EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

NUMERIKUS ANALÍZIS
PÉLDATÁR

Bozsik József, Krebsz Anna

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. fejezet

GÉPI SZÁMÁBRÁZOLÁS ÉS HIBASZÁMÍTÁS

1.1. Feladatok

1.1.1. Gépi számábrázolás

1. Vizsgáljuk meg az $M(6,-3,3)$ gépi számhalmazt!

a) Mennyi az elemszáma?

b) Adjuk meg a nevezetes számait: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, M_\infty$.

2. Vizsgáljuk meg az $M(5,-4,4)$ gépi számhalmazt!

a) Mennyi az elemszáma?

b) Adjuk meg a nevezetes számait: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, M_\infty$.

3. Vizsgáljuk meg az $M(8,-4,4)$ gépi számhalmazt!

a) Mennyi az elemszáma?

b) Adjuk meg a nevezetes számait: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, M_\infty$.

4. Az $M=(6,-4,4)$ gépi számhalmazban adjuk meg $fl(4,21)$ értékét!

5. Az $M=(6,-4,4)$ gépi számhalmazban adjuk meg $fl(0,11)$ értékét!

6. Az $M=(8,-4,4)$ gépi számhalmazban adjuk meg $fl(\frac{1}{6})$ értékét! Hasonlítsuk össze, milyen bináris tört közelítést kapunk 2, 3 illetve 4 tizedesjegy pontosságból kiindulva!

7. Az $M=M(6,-3,3)$ gépi számok halmazában adjuk meg a $\sqrt{2}$ -nek megfeleltetett gépi számot, és adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot.

8. Az $M=(5,-4,4)$ gépi számhalmazban adjuk meg $fl(\sqrt{3})$ értékét!

9. Adjuk meg a $\sqrt{5}$-nek megfeleltetett gépi számot az $M(6,-3,3)$ gépi számok halmazában. Adjon a közelítésre abszolút és relatív hibakorlátot!

10. Az $M=M(6,-4,4)$ gépi számok halmazában

a) adjuk meg az $\frac{1}{6}$ -nak és $\frac{1}{12}$ -nek megfeleltetett gépi számokat,

b) végezzük el az $fl(\frac{1}{6})-fl(\frac{1}{12})$ gépi kivonást,

c) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot $fl(\frac{1}{6})$ -ra, $fl(\frac{1}{12})$ -re és az eredményre!

11. Az $M = M(6, -3, 3)$ gépi számok halmazában adjuk meg az $\frac{5}{6}$ -nak megfeleltetett gépi számot és számítsa ki az $fl(\frac{5}{6}) + fl(\frac{5}{6})$ összeget a megadott aritmetikában! Adjon abszolút hibakorlátot a számított összegre!

12. Az $M = M(8, -4, 4)$ gépi számok halmazában

a) adjuk meg az $\frac{1}{3}$ -nak és $\frac{1}{6}$ -nak megfeleltetett gépi számokat,

b) végezzük el az $fl(\frac{1}{3}) - fl(\frac{1}{6})$ gépi kivonást,

c) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot $fl(\frac{1}{3})$ -ra, $fl(\frac{1}{6})$ -ra és az eredményre!

13. Az $M = M(6, -4, 4)$ gépi számok halmazában

a) adjuk meg a $\sqrt{3}$ -nak és π -nek megfeleltetett gépi számokat,

b) végezzük el az $fl(\pi) - fl(\sqrt{3})$ gépi kivonást,

c) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot $fl(\sqrt{3})$ -ra, $fl(\pi)$ -re és az eredményre!

14. Az M=M(5,-3,3) gépi számok halmazában keressük meg a $\sqrt{2}$ -nek és a $\sqrt{3}$ -nak megfeleltetett gépi számot! Számítsa ki a $fl(\sqrt{2}) + fl(\sqrt{3})$ értékét a megadott aritmetikában. Adjon a közelítésre abszolút és relatív hibakorlátot!

1.1.2. Műveletek hibája

15. A 3-t $1,73 \cdot 1,73$ -mal közelítjük. Adjunk a szorzatra abszolút és relatív hibakorlátot, ha tudjuk, hogy $1,73$ a $\sqrt{3}$ két tizedes jegyre kerekített értéke!

16. A 4-et $1,41 \cdot 2,43$ -mal közelítjük. Adjunk a közelítésre abszolút és relatív hibakorlátot, ha tudjuk, hogy $1,41$ a $\sqrt{2}$ és $2,43$ a $\sqrt{8}$ két tizedes jegyre kerekített értéke!

17. A $\frac{2}{\sqrt{2}}$ -t $\frac{2}{1{,}414}$ -gyel közelítjük. Adjunk a közelítésre abszolút és relatív hibakorlátot, ha tudjuk, hogy $1,414$ a $\sqrt{2}$ három tizedes jegyre kerekített értéke!

18. Az $\frac{1}{\pi}$ -t $\frac{1}{3{,}14}$ -gyel közelítjük. Adjuk meg a közelítés abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy $3,14$ a π két tizedes jegyre kerekített értéke!

19. Közelítsük az $e \cdot \pi$ szorzatot $2,718 \cdot 3,142$ -vel. Adjuk meg a közelítés abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy e és π három tizedes jegyre kerekített értékét használtuk.

20. Számítsuk ki a $\sqrt{2007} - \sqrt{2006}$ mennyiséget, ha tudjuk, hogy $\sqrt{2007} \approx 44,80$ és $\sqrt{2006} \approx 44,79$ két tizedesjegyre számított közelítések!

a) Adjuk meg a számított különbség abszolút és relatív hibakorlátját!

b) A különbséget írjuk fel a vele ekvivalens alakba.

$$\sqrt{2007} - \sqrt{2006} = \frac{2007 - 2006}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}} = \frac{1}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}}.$$

Ezzel a számítási móddal milyen abszolút és relatív hibakorlátot kapunk?

c) Hasonlítsuk össze a kétféle számítás hibabecslését!

1.1.3. Függvényérték hibája

21. A 3^π közelítésére 3^3-t használjuk. Adjuk meg a függvényérték abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy 3 a π egészre kerekített értéke!

22. A e^2 közelítésére 3^2-t használjuk ($e = \exp(1)$). Adjuk meg a függvényérték abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy 3 az e egészre kerekített értéke!

23. A $\cos(0,8)$ közelítésére $\cos(\frac{\pi}{4})$-t használjuk. Adjuk meg a függvényérték abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy $0,8$ a $\frac{\pi}{4}$ -nek az egy tizedesjegyre kerekített értéke!

