} = \lim_{k\to\infty} = \frac{1}{3x_k^2 + A} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{3(x^*)^2 + A} = \frac{1}{4A} \neq 0$$

A hibabecsléshez a fenti átalakítást és a sorozat alsó korlátját felhasználva kapjuk, hogy

$$|x_{k+1} - \sqrt{A}| = \frac{(x_k - \sqrt{A})^3}{3x_k^2 + A} \leq \frac{1}{4A} \cdot (x_k - \sqrt{A})^3.$$

3.2.4. Newton-módszer

22. A feladatot a Newton-módszer globális és lokális konvergenciatételének alkalmazásával is megoldjuk. A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{2x_k} + 4x_k}{2e^{2x_k} + 4}.$$

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza az $f(x) = e^{2x} + 4x = 0$ egyenlet gyökét. A $[-1; 0]$ intervallum jó választás, mert

$$f(-1) = e^{-2} - 4 < 0$$
$$f(0) = 1 > 0.$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit.
A $[-1; 0]$ intervallumon

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4 > 0$$
$$f''(x) = 4e^{2x} > 0,$$

továbbá f monoton növekedése miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton fogyóan konvergál a gyökhöz. Ez a konvergenciatétel csak a monoton konvergenciát bizonyítja.

c) Nézzük a Newton-módszer lokális konvergenciatételét, annak további feltételeit.
A $[-1; 0]$ intervallumon

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4 > 0$$
$$|f'(x)| = 2e^{2x} + 4 \geq 4 = m_1$$
$$|f''(x)| = 4e^{2x} \leq 36 = M_2.$$

Ekkor $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{9}{2}$, így minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{1}{M}, |x^* - 1|, |x^* - 0|\right\} = \frac{2}{9},$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{9}{2} \cdot |x_k - x^*|^2.$$

23. A feladatot a Newton-módszer globális és lokális konvergenciatételének alkalmazásával is megoldjuk. A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\cos(x_k) - 4x_k + 2}{-\sin(x_k) - 4}.$$

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza az $f(x) = \cos(x) - 4x + 2 = 0$ egyenlet gyökét. A $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallum jó választás, mert

$$f(0) = 1 + 2 = 3 > 0$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi + 2 < 0.$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit.
A $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon

$$f'(x) = -\sin(x) - 4 < 0$$
$$f''(x) = -\cos(x) < 0,$$

továbbá f monoton fogyása miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) < 0 \Leftrightarrow x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton fogyóan konvergál a gyökhöz. Ez a konvergenciatétel a monoton konvergenciát bizonyítja.

c) Nézzük a Newton-módszer lokális konvergenciatételét, annak további feltételeit.
A $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon

$$f'(x) = -\sin(x) - 4 < 0$$
$$|f'(x)| = \sin(x) + 4 \geq 4 = m_1$$
$$|f''(x)| = \cos(x) \leq 1 = M_2.$$

Ekkor $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{1}{8}$, így minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{1}{M}, |x^* - \frac{\pi}{2}|, |x^* - 0|\right\} = |x^* - 0|,$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{8} \cdot |x_k - x^*|^2.$$

24. A feladatot a Newton-módszer globális és lokális konvergenciatételének alkalmazásával is megoldjuk. A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin(x_k) - 2x_k + 1}{\cos(x_k) - 2}.$$

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza az $f(x) = \sin(x) - 2x + 1 = 0$ egyenlet gyökét. A $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallum jó választás, mert

$$f(0) = 1 > 0$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \pi + 1 = 2 - \pi < 0.$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit.
A $[0;\,\frac{\pi}{2}]$ intervallumon

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) - 2 < 0 \\ f''(x) &= -\sin(x) < 0, \end{aligned}$$

továbbá f monoton fogyása miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) < 0 \Leftrightarrow x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton fogyóan konvergál a gyökhöz. Ez a konvergenciatétel csak a monoton konvergenciát bizonyítja.

c) Nézzük a Newton-módszer lokális konvergenciatételét, annak további feltételeit.
A $[0;\,\frac{\pi}{2}]$ intervallumon

