Az alábbi típusú feladatok megoldását várjuk el. A zh-n persze kevesebb feladat lesz; annyi, amennyinek a megoldása 90 percben elvárható.

1. feladat. *A definíció alapján határozza meg a következő határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3}$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x-4}{x^2+1}$.

Megoldás.

(a) (-3) a szóban forgó függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. A határérték megsejtéséhez először átalakítjuk a törtet:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}\big).$$

Ez a kifejezés (-3)-hoz „közeli" pontokban $-\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$-höz „közeli" értékeket vesz fel, ezért azt *sejtjük*, hogy a keresett határérték $-\frac{2}{5}$. A *bizonyításhoz* azt kell megmutatnunk, hogy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left|\frac{x-1}{x^2+1} - \left(-\frac{2}{5}\right)\right| < \varepsilon,$$

ha $0 < |x-(-3)| = |x+3| < \delta$, valamely, alkalmas, ε-tól függő $\delta > 0$ számmal. Alakítsuk át a vizsgálandó kifejezést:

$$\left|\frac{x-1}{x^2+1} - \left(-\frac{2}{5}\right)\right| = \frac{|2x^2+5x-3|}{5(x^2+1)} = \frac{|(x+3)(2x-1)|}{5(x^2+1)} = |x+3| \cdot \frac{|2x-1|}{5(x^2+1)}.$$

Ebből látszik, hogy egy lehetséges δ megkapható, ha felülről megbecsüljük az $\frac{|2x-1|}{5(x^2+1)}$ kifejezést. Ha (például) $|x-(-3)| = |x+3| < 1$, azaz ha $-4 < x < -2$, akkor

$$\frac{|2x-1|}{5(x^2+1)} < \frac{2|x|+1}{5(x^2+1)} < \frac{2\cdot 4+1}{5\big((-2)^2+1\big)} = \frac{9}{25}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\varepsilon > 0$ számhoz a $\delta := \min\big(1, \frac{25\varepsilon}{9}\big)$ választás megfelelő. ■

(b) $+\infty$ a szóban forgó függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. A határérték megsejtéséhez most a következő átalakítást végezzük el:

$$\frac{x^3+x-4}{x^2+1} = \frac{x+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

A *sejtés* tehát az, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x-4}{x^2+1} = +\infty.$$

Azt kell *igazolnunk*, hogy $\forall\, P > 0$ számhoz $\exists\, x_0 > 0$, hogy

$$(*) \qquad \frac{x^3+x-4}{x^2+1} > P, \qquad \text{ha } \; x \geq x_0.$$

Mivel

$$\frac{x^3+x-4}{x^2+1} \overset{\boxed{\text{ha } x > 4}}{>} \frac{x^3}{x^2+x^2} = \frac{x}{2},$$

ezért $(*)$ valóban teljesül, ha $x \geq x_0 := \max\{4, 2P\}$. ■

2. feladat. *Számítsa ki az alábbi határértékeket:*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{\dfrac{4x^3+3x^2}{4x-3}}\right)$; (b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\cos 7x-\cos 3x}$, (d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x+1}{x^3+x-2}$.

Megoldás. (a) $(+\infty)-(+\infty)$-típusú kritikus határértékről van szó. A „gyöktelenítés", majd a „leosztás" technikáját alkalmazva alakítjuk át a megadott kifejezést:

$$x-\sqrt{\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}}=\left(x-\sqrt{\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}}}{x+\sqrt{\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}}}=\frac{x^2-\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}}{x+\sqrt{\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}}}=$$

$$=-\frac{6x^2}{(4x-3)\cdot\left(x+\sqrt{\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}}\right)}=-\frac{6}{\left(4-\frac{3}{x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{\frac{4+\frac{3}{x}}{4-\frac{3}{x}}}\right)}.$$

$x\to+\infty$ esetén a számláló 6-hoz, a nevező pedig $4\cdot(1+1)=8$-hoz tart, ezért

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}}\right)=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.\ \blacksquare$$

(b) Írjuk be e^x, e^{-x} és $\sin x$ helyére a **hatványsoraikat**:

$$\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=$$

$$=\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)-\left(1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\frac{(-x)^4}{4!}+\cdots\right)-2x}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)}=$$

$$=\frac{2\frac{x^3}{3!}+2\frac{x^5}{5!}+2\frac{x^7}{7!}+\cdots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\cdots}=2\cdot\frac{\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}+\frac{x^4}{7!}+\cdots}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\frac{x^4}{7!}-\cdots}.$$

Alkalmazzuk most a hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tételt: a számláló és a nevező határértéke 0-ban $\frac{1}{3!}$, ezért a kérdezett határérték 2. $\blacksquare$

(c) 0 a szóban forgó függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó, ezért azonos átalakításokkal nem kritikus határértékre próbáljuk visszavezetni.