24. A $\sin(0,5)$ közelítésére $\sin(\frac{\pi}{6})$-t használjuk. Adjuk meg a függvényérték abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy $0,5$ a $\frac{\pi}{6}$ -nak az egy tizedesjegyre kerekített értéke!

1.2. Megoldások

1.2.1. Gépi számábrázolás

1. **a)** A szám előjele kétféle lehet. Az első mantissza jegy mindig 1, a többi 5 egyenként kétféle lehet. A karakterisztika -3-tól 3-ig 7 féle lehet. Vegyük még hozzá a 0-t, így összesen

$$2 \cdot 2^5 \cdot 7 + 1 = 449$$

eleme van a halmaznak.

b) ε_0-t, a legkisebb pozitív számot a legkisebb mantisszával és legkisebb karakterisztikával kapjuk.

$$\varepsilon_0 = [100000|-3] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-3} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

ε_1-t, a gépi számábrázolás relatív hibáját úgy kapjuk, hogy az 1 után következő gépi számból kivonjuk az 1-et.

$$\varepsilon_1 = [100001|\,1] - [100000|\,1] = 2^{-6} \cdot 2^1 = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

M_∞-t, a legnagyobb pozitív gépi számot a legnagyobb mantisszával és legnagyobb karakterisztikával kapjuk.

$$M_\infty = [111111|\,3] = \left(1 - 2^{-6}\right) \cdot 2^3 = 8 - \frac{1}{8} = 7,875$$

2. **a)** A szám előjele kétféle lehet. Az első mantissza jegy mindig 1, a többi 4 egyenként kétféle lehet. A karakterisztika -4-től 4-ig 9 féle lehet. Vegyük még hozzá a 0-t, így összesen

$$2 \cdot 2^4 \cdot 9 + 1 = 289$$

eleme van a halmaznak.

b) ε_0-t, a legkisebb pozitív számot a legkisebb mantisszával és legkisebb karakterisztikával kapjuk.

$$\varepsilon_0 = [10000|-4] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-4} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

ε_1-t, a gépi számábrázolás relatív hibáját úgy kapjuk, ha az 1 után következő gépi számból kivonjuk az 1-et.

$$\varepsilon_1 = [10001|\,1] - [10000|\,1] = 2^{-5} \cdot 2^1 = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

M_∞-t, a legnagyobb pozitív gépi számot a legnagyobb mantisszával és legnagyobb karakterisztikával kapjuk.

$$M_\infty = [11111|\,4] = \left(1 - 2^{-5}\right) \cdot 2^4 = 16 - \frac{1}{2} = 15,5$$

3. **a)** A szám előjele kétféle lehet. Az első mantissza jegy mindig 1, a többi 7 egyenként kétféle lehet. A karakterisztika -4-től 4-ig 9 féle lehet. Vegyük még hozzá a 0-t, így összesen

$$2 \cdot 2^7 \cdot 9 + 1 = 2305$$

eleme van a halmaznak.

b) ε_0-t, a legkisebb pozitív számot a legkisebb mantisszával és legkisebb karakterisztikával kapjuk.

$$\varepsilon_0 = [10000000|-4] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-4} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

ε_1-t, a gépi számábrázolás relatív hibáját úgy kapjuk, ha az 1 után következő gépi számból kivonjuk az 1-et.

$$\varepsilon_1 = [10000001|\,1] - [10000000|\,1] = 2^{-8} \cdot 2^1 = 2^{-7} = \frac{1}{128}$$

M_∞-t, a legnagyobb pozitív gépi számot a legnagyobb mantisszával és legnagyobb karakterisztikával kapjuk.

$$M_\infty = [11111111|\,4] = \left(1 - 2^{-8}\right) \cdot 2^4 = 16 - \frac{1}{16} = 15,9375$$

4. Nézzük meg, melyik az a két gépi szám, mely a $4,21$ -t közrefogja. Egy lehetséges megoldás, hogy átírjuk bináris számmá. Az egész és tört részét külön váltjuk át. Az egészrésznél maradékosan osztunk kettővel. A hányadost az első oszlopba írjuk, a maradékot a második oszlopba. A törtrésznél a törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk. Mivel 6 jegyű a mantissza, ezért a kerekítéssel együtt 7 jegyre van szükségünk, ez az egész résznél 3 jegy (lásd átváltás), a törtrésznél 4 jegy kiszámítását jelenti. Mivel a 4. bináris tört jegy 1, ezért felfelé kerekítünk, a kapott bináris szám utolsó jegyéhez egyet hozzáadunk binárisan. A táblázatból az egészrésznél a maradék jegyek kiolvasását lentről felfelé, a törtrésznél az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. Így az $4,21$ kerekítése kettes számrendszerben 100.010 lesz.

4	
2	0
1	0
0	1

	21
0	42
0	84
1	68
1	36

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz hárommal balra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a balra tolás miatt 3 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[100010|\,3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^3 = \frac{16+1}{4} = \frac{17}{4} = 4,25.$$

Ellenőrizzük a kapott szám helyességét. Mivel felfelé kerekítettünk, ezért meg kell néznünk a szám alsó szomszédját. Ez az

$$[100010|\,3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^3 = \frac{32+1}{8} = \frac{33}{8} = 4,125.$$

Összehasonlítva, hogy melyik szám van közelebb $4,21$-hez azt kapjuk, hogy az eredeti számunk.

$$4,21 - 4,125 = 0,085 \quad > \quad 0,04 = 4,25 - 4,21$$

Tehát $fl(4,21) = [100010|\,3] = \frac{17}{4} = 4,25$. A számábrázolásból származó abszolút hibakorlát az utolsó helyiérték fele (a karakterisztikát is figyelve), azaz

$$\Delta_{fl(4,21)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} \cdot 2^3 = \frac{1}{16}.$$

5. Nézzük meg, melyik az a két gépi szám, mely a $0,11$ -t közrefogja. Egy lehetséges megoldás, hogy átírjuk bináris számmá. A számnak csak törtrésze van. A törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk.

	11
0	22
0	44
0	88
1	76
1	52
1	04
0	08
0	16
0	32
0	64

Látjuk, hogy az első három bináris jegy 0, ezeket nem ábrázoljuk a mantisszában. Utána mivel 6 jegyű a mantissza, a kerekítéssel együtt még 7 jegyre van szükségünk. Mivel a 10. bináris tört jegy 0, ezért lefelé kerekítünk. A táblázatból az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. Így a $0,11$ kerekítése kettes számrendszerben 0.000111000 lesz.

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz hárommal jobbra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a jobbra tolás miatt -3 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[111000|-3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 2^{-3} = \frac{4+2+1}{64} = \frac{7}{64} = 0,109375.$$

Ellenőrizzük a kapott szám helyességét. Mivel lefelé kerekítettünk, ezért meg kell néznünk a szám felső szomszédját. Ez az

$$[111001|-3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-3} = \frac{32+16+8+1}{512} = \frac{57}{512} = 0,111328125$$

Összehasonlítva, hogy melyik szám van közelebb $0,11$ -hez azt kapjuk, hogy az eredeti számunk.

$$0,11 - 0,109375 = 0,000625 \quad < \quad 0,001328125 = 0,111328125 - 0,11$$

Tehát $fl(0,11) = [111000|-3] = \frac{7}{64} = 0,109375$. A számábrázolásból származó abszolút hibakorlát az utolsó helyiérték fele (a karakterisztikát is figyelve), azaz

$$\Delta_{fl(0,11)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} \cdot 2^{-3} = \frac{1}{128}.$$

Látjuk, hogy a nullához közeli számokat sokkal pontosabban ábrázoljuk.

6. Írjuk át mindhárom tizedestörtet bináris számmá. A számoknak csak törtrészük van. A törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk.

	17		167		1667
0	34	0	334	0	3334
0	68	0	668	0	6668
1	36	1	336	1	3336
0	72	0	672	0	6672
1	44	1	344	1	3344
0	88	0	688	0	6688
1	76	1	376	1	3376
0	52	0	752	0	6752
1	04	1	504	1	3504
0	08	1	008	0	7008
0	16	1	016	1	4016

Látjuk, hogy az első két bináris jegy 0, ezeket nem ábrázoljuk a mantisszában. Mivel 8 jegyű a mantissza, a kerekítéssel együtt még 9 jegyre van szükségünk.

Első esetben a 11. bináris tört jegy 0, ezért lefelé kerekítünk. A $0,17$ kerekítése kettes számrendszerben 0.0010101010 lesz.

A második esetben a 11. bináris tört jegy 1, ezért felfelé kerekítünk. A $0,167$ kerekítése kettes számrendszerben 0.0010101100 lesz.

A harmadik esetben a 11. bináris tört jegy 1, ezért felfelé kerekítünk. A táblázatból az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. A $0,1667$ kerekítése kettes számrendszerben 0.0010101011 lesz.

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz kettővel jobbra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a jobbra tolás miatt -2 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[10101010|-2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{64+16+4+1}{512} = \frac{85}{512} = \frac{170}{1024} = \\ = 0,166015625.$$

$$[10101100|-2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{32+8+2+1}{256} = \frac{43}{256} = \frac{172}{1024} = \\ = 0,16796875.$$

$$[10101011|-2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{128+32+8+2+1}{1024} = \frac{171}{1024} = \\ = 0,1669921875.$$

Mivel az első két szomszédos gépi szám közrefogja az $\frac{1}{6}$ -ot, ezért $fl(\frac{1}{6})$ a kettő közül a közelebbik lesz. A 4 tizedesjegyre felírt közelítésből kapjuk a keresett gépi számot. Tehát

$$fl\left(\frac{1}{6}\right) = [10101011|-2] = \frac{171}{1024} = 0,1669921875.$$

Látjuk, hogy a nullához közeli számok nagyon közel vannak egymáshoz, ezért a közelítésükre figyelni kell.

7. Nézzük meg, melyik az a két gépi szám, mely a $\sqrt{2}$ -t közrefogja. Egy lehetséges megoldás, hogy átírjuk tizedestörtbe (figyelve arra, hogy a mantisszához kellő pontosságú legyen), majd ezt az alakot átváltjuk bináris számmá. $\sqrt{2} \approx 1,414$ -gyel dolgozunk. Az egész és tört részét külön váltjuk át. Az egészrésznél maradékosan osztunk kettővel. A hányadost az első oszlopba írjuk, a maradékot a második oszlopba. A törtrésznél a törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk. Mivel 6 jegyű a mantissza, ezért a kerekítéssel együtt 7 jegyre van szükségünk, ez a törtrésznél 6 jegy kiszámítását jelenti. Mivel a 6. jegy 0 , ezért lefelé kerekítünk. (Ha a kerekítő jegy 1 lenne, akkor a kapott bináris szám utolsó jegyéhez egyet hozzáadunk binárisan.) A táblázatból az egészrésznél a maradék jegyek kiolvasását lentről felfelé, a törtrésznél az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. Így az $1,414$ kerekítése kettes számrendszerben 1.01101 lesz.

1	
0	1

	414
0	828
1	656
1	312
0	624
1	248
0	496

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz eggyel balra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a balra tolás miatt 1 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[101101|\,1] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)\cdot 2^1 = \frac{32+8+4+1}{32} = \frac{45}{32} = 1,40625.$$

Ellenőrizzük a kapott szám helyességét. Mivel lefelé kerekítettünk, ezért meg kell néznünk a szám felső szomszédját. Ez az

$$[101110|\,1] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)\cdot 2^1 = \frac{16+4+2+1}{16} = \frac{23}{16} = 1,4375.$$

Összehasonlítva, hogy melyik szám van közelebb $\sqrt{2}$ -höz azt kapjuk, hogy az eredeti számunk.

$$\sqrt{2} - 1,40625 \approx 0,00796 \quad < \quad 0,02328 \approx 1,4375 - \sqrt{2}$$

Tehát $fl(\sqrt{2}) = [101101|\,1] = \frac{45}{32} = 1,40625.$

A számábrázolásból származó abszolút hibakorlát az utolsó helyiérték fele (a karakterisztikát is figyelve), azaz

$$\Delta_{fl(\sqrt{2})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}\cdot 2^1 = \frac{1}{64}.$$

8. Nézzük meg, melyik az a két gépi szám, mely a $\sqrt{3}$ -t közrefogja. Egy lehetséges megoldás, hogy átírjuk tizedestörtbe (figyelve arra, hogy a mantisszához kellő pontosságú legyen), majd ezt az alakot átváltjuk bináris számmá. $\sqrt{3} \approx 1,732$ -gyel dolgozunk. Az egész és tört részét külön váltjuk át. Az egészrésznél maradékosan osztunk kettővel. A hányadost az első oszlopba írjuk, a maradékot a második oszlopba. A törtrésznél a törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk. Mivel 5 jegyű a mantissza, ezért a kerekítéssel együtt 6 jegyre van szükségünk, ez a törtrésznél 5 jegy kiszámítását jelenti.

Mivel a 5. jegy 1 , ezért felfelé kerekítünk, a kapott bináris szám utolsó jegyéhez egyet hozzáadunk binárisan. A táblázatból az egészrésznél a maradék jegyek kiolvasását lentről felfelé, a törtrésznél az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. Így az $1,732$ kerekítése kettes számrendszerben 1.1100 lesz.

1	
0	1

	732
1	464
0	928
1	856
1	712
1	424

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz eggyel balra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a balra tolás miatt 1 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[11100|\,1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 2^1 = \frac{4+2+1}{4} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

Ellenőrizzük a kapott szám helyességét. Mivel felfelé kerekítettünk, ezért meg kell néznünk a szám alsó szomszédját. Ez az

$$[11011|\,1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^1 = \frac{16+8+2+1}{16} = \frac{27}{16} = 1,6875.$$

Összehasonlítva, hogy melyik szám van közelebb $\sqrt{3}$ -hoz azt kapjuk, hogy az eredeti számunk.

$$\sqrt{3} - 1,6875 \approx 0,04455 \quad > \quad 0,01795 \approx 1,75 - \sqrt{3}$$

Tehát $fl(\sqrt{3}) = [11100|\,1] = \frac{7}{4} = 1,75$. Mivel 6 mantissza jegyet kellett pontosan kiszámolnunk, ezért két tizedesjegyre kerekített értékkel is ugyanezt az eredményt kaptuk volna. ($10^3 \approx 2^{10}$, azaz 3 tizedesjegy felel meg 10 bináris jegynek.)

9. Nézzük meg, melyik az a két gépi szám, mely a $\sqrt{5}$ -t közrefogja. Egy lehetséges megoldás, hogy átírjuk tizedestörtbe (figyelve arra, hogy a mantisszához kellő pontosságú legyen), majd ezt az alakot átváltjuk bináris számmá. $\sqrt{5} \approx 2,236$ -del dolgozunk. Az egész és tört részét külön váltjuk át. Az egészrésznél maradékosan osztunk kettővel. A hányadost az első oszlopba írjuk, a maradékot a második oszlopba. A törtrésznél a törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk. Mivel 6 jegyű a mantissza, ezért a kerekítéssel együtt 7 jegyre van szükségünk, ez a törtrésznél 5 jegy kiszámítását jelenti. Mivel az 5. jegy 1 , ezért felfelé kerekítünk, a kapott bináris szám utolsó jegyéhez egyet hozzáadunk binárisan. A táblázatból az egészrésznél a maradék jegyek kiolvasását lentről felfelé, a törtrésznél az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. Így az $2,236$ kerekítése kettes számrendszerben 10.0100 lesz.

2	
1	0
0	1

	236
0	472
0	944
1	888
1	776
1	552

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz kettővel balra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a balra tolás miatt 2 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[100100|\,2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right) \cdot 2^2 = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Ellenőrizzük a kapott szám helyességét. Mivel lefelé kerekítettünk, ezért meg kell néznünk a szám felső szomszédját. Ez az

$$[100011|\,2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^2 = \frac{32+2+1}{16} = \frac{35}{16} = 2,1875.$$

Összehasonlítva, hogy melyik szám van közelebb $\sqrt{5}$ -höz azt kapjuk, hogy az eredeti számunk.

$$\sqrt{5} - 2,1875 \approx 0,04857 \quad > \quad 0,01393 \approx 2,25 - \sqrt{5}$$

Tehát $fl(\sqrt{5}) = [100100|\,2] = \frac{9}{4} = 2,25.$

A számábrázolásból származó abszolút hibakorlát az utolsó helyiérték fele (a karakterisztikát is figyelve), azaz

$$\Delta_{fl(\sqrt{5})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} \cdot 2^2 = \frac{1}{32}.$$

A relatív hibakorlát (abszolút hibakorlát/közelítő érték)

$$\delta_{fl(\sqrt{5})} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{9 \cdot 8} = \frac{1}{72} \approx 0,01389.$$

10. **a)** A megoldáshoz használjuk fel a 6. feladat megoldásában az $\frac{1}{6}$ bináris közelítésére kapott megoldást: 0.0010101011. Mivel most csak 6 hosszú a mantisszánk, ezért 6 jegyre van szükségünk az első egyestől. A 9. jegyben lévő 1-es miatt felfelé kerekítenünk (a kettedes pont utáni két 0-t nem ábrázoljuk).

Így $fl(\frac{1}{6}) = [101011|-2]$.

Ellenőrizzük, hogy $\frac{1}{6}$ az $[101010|-2]$ és az $[101011|-2]$ közül az utóbbihoz van közelebb.

$$[101010|-2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{16+4+1}{128} = \frac{21}{128} = 0,1640625$$

$$[101011|-2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{32+8+2+1}{256} = \frac{43}{256} = 0,16796875$$

Az $\frac{1}{12}$ bináris közelítését úgy kapjuk, hogy jobbra léptetjük eggyel az $\frac{1}{6}$ bináris közelítését (kettővel osztunk): 0.00010101011. Mivel 6 hosszú a mantisszánk, ezért 6 jegyre van szükségünk az első egyestől. A 10. jegyben lévő 1-es miatt felfelé kerekítenünk (a kettedes pont utáni három 0-t nem ábrázoljuk).

Így $fl(\frac{1}{12}) = [101011|-3]$.

Ellenőrizzük, hogy $\frac{1}{12} \approx 0,08333333$ az $[101010|-3]$ és az $[101011|-3]$ közül az utóbbihoz van közelebb.

$$[101010|-3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^{-3} = \frac{16+4+1}{256} = \frac{21}{256} = 0,08203125$$

$$[101011|-3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-3} = \frac{32+8+2+1}{512} = \frac{43}{512} = 0,083984375$$

A kivonást csak úgy tudjuk elvégezni, ha közös karakterisztikára hozzuk a számokat és kerekítünk. Ez a karakterisztika a nagyobbik lesz, mert így lesz kisebb a hiba.

Az $fl(\frac{1}{12})$ kerekítése $[101011|-3] = [0101011|-2]$.

$$\begin{array}{r} [101011|-2] \\ -\,[010110|-2] \\ \hline [010101|-2] \end{array}$$

A kapott eredményt normalizálni kell (a bináris pontot eggyel jobbra toljuk és csökkentjük a karakterisztikát eggyel)

$$[101010|-3] = \frac{21}{256} = 0,08203125.$$

c) $fl(\frac{1}{6}) = [101011|-2]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\frac{1}{6})} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-2} = 2^{-9}.$$

$fl(\frac{1}{12}) = [101011|-3]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\frac{1}{12})} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-3} = 2^{-10}.$$

Az eredmény abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{\frac{21}{256}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-3} = 2^{-10}.$$

11. Az $\frac{5}{6}$-t tizedestörttel közelítjük (figyelve arra, hogy a mantisszához kellő pontosságú legyen), majd ezt az alakot átváltjuk bináris számmá. $\frac{5}{6} \approx 0,833$ -mal dolgozunk. A számnak csak törtrésze van, ezt árírjuk bináris számmá (lásd a korábbi megoldásokat). Mivel most 6 hosszú a mantisszánk, ezért a 7. jegyben lévő 0 miatt lefelé kerekítenünk. A karakterisztika 0, mivel az első bináris jegy 1.

	833
1	666
1	332
0	664
1	328
0	656
1	312
0	624

Ellenőrizzük, hogy $\frac{5}{6}$ az $[110101|0]$ és az $[110110|0]$ közül az előbbihez van közelebb. Így $fl(\frac{5}{6}) = [110101|0]$.

$$[110101|0] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^0 = \frac{32+16+4+1}{64} = \frac{53}{64} = 0,828125$$
$$[110110|0] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^0 = \frac{16+8+2+1}{32} = \frac{27}{32} = 0,844375$$

Az összeadást egyszerű elvégezni, mivel a karakterisztikák megegyeznek. Elvégezzük binárisan az összadást.

$$\begin{array}{r} [110101|0] \\ +\,[110101|0] \\ \hline [1101010|0] \end{array}$$

A kapott eredményt normalizálni kell (a karakterisztikát eggyel növeljük a keletkezett átvitel miatt)

$$[1101010|0] = [110101|1] = \frac{53}{64} \cdot 2 = \frac{53}{32} = 1,65625.$$

Az összeg abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{\frac{53}{32}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{1} = 2^{-6}.$$

12. **a)** A megoldáshoz felhasználjuk a 6. feladat megoldásában az $\frac{1}{6}$ bináris közelítésére kapott megoldást: 0.0010101011. Az $\frac{1}{3}$ bináris közelítését úgy kapjuk, hogy balra léptetjük eggyel az $\frac{1}{6}$ bináris közelítését (kettővel szorzunk): 0.010101011. Ellenőrizzük, hogy $\frac{1}{3} \approx 0,333333$ az $[10101010|-1]$ és az $[10101011|-1]$ közül az utóbbihoz van közelebb.

Így $fl(\frac{1}{6}) = [10101011|-2]$ és $fl(\frac{1}{3}) = [10101011|-1]$.

$$\begin{aligned}[10101010|-1] &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}\right)\cdot 2^{-1} = \frac{64+16+4+1}{256} = \frac{85}{256} = 0,33203125\\ [10101011|-1] &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right)\cdot 2^{-1} = \frac{128+32+8+2+1}{512} = \frac{171}{512} = \\ &= 0,333984375\end{aligned}$$

b) A kivonást csak úgy tudjuk elvégezni, ha közös karakterisztikára hozzuk a számokat és kerekítünk. Ez a karakterisztika a nagyobbik lesz, mert így lesz kisebb a hiba.

Az $fl(\frac{1}{3})$ kerekítése $[10101011|-2] = [010101011|-1]$.

$$\begin{array}{r} [10101011|-1]\\ -\,[01010110|-1]\\ \hline [01010101|-1]\end{array}$$

A kapott eredményt normalizálni és kerekíteni kell (a bináris pontot eggyel jobbra toljuk és csökkentjük a karakterisztikát eggyel)

$$[10101010|-2] = \frac{85}{512} = 0,166015625.$$

c) $fl(\frac{1}{6}) = [10101011|-2]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\frac{1}{6})} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-8}\cdot 2^{-2} = 2^{-11}.$$

$fl(\frac{1}{3}) = [101011|-1]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\frac{1}{3})} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-8}\cdot 2^{-1} = 2^{-10}.$$

Az eredmény abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\frac{85}{512})} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-8}\cdot 2^{-2} = 2^{-11}.$$

13. **a)** A $\sqrt{3}$-nak megfeleltetett gépi számot már az 8. feladatban kerestük, de akkor más mantisszával. Még egy jegyet számoljunk hozzá a törtrészhez és kerekítsünk.

$$\begin{aligned}fl(\sqrt{3}) = [110111|\,1] &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)\cdot 2^{1} = \\ &= \frac{32+16+4+2+1}{32} = \frac{55}{32} = 1,71875.\end{aligned}$$

Ellenőrizzük, hogy $\sqrt{3}$ az $[110111|\,1]$ és az $[111000|\,1]$ közül az előbbihez van közelebb. Így $fl(\sqrt{3}) = [110111|\,1]$. A $\pi \approx 3,142$, ezt írjuk át bináris törtté a korábbi megoldásokban ismertetett módon $\pi \approx 11.0010_2$.

$$\begin{array}{c|c} 3 & \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & 142 \\ \hline 0 & 284 \\ 0 & 568 \\ 1 & 136 \\ 0 & 272 \\ \hline 0 & 544 \end{array}$$

$$fl(\pi) = [110010|\,2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^2 = \frac{16+8+1}{8} = \frac{25}{8} = 3,125$$

Ellenőrizzük, hogy π az $[110010|\,2]$ és az $[110011|\,2]$ közül az előbbihez van közelebb. Így $fl(\pi) = [110010|\,2]$.

b) A kivonást csak úgy tudjuk elvégezni, ha közös karakterisztikára hozzuk a számokat és kerekítünk. Ez a karakterisztika a nagyobbik lesz, mert így lesz kisebb a hiba. Azaz $[110111|\,1] = [0110111|\,2]$, 6 jegyre kerekítve $[011100|\,2]$.

$$\begin{array}{r} [110010|\,2] \\ -\,[011100|\,2] \\ \hline [010110|\,2] \end{array}$$

A kapott eredményt normalizálni és kerekíteni kell (a bináris pontot eggyel jobbra toljuk és csökkentjük a karakterisztikát eggyel)

$$[010110|\,2] = [101100|\,1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) \cdot 2^1 = \frac{8+2+1}{8} = \frac{11}{8} = 1,375.$$

c) $fl(\sqrt{3}) = [110111|\,1]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\sqrt{3})} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^1 = 2^{-6}.$$