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) - 2 < 0 \\ |f'(x)| &= -\cos(x) + 2 \geq 1 = m_1 \\ |f''(x)| &= \sin(x) \leq 1 = M_2. \end{aligned}$$

Ekkor $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{1}{2}$, így minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{1}{M},\, |x^* - \frac{\pi}{2}|,\, |x^* - 0|\right\} = |x^* - \frac{\pi}{2}|,$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{2} \cdot |x_k - x^*|^2.$$

25. A feladatot a Newton-módszer globális és lokális konvergenciatételének alkalmazásával is megoldjuk. A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{x_k} - \frac{1}{4}x_k - 2}{e^{x_k} - \frac{1}{4}}.$$

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza az $f(x) = e^x - \frac{1}{4}x - 2 = 0$ egyenlet gyökét. A $[0; 1]$ intervallum jó választás, mert

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(1) &= e - \frac{1}{4} - 2 = e - \frac{9}{4} > 0. \end{aligned}$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit.
A $[0; 1]$ intervallumon

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - \frac{1}{4} > 0 \\ f''(x) &= e^x > 0, \end{aligned}$$

továbbá f monoton növekedése miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton fogyóan konvergál a gyökhöz. Ez a konvergenciatétel csak a monoton konvergenciát bizonyítja.

c) Nézzük a Newton-módszer lokális konvergenciatételét, annak további feltételeit.
A $[0;1]$ intervallumon

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - \frac{1}{4} > 0 \\ |f'(x)| &= e^x - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4} = m_1 \\ |f''(x)| &= e^x \leq 3 = M_2. \end{aligned}$$

Ekkor $M = \frac{M_2}{2m_1} = 2$, így minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{1}{M}, |x^* - 1|, |x^* - 0|\right\} = |x^* - 1|,$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq 2 \cdot |x_k - x^*|^2.$$

26. A Newton-módszer által generált sorozat

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{\frac{1}{3}x_k^2 - x_k - 1}{\frac{2}{3}x_k - 1} = x_k - \frac{x_k^2 - 3x_k - 3}{2x_k - 3} = \\ &= \frac{2(x_k)^2 - 3x_k - x_k^2 + 3x_k + 3}{2x_k - 3} = \frac{x_k^2 + 3}{2x_k - 3}. \end{aligned}$$

A $\varphi(x) = \frac{x^2+3}{2x-3}$ függvénnyel kapjuk a fenti $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozatot.

a) A Bolzano tétel segítségével olyan intervallumot keresünk, mely tartalmaz gyököt.
A $[-1;0]$ intervallum jó, mert

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{1}{3}(-1)^2 + 1 - 1 = \frac{1}{3} > 0 \\ f(0) &= -1 < 0 \end{aligned}$$

miatt az intervallum tartalmaz gyököt.

b) Vizsgáljuk a $\varphi(x) = \frac{x^2+3}{2x-3}$ függvény deriváltját.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{2x(2x-3) - 2(x^2+3)}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 6}{2x-3)^2} = \\ &= 6\frac{f(x)}{(2x-3)^2} \end{aligned}$$

Mivel a számlálóban az $f(x)$ függvény szerepel, így a $\varphi'(x^*) = 0$. Másrészt $x \in [-1;\, x^*]$ esetén $f(x) > 0$, ezért f szigorúan monoton növő, $x \in [x^*;\, 0]$ esetén $f(x) < 0$, ezért f szigorúan monoton fogyó, ezért φ-nek lokális maximuma van x^*-ban. Mivel $\varphi(-1) = -\frac{4}{5}$, $\varphi(x^*) = x^*$ és $\varphi(0) = -1$,

$$\varphi\left([-1;0]\right) = [\varphi(0); \varphi(x^*)] = [-1; x^*] \subset [-1;0].$$

Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[-1;0]$ intervallumon.

$$\varphi''(x) = 2\frac{(4x-6)(2x-3) - 4(2x^2 - 6x - 6)}{(2x-3)^3} = \frac{42}{(2x-3)^3} < 0,$$

