Numerikus Módszerek

1. Zh megoldása

2010.10.19.

1. (a) Először váltsuk át az $\frac{1}{5}$ és $\frac{1}{10}$ törteket kettes számrendszerbe.

	2
0	4
0	8
1	6
1	2
0	4
0	8
1	6
1	2
0	4

A mantissza hosszának megfelelően, az első 6 hasznos jegyet kell megtartanunk, ez az 110011. Mivel az ez után következő 7. jegy nulla, ezért ezen az értéken nem vátoztatunk. Mivel lefelé kerekítettünk, ezért ellenőriznünk kell, hogy a kapott számhoz vagy a felső szomszédjához van-e közelebb az $\frac{1}{5}$.

$$[110011|-2] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)\cdot 2^{-2} = \frac{32+16+2+1}{256} = \frac{51}{256}$$

$$[110100|-2] = \frac{52}{256}$$

Mivel

$$0,003125 \approx \frac{52}{256}-\frac{1}{5} \quad > \quad \frac{1}{5}-\frac{51}{256} \approx 0,00078125,$$

ezért $fl\left(\frac{1}{5}\right) = [110011|-2] = \frac{51}{256}$ a megfeleltetett gépi szám.
Mivel $\frac{1}{10} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}$, ezért az $\frac{1}{10}$ gépi megfelelője megegyezik az $\frac{1}{5}$-höz tartozó gépi számmal, azzal a különbséggel, hogy most a karakterisztika eggyel kisebb lesz (az első nulla elé bekerül egy újabb nulla a kettedestörtté alakításkor), vagyis

$$[110011|-3] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)\cdot 2^{-3} = \frac{32+16+2+1}{512} = \frac{51}{512},$$

ezért $fl\left(\frac{1}{10}\right) = [110011|-3] = \frac{51}{512}$ a megfeleltetett gépi szám. (5 pont)

(b) El kell végeznünk az $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)$ gépi kivonást. Ehhez előbb közös karakterisztikára kell hoznunk a számokat. Mindig a kisebb karakterisztikájú számot igazítjuk a nagyobbhoz, így most az $fl\left(\frac{1}{10}\right)$-et kerekítjük. A lecsorduló egyes miatt felfelé kerekítünk, így

$$[110011|-3] \to [011010|-2]\,.$$

$$\begin{array}{r} [110011|-2] \\ -\,[011010|-2] \\ \hline [011001|-2] \end{array}$$

Innen normalizálással kapjuk a végeredményt:

$$[110010|-3] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}\right)\cdot 2^{-3} = \frac{25}{256} = \frac{50}{512}.$$

(2 pont)

(c) $fl\left(\frac{1}{10}\right) = [110011|-3]$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{fl\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-3} = 2^{-10}$$

$fl\left(\frac{1}{5}\right) = [110011|-2]$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{fl\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-2} = 2^{-9}$$

Az eredmény, $[110010|-3] = \frac{25}{256}$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{\frac{25}{256}} = \Delta_{fl\left(\frac{1}{10}\right)} + \Delta_{fl\left(\frac{1}{5}\right)} = 2^{-10} + 2^{-9} = 3 \cdot 2^{-10}$$

(3 pont)

2. Végezzük el az elimináció első két lépését, hogy megsejtsük a megoldást.
1. lépés:
A 3. sorhoz adjuk hozzá az 1. sort.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

2. lépés:
A 4. sorhoz adjuk hozzá a 2. sort.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(2 pont)

Sejtés: a mátrix általános alakja az elimináció után egy $n \times n$-es egységmátrix lesz. Továbbá a $\underline{b}$ vektor minden páratlan indexű eleme 1, a párosak pedig 0-ák lesznek. Feltesszük tehát, hogy a sejtés, a mátrix egy $k \times k$-s részmátrixára igaz. Be kell látnunk, hogy ez az elimináció $k+1$. lépése után is igaz marad. Legyen k páratlan, ekkor