A számlálóban „félszögekre áttérve" azt kapjuk, hogy

$$1-\cos x=1-\cos 2\cdot\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

A nevező átalakításához arra érdemes emlékezni, hogy a

$$\cos\alpha\pm\cos\beta\qquad(\text{ill. a}\quad\sin\alpha\pm\sin\beta)$$

összegeket szorzatra lehet bontani. Például:

$$\cos\alpha-\cos\beta=\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y,$$

$$x+y=\alpha\quad\text{és}\quad x-y=\beta\quad\Longrightarrow\quad x=\tfrac{\alpha+\beta}{2},\ \ y=\tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ezért

$$\cos 7x-\cos 3x=-2\sin\tfrac{7x+3x}{2}\cdot\sin\tfrac{7x-3x}{2}=-2\sin 5x\sin 2x.$$

A fentiek és a

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1\qquad(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

reláció alapján

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos 7x-\cos 3x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin 5x\cdot\sin 2x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot 5\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot 2}=-\frac{1}{40}.\ \blacksquare$$

Megjegyzés. A feladatra további két megoldás is adható:

Az 1. lehetőség: a gyakorlaton bebizonyított

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

egyenlőség alkalmazása.

A 2. lehetőség: a cos függvény hatványsoros definíciójának felhasználása.

(d) A számláló tart 1-hez, a nevező pedig 0-hoz, ha $x\to 1$. $\frac{1}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó.

Ha $x>1$, akkor $x^3+x-2=(x^3-1)+(x-1)>0$. A nevező tehát 1-ben jobbról pozitív számokon keresztül tart 0-hoz, ezért

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3-x+1}{x^3+x-2}=+\infty.$$

Ha $x<1$, akkor $x^3+x-2=(x^3-1)+(x-1)<0$. A nevező tehát 1-ben balról negatív számokon keresztül tart 0-hoz, ezért

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3-x+1}{x^3+x-2}=-\infty.$$

A jobb oldali határérték $+\infty$, a bal oldali pedig $-\infty$, ezért a keresett határérték nem létezik. $\blacksquare$

3. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x):=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-1)}{2(x-1)}, & \text{ha } x<1\\ 1, & \text{ha } x=1\\ \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}, & \text{ha } x>1 \text{ és } x\neq 5\\ 0, & \text{ha } x=5\end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit és a szakadási helyek típusait.

Megoldás. Világos, hogy $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ és

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-5)}=\frac{x-3}{x-5}\qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}).$$

Az elemi függvények folytonosságára, valamint a folytonosság és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeink alapján

$$f\in C\{a\},\qquad \text{ha}\ \ a\in(-\infty,1)\cup(1,5)\cup(5,+\infty)$$

Tekintsük az $a=1$ pontot. Itt az egyoldali határértékek:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{y\to 0-0}\frac{\sin y}{2y}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2},$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-3}{x-5}=\frac{1}{2}.$$

A függvénynek az 1 pontban tehát van határértéke:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2} \neq f(1) = 1,$$

ezért az $a = 1$ pont az f függvénynek *megszüntethető szakadási helye.*

Legyen most $a = 5$. Ekkor

$$\lim_{x\to 5-0} f(x) = \lim_{x\to 5-0} \frac{x-3}{x-5} = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 5+0} f(x) = \lim_{x\to 5+0} \frac{x-3}{x-5} = +\infty,$$

ami azt jelenti, hogy az $a = 5$ pont az f függvénynek *másodfajú szakadási helye.* ■

4. feladat. *Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter esetén lesz az*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}, & ha\ x \in (0,1) \\ 3\alpha x^2 + \alpha^2, & ha\ x \in [1,+\infty) \end{cases}$$

függvény folytonos az 1 *pontban?*

Megoldás.
Mivel $1 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, ezért az f függvény akkor és csak akkor folytonos az 1 pontban, ha ebben a pontban a bal- és a jobb oldali határértékek léteznek és $f(1)$-gyel egyenlők.

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (3\alpha x^2 + \alpha^2) = 3\alpha + \alpha^2 = f(1).$$

Másrészt

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{(1-x^2)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{2(x-1)} = -\lim_{x\to 1-0} \frac{(1+x)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{2} = -2,$$

ezért f pontosan akkor folytonos az 1 pontban, ha

$$-2 = 3\alpha + \alpha^2, \quad \text{azaz ha} \quad \alpha^2 + 3\alpha + 2 = (\alpha+1)(\alpha+2) = 0,$$

$$\text{vagyis} \quad \alpha = -1 \quad \text{vagy} \quad \alpha = -2. \ ■$$

5. feladat. *Számítsa ki az*

$$f(x) := \frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}} \qquad (x < 1)$$

függvény deriváltját. (Egyszerűsíteni nem kell.)
Írja fel a függvény grafikonjának az $a := 0$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét.

Megoldás. Az f függvény deriválható minden $x < 1$ pontban (l. az elemi függvények deriválására, valamint a műveletek és a deriváltakra vonatkozó állításokat).

$$f'(x) = \frac{5(x^2+1)^4 \cdot 2x \cdot \sqrt{1-x} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1) \cdot (x^2+1)^5}{1-x} \qquad (x < 1).$$

Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontjában az érintőegyenes egyenlete:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Mivel

$$f(a) = f(0) = 1, \quad \text{és} \quad f'(a) = f'(0) = \frac{1}{2}$$

ezért az érintőegyenes egyenlete:

$$y - 1 = \frac{x}{2}. \ ■$$