$fl(\pi) = [110010|\,2]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\pi)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^2 = 2^{-5}.$$

Az eredmény abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{\frac{11}{8}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^1 = 2^{-6}.$$

14. A $\sqrt{2}$-nek megfeleltetett gépi számot a 7. feladatból leolvashatjuk, most 5 jegyű mantisszát keresünk

$$fl(\sqrt{2}) = [10111|\,1].$$

A $\sqrt{3}$-nak megfeleltetett gépi szám a 8. feladatból

$$fl(\sqrt{3}) = [11100|\,1].$$

Mivel azonos a karakterisztika, egyszerű összeadni.

$$\begin{array}{r} [10111|1] \\ +\,[11100|1] \\ \hline [110011|1] \end{array}$$

Az összeg kerekítve és normalizálva

$$[11010|\,2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) \cdot 2^2 = \frac{8+4+1}{4} = \frac{13}{4}.$$

Az eredmény abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} \cdot 2^2 = 2^{-4}.$$

1.2.2. Műveletek hibája

15. A $\sqrt{3} \approx 1,73$ közelítés abszolút hibakorlátja a két tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{1,73} = 0,005$.

Az $1,73$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{1,73}}{1,73} = \frac{0,005}{1,73} \le 0,0029 = \delta_{1,73}$.

A szorzat hibakorlátjaira vonatkozó tételből

$$\Delta_{1,73 \cdot 1,73} = 2 \cdot 1,73 \cdot \Delta_{1,73} = 0,0173$$

$$\delta_{1,73 \cdot 1,73} = 2 \cdot \delta_{1,73} = 0,0058.$$

A relatív hibakorlátot számolhatjuk a definícióból is

$$\frac{\Delta_{1,73 \cdot 1,73}}{1,73 \cdot 1,73} = \frac{0,0173}{2,9929} \le 0,0058 = \delta_{1,73 \cdot 1,73}.$$

16. A $\sqrt{2} \approx 1,41$ és a $\sqrt{8} \approx 2,83$ közelítés abszolút hibakorlátja a két tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{1,41} = \Delta_{2,83} = 0,005$.

Az $1,41$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{1,41}}{1,41} = \frac{0,005}{1,41} \le 0,00355 = \delta_{1,41}$.

Az $2,83$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{2,83}}{2,83} = \frac{0,005}{2,83} \le 0,00177 = \delta_{2,83}$.

A szorzat hibakorlátjaira vonatkozó tételből

$$\Delta_{1,41 \cdot 2,83} = 1,41 \cdot \Delta_{2,83} + 2,83 \cdot \Delta_{1,41} = 0,005 \cdot (1,41 + 2,83) = 0,0212$$

$$\delta_{1,73 \cdot 1,73} = \delta_{1,41} + \delta_{2,83} = 0,00355 + 0,00177 = 0,00532.$$

A relatív hibakorlátot számolhatjuk a definícióból is

$$\frac{\Delta_{1,41 \cdot 2,83}}{1,41 \cdot 2,83} = \frac{0,0212}{3,9903} \le 0,00532 = \delta_{1,41 \cdot 2,83}.$$

17. A $\sqrt{2} \approx 1,414$ közelítés abszolút hibakorlátja a három tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{1,414} = 0,0005$.

Az $1,414$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{1,414}}{1,414} = \frac{0,0005}{1,414} \leq 0,000354 = \delta_{1,414}$.

Az osztás hibakorlátjaira vonatkozó tételből

$$\Delta_{\frac{2}{1,414}} = \frac{2 \cdot \Delta_{1,414} + 1,414 \cdot 0}{1,414^2} \approx 0,00051$$

$$\delta_{\frac{2}{1,414}} = \delta_{1,414} + 0 = 0,000354.$$

A relatív hibakorlátot számolhatjuk a definícióból is

$$\frac{\Delta_{\frac{2}{1,414}}}{\frac{2}{1,414}} \leq \frac{0,00051}{1,4144} \leq 0,00037 = \delta_{\frac{2}{1,414}}.$$

18. A $\pi \approx 3,14$ közelítés abszolút hibakorlátja a két tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{3,14} = 0,005$.

Az $3,14$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{3,14}}{3,14} = \frac{0,005}{3,14} \leq 0,0016 = \delta_{3,14}$.

Az osztás hibakorlátjaira vonatkozó tételből

$$\Delta_{\frac{1}{3,14}} = \frac{1 \cdot \Delta_{3,14} + 1,14 \cdot 0}{3,14^2} \approx \frac{0,005}{3,14^2} \approx 0,00051$$

$$\delta_{\frac{1}{3,14}} = \delta_{3,14} + 0 = 0,0016.$$

A relatív hibakorlátot számolhatjuk a definícióból is

$$\frac{\Delta_{\frac{1}{3,14}}}{\frac{1}{3,14}} \leq \frac{0,00051}{9,8596} \leq 0,00051 = \delta_{\frac{1}{3,14}}.$$

19. A $e \approx 2,718$ és a $\pi \approx 3,142$ közelítés abszolút hibakorlátja a három tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{2,718} = \Delta_{3,142} = 0,0005$.

Az $2,718$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{2,718}}{2,718} = \frac{0,0005}{2,718} \leq 0,000184 = \delta_{2,718}$.

Az $3,142$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{3,142}}{3,142} = \frac{0,0005}{3,142} \leq 0,000160 = \delta_{3,142}$.

A szorzat hibakorlátjaira vonatkozó tételből

$$\Delta_{2,718 \cdot 3,142} = 3,142 \cdot \Delta_{2,718} + 2,718 \cdot \Delta_{3,142} = 0,0005 \cdot (2,718 + 3,142) = 0,00293$$

$$\delta_{2,718 \cdot 3,142} = \delta_{2,718} + \delta_{3,142} = 0,000184 + 0,000160 = 0,000344.$$

A relatív hibakorlátot számolhatjuk a definícióból is

$$\frac{\Delta_{2,718 \cdot 3,142}}{2,718 \cdot 3,142} = \frac{0,00293}{8,539956} \leq 0,000344 = \delta_{2,718 \cdot 3,142}.$$

20. A $\sqrt{2007} \approx 44,80$ és a $\sqrt{2006} \approx 44,79$ közelítés abszolút hibakorlátja a két tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{44,80} = \Delta_{44,79} = 0,005$.

A relatív hibakorlátok

$$\frac{\Delta_{44,80}}{44,80} = \frac{0,005}{44,80} \leq 0,000111607$$

és

$$\frac{\Delta_{44,79}}{44,79} = \frac{0,005}{44,79} \leq 0,000111632.$$

Így $\delta_{44,80} = \delta_{44,79} \approx 0,0001117$.

a) A számított különbség $0,01$. Az abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{0,01} = \Delta_{44,80} + \Delta_{44,79} = 0,01.$$

A relatív hibakorlátja a definíció alapján számolva $\frac{\Delta_{0,01}}{0,01} = 1 = \delta_{0,01}$.

b) A másik módon számolva

$$\Delta_{44,80+44,79} = \Delta_{89,59} = \Delta_{44,80} + \Delta_{44,79} = 0,01$$

$$\Delta_{\frac{1}{89,59}} = \frac{1 \cdot \Delta_{89,59} + 0}{89,59^2} \approx \frac{0,01}{8026} = 0,000001245.$$

A relatív hibakorlát

$$\frac{\Delta_{\frac{1}{89,59}}}{\frac{1}{89,59}} = 0,000001245 \cdot 89,59 = 0,00011624 = \delta_{89,59}.$$

c) Az első rész eredményéből látjuk, hogy a közeli számok kivonása megnöveli a relatív hibát, most a 10^4-szeresre nőtt. Az 1 relatív hibakorlát túl nagy. Ezzel ellentétben a második részben kapott eredmény relatív hibája a kiindulási értékek relatív hibájával azonos nagyságrendű. Tehát ez a számítási mód stabilabb, megbízhatóbb eredményt ad.

1.2.3. Függvényérték hibája

21. A 3 abszolút hibakorlátja a kerekítésből adódóan $\Delta_3 = 0,5$.

A 3 relatív hibakorlátja $\delta_3 = \frac{\Delta_3}{3} = \frac{0,5}{3} = \frac{1}{6}$.

A függvényérték hibájára kapott $\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a$ becslés alapján számolunk, ahol

$$M_1 = \max\{|f(x)| : x \in k_{\Delta_a}(a)\}.$$

Mivel $f(x) = 3^x$ és $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$, így $x \in [3; 3,5]$-re

$$M_1 = \ln(3) \cdot 3^{3,5} \approx 51,377.$$

$$\Delta_{3^3} = \ln(3) \cdot 3^{3,5} \cdot 0,5 = \ln(3) \cdot 3^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,5 \approx 25,6885$$

$$\frac{\Delta_{3^3}}{3^3} = \frac{\ln(3) \cdot 3^{3,5} \cdot 0,5}{3^3} = \ln(3) \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \leq 0,952 = \delta_{3^3}$$

A kapott értékekből látjuk, hogy az abszolút hibakorlát kb. 50-szeresre, a relatív hibakorlát pedig kb. 6-szorosra nőtt.

22. A 3 abszolút hibakorlátja a kerekítésből adódóan $\Delta_3 = 0,5$.

A 3 relatív hibakorlátja $\delta_3 = \frac{\Delta_3}{3} = \frac{0,5}{3} = \frac{1}{6}$.

A függvényérték hibájára kapott $\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a$ becslés alapján számolunk, ahol

$$M_1 = \max\{|f(x)| : x \in k_{\Delta_a}(a)\}.$$

Mivel $f(x) = x^2$ és $f'(x) = 2x$, így $x \in [2,5;3]$-ra

$$M_1 = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$\Delta_{3^2} = 6 \cdot 0,5 = 3$$

$$\frac{\Delta_{3^2}}{3^2} = \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3} = \delta_{3^2}$$

A kapott értékekből látjuk, hogy az abszolút hibakorlát a 6-szorosára, a relatív hibakorlát pedig kétszeresére nőtt.

23. A feladat szerint most $0,8$ a pontos érték, helyette $\frac{\pi}{4}$ -gyel dolgozunk, mert ennek ismerjük a coszinuszát ($\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Az $\frac{\pi}{4}$ abszolút hibakorlátja a kerekítésből adódóan $\Delta_{\frac{\pi}{4}} = 0,05$.

A $\frac{\pi}{4}$ relatív hibakorlátja $\delta_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\Delta_{\frac{\pi}{4}}}{0,8} = \frac{0,05}{0,8} = 0,0625$.

A függvényérték hibájára kapott $\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a$ becslés alapján számolunk, ahol

$$M_1 = \max\{|f(x)| : x \in k_{\Delta_a}(a)\}.$$

Mivel $f(x) = \cos(x)$ és $f'(x) = -\sin(x)$, így $x \in [0,75;0,85]$-ra

$$M_1 = \sin(0,75) \approx 0,682.$$

$$\Delta_{\cos(\frac{\pi}{4})} = 0,682 \cdot 0,05 = 0,0341$$

$$\frac{\Delta_{\cos(\frac{\pi}{4})}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \leq \frac{0,0341}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \leq 0,0482 = \delta_{\cos(\frac{\pi}{4})} = \delta_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

24. A feladatban most $0,5$ a pontos érték és $\frac{\pi}{6}$ a közelítő érték, mert a szinuszát ismerjük ($\sin(\frac{\pi}{6}) = 0,5$). A $\frac{\pi}{6}$ abszolút hibakorlátja a kerekítésből adódóan $\Delta_{\frac{\pi}{6}} = 0,05$.

A $\frac{\pi}{6}$ relatív hibakorlátja $\delta_{\frac{\pi}{6}} = \frac{\Delta_{\frac{\pi}{6}}}{0,5} = \frac{0,05}{0,5} = 0,1$.

A függvényérték hibájára kapott $\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a$ becslés alapján számolunk, ahol

$$M_1 = \max\{|f(x)| : x \in k_{\Delta_a}(a)\}.$$

Mivel $f(x) = \sin(x)$ és $f'(x) = \cos(x)$, így $x \in [0,45;0,55]$-ra

$$M_1 = \cos(0,55) \approx 0,853.$$

$$\Delta_{\sin(\frac{\pi}{6})} = \Delta_{0,5} = 0,853 \cdot 0,05 = 0,04265$$

$$\frac{\Delta_{\sin(\frac{\pi}{6})}}{0,5} \leq \frac{0,04265}{0,5} \leq 0,0853 = \delta_{0,5} = \delta_{\sin(\frac{\pi}{6})}$$

2. fejezet

MÁTRIX SZORZAT FELBONTÁSOK

2.1. Feladatok

2.1.1. Gauss elimináció és determináns meghatározása

1. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 25 \end{bmatrix}$$

3. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval és számítsuk ki az A mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval és számítsuk ki az A mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -5 & -5 & -7 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

5. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval, részleges főelem-kiválasztással és határozzuk meg a mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval, részleges főelemkiválasztással és határozzuk meg a mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -8 \\ 2 & 4 & -5 \\ -4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

7. Oldjuk meg az alábbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval, teljes főelemkiválasztással és számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

8. Oldjuk meg az alábbi két jobboldal esetén az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b_1}$ és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b_2}$ lineáris egyenletrendszereket Gauss elimináció segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{bmatrix}$$

10. Oldjuk meg Gauss eliminációval az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.1.2. Mátrix inverz meghatározása

11. Számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét és determinánsát Gauss eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

12. Határozzuk meg a **A** mátrix inverzét Gauss eliminációval és adjuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Határozzuk meg az **A** mátrix inverzét Gauss eliminációval és adjuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Határozzuk meg az **A** mátrix inverzét Gauss eliminációval és adjuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

15. Határozzuk meg az **A** mátrix inverzét Gauss eliminációval és adjuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

16. Határozzuk meg az **A** mátrix inverzét Gauss eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

17. Határozzuk meg a következő (nxn)-es mátrix inverzét Gauss eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

18. Határozzuk meg a következő (nxn)-es mátrix inverzét Gauss eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.3. LU felbontás

19. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU felbontását és ennek segítségével határozzuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

20. Adja meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU felbontását és ennek segítségével határozzuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

21. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU felbontását és ennek segítségével határozzuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

22. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU felbontását és ennek segítségével határozzuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

23. Készítsük el az $\mathbf{A}$ mátrix LU felbontását a Gauss eliminációval párhuzamosan!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

24. Készítsük el az $\mathbf{A}$ mátrix LU felbontását a Gauss elimináció segítségével, azzal párhuzamosan!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

25. Készítsük el az $\mathbf{A}$ mátrix LU felbontását a Gauss elimináció segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

26. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk a parketta elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

27. Határozzuk meg az **A** mátrix LU felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk a parketta elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

28. Határozzuk meg az **A** mátrix LU felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk az oszlopfolytonos elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

29. Határozzuk meg az **A** mátrix LU felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk az oszlopfolytonos elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

30. Határozzuk meg az **A** mátrix LU felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk a sorfolytonos elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

31. Határozzuk meg az **A** mátrix LU felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk az oszlopfolytonos elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & -3 \\ 16 & 25 & -33 & -\frac{47}{2} \\ 8 & 9 & 18 & -\frac{29}{2} \\ -10 & -14 & \frac{33}{4} & \frac{63}{4} \end{bmatrix}$$

32. Határozzuk meg az **A** mátrix LU felbontását sorfolytonos, oszlopfolytonos és parketta elrendezés segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -6 & -17 & 19 \\ 8 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

2.1.4. LDU felbontás LU segítségével

33. Adjuk meg az **A** mátrix LDU felbontását az LU felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 8 & 8 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

34. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU felbontását az LU felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

35. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU felbontását az LU felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

36. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU felbontását az LU felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

37. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU felbontását az LU felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

38. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU felbontását az LU felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

39. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU felbontását az LU felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.5. LDL^T és LL^T (Cholesky) felbontás

40. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LL^T felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

41. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T és LL^T felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

42. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T és LL^T felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

43. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T és LL^T felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

44. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T és LL^T felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

45. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T és LL^T felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2.1.6. QR felbontás Gram-Schmidt ortogonalizációval

46. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR felbontását Gram-Schmidt ortogonalizációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

47. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR felbontását Gram-Schmidt ortogonalizációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

48. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR felbontását Gram-Schmidt ortogonalizációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

49. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR felbontását Gram-Schmidt ortogonalizációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 1 & 0,7 & 0,7 \end{bmatrix}$$

50. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR felbontását Gram-Schmidt ortogonalizációval! Oldjuk meg a feladatot kétféleképpen!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 12 & 0 \\ 1 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

51. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR felbontását Gram-Schmidt ortogonalizációval, használjuk az egyszerűsített módszert! Ne felejtsük el a végén a normálást!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

52. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR felbontását Gram-Schmidt ortogonalizációval, használja az egyszerűsített módszert! Ne felejtsük el a végén a normálást!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

53. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR felbontását Gram-Schmidt ortogonalizációval, használjuk az egyszerűsített módszert! Ne felejtsük el a végén a normálást!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

54. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR felbontását Gram-Schmidt ortogonalizációval, használjuk az egyszerűsített módszert! Ne felejtsük el a végén a normálást!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

2.1.7. Householder transzformáció

55. Householder transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra! Végezzük el a transzformációt a transzformációs mátrix elemeinek kiszámítása nélkül!

56. Írjuk fel azt a Householder transzformációs mátrixot, amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza!

57. Írjuk fel azt a Householder mátrixot, amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza! Mennyi lesz k értéke?

58. Írjuk fel azt a Householder mátrixot, amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza! Mennyi lesz k értéke?

59. Householder transzformációval hozza az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra! Végezzük el a transzformációt a transzformációs mátrix elemeinek kiszámítása nélkül!

60. Householder transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra! Végezzük el a transzformációt a transzformációs mátrix elemeinek kiszámítása nélkül!

61. Adjuk meg azt a Householder transzformációt, mely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza és végezzük is el a transzformációt a vektoron! (A mátrixot nem kell előállítani.)

62. Adjuk meg azt a Householder transzformációt(a Householder mátrix elemeit nem kell felírni), amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza! Alkalmazzuk a vektorra a transzformációt!

63. Adjuk meg azt a Householder transzformációt(a Householder mátrix elemeit nem kell felírni), amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza! Alkalmazzuk a vektorra a transzformációt!

64. Írjuk fel azt a Householder mátrixot, amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza, majd alkalmazzuk a mátrixra a transzformációt! Mennyi lesz k értéke?

65. Írjuk fel azt a Householder transzformációt, amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza! Végezzük el a transzformációt $\mathbf{a}$-n, a transzformációs mátrix elemeinek kiszámítása nélkül!

66. Householder transzformációval oldjuk meg a $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ lineáris egyenletrendszert.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

67. Householder transzformációval hozzuk felső háromszög alakra a $\mathbf{C}$ mátrixot!

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

68. A $