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n. \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \boxed{-1} & 0 & 1 & \dots & 0 & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

a k. lépésben a k. sort kell hozzáadni a $k+2$. sorhoz:

$$
\begin{array}{r}
1.\\
2.\\
\vdots\\
k.\\
k+1.\\
k+2.\\
\vdots\\
n.
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \vdots\\
\vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1\\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \boxed{0} & 0 & 1 & \dots & 0 & \boxed{1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Páros k esetén a bizonyítás hasonló. Beláttuk tehát, hogy a $k+2$. sor eliminálása után, a mátrix bal felső, $(k+2)\times(k+2)$-s részmátrixa is egy egységmátrix. A végeredményben tehát a $\mathbf{b}$ vektor a következő alakú lesz
n páratlan esetén:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$$

n páros esetén:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

(4 pont)

3. (a)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2\\ 2 & 10 & 9 & 5\\ 6 & 9 & 14 & 2\\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ l_1 & 1 & 0 & 0\\ l_2 & l_3 & 1 & 0\\ l_4 & l_5 & l_6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2\\ 0 & u_1 & u_2 & u_3\\ 0 & 0 & u_4 & u_5\\ 0 & 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

Az együtthatókat a parkettázásnak megfelelő sorrendben számítjuk ki:

$$2 = l_1 \cdot 4 \to l_1 = \frac{1}{2} \qquad 10 = l_1 \cdot 2 + u_1 \to u_1 = 9$$
$$6 = l_2 \cdot 4 \to l_2 = \frac{3}{2} \qquad 9 = l_1 \cdot 6 + u_2 \to u_2 = 6$$
$$-2 = l_4 \cdot 4 \to l_4 = -\frac{1}{2} \qquad 5 = l_1 \cdot -2 + u_3 \to u_3 = 6$$

Ezt követően kiszámítjuk L második oszlopát és U harmadik sorát:

$$9 = l_2 \cdot 2 + l_3 \cdot u_1 \to l_3 = \frac{2}{3} \qquad 14 = l_2 \cdot 6 + l_3 \cdot u_2 + u_4 \to u_4 = 1$$
$$5 = l_4 \cdot 6 + l_5 \cdot u_1 \to l_5 = \frac{2}{3} \qquad 2 = l_2 \cdot -2 + l_3 \cdot u_3 + u_5 \to u_5 = 1$$

Majd végül l_6-ot és u_6-ot:

$$2 = l_4 \cdot 6 + l_5 \cdot u_2 + l_6 \cdot u_4 \to l_6 = 1$$
$$7 = l_4 \cdot -2 + l_5 \cdot u_3 + l_6 \cdot u_5 + u_6 \to u_6 = 1$$

Visszaírva a kapott értékeket a megfelelő mátrixokba:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2\\ 0 & 9 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5 pont)

Innen a $\det(A) = 4 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 = 36$. (1 pont)

(b) Az LDL^T felbontást egyszerűen megkapjuk az LU felbontásból:

$$A = LU = LDD^{-1}U = LDL^T,$$

ahol L az LU felbontásbeli L,

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

(c) A Cholesky felbontást a következőképpen kapjuk:

$$A = LU = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = \widetilde{L}\widetilde{L}^T.$$

$$\widetilde{L} = L \cdot \sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

4. Számítsuk ki, az A mátrix QR felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5} \\ \mathbf{q_1} &= \tfrac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \tfrac{1}{2\sqrt{5}}\mathbf{a_1} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2 pont)

$$\begin{aligned} r_{12} &= \langle \mathbf{a_2}, \mathbf{q_1} \rangle = -2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ \mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -10+6 \\ 5+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \\ r_{22} &= \|\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\|_2 = \left\| \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{(-4)^2+8^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \mathbf{q_2} &= \frac{1}{r_{22}}(\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}) = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3 pont)

Tehát a Q és R mátrixok a következők:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2\sqrt{5} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

(1 pont)

5. Householder transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra.

$$\sigma = -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = -sgn(1) \cdot \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+1^2} = -2$$

(1 pont)

Innen már ki tudjuk számolni a $\mathbf{v}$ vektort:

$$\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}\|_2 = 2\sqrt{3}, \qquad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}}{\|\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

Most alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} &= \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\right) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}\right) = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{k = -2}
\end{aligned}$$

(3 pont)