így φ' szigorúan monoton fogyó és

$$-\frac{2}{3} = \varphi'(0) \le \varphi'(x) \le \varphi'(-1) = \frac{2}{25}.$$

A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| \le \frac{2}{3} = q < 1 \quad \xi \in [-1;0]$$

miatt φ kontrakció $[-1;0]$-n. A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a fixponttétel állításai alkalmazhatók a feladatra.

c) A sorozat konvergenciarendje 2, mivel a Taylor-formula és $\varphi'(x^*) = 0$ miatt $\exists\ \xi_k \in [x_k;\, x^*]$ vagy $[x^*;\, x_k]$ intervallumban, hogy

$$|x_{k+1} - x^*| = |\varphi(x_k) - \varphi(x^*)| = \frac{1}{2} \cdot |\varphi''(\xi_k)| \cdot |x_k - x^*|^2.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\varphi''(\xi_k)| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\varphi''(x^*)| = \\ &= \frac{21}{|2x^* - 3|^3} = c \ne 0.\end{aligned}$$

Analóg módon a $[2;4]$ intervallumra is elvégezhetjük a vizsgálatot.

27. A feladatot a Newton-módszer globális és lokális konvergenciatételének alkalmazásával is megoldjuk. A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k)^2 - 2\sqrt{x_k} - 2}{2x_k - \frac{1}{\sqrt{x_k}}}.$$

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza az $f(x) = x^2 - 2\sqrt{(}x) - 2 = 0$ egyenlet gyökét. Az $[1;3]$ intervallum jó választás, mert

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 - 2 - 2 = -3 < 0\\ f(3) &= 9 - 2\sqrt{3} - 2 > 0.\end{aligned}$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit. Az $[1;3]$ intervallumon

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} > 0\\ f''(x) &= 2 + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} > 0,\end{aligned}$$

továbbá f szigorúan monoton növekedése miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton fogyóan konvergál a gyökhöz. Ez a konvergenciatétel csak a monoton konvergenciát bizonyítja.

c) Nézzük a Newton-módszer lokális konvergenciatételét, annak további feltételeit. Az $[1;3]$ intervallumon $f'' > 0$ miatt f' szigorúan monoton nő

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$
$$|f'(x)| = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} \geq |f'(1)| = 1 = m_1$$
$$|f''(x)| = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \leq |f''(1)| = \frac{5}{2} = M_2.$$

Ekkor $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{5}{4}$, így minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{1}{M}, |x^* - 1|, |x^* - 3|\right\} = |x^* - 3|,$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{5}{4} \cdot |x_k - x^*|^2.$$

28. Először nézzük az $f(x) = \frac{-x}{1+x}$ függvény deriváltját

$$f'(x) = \frac{-(1+x) - (-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1 - x + x}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{-x_k}{1+x_k}}{\frac{-1}{(1+x_k)^2}} = -(x_k)^2.$$

A feladatot a Newton-módszer globális konvergenciatételének alkalmazásával oldjuk meg.

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza a gyököt, azaz 0-t. Minden $[a;b]$ intervallum jó választás, ahol $-1 < a < 0$ és $0 < b < 1$, ugyanis

$$f(a) = \frac{-a}{1+a} > 0$$
$$f(b) = \frac{-b}{1+b} < 0.$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit. Az $[1;3]$ intervallumon

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} < 0$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} > 0,$$

továbbá f szigorúan monoton fogyása miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 < 0.$$

Tehát $x_0 < 0$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton növekedően konvergál a gyökhöz. Ha $0 < x_0 < b$ kezdőértékből indulunk, akkor $x_1 = -(x_2)^2 < 0$ és innen már monoton növekedően konvergál a módszer. Tehát az $[a;b]$ intervallum bármely pontjából indítva a rekurziót, konvergens sorozatot kapunk.

c) Az előző konvergenciatétel csak a monoton konvergenciát bizonyítja, azonban a másodrendű kovergencia a sorozat képletéből könnyen adódik. A hibabecslés

$$x_{k+1} - 0 = -(x_k - 0)^2$$

$$|x_{k+1} - 0| = |x_k - 0|^2,$$

és a másodrendű konvergencia bizonyítása

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = 1 \neq 0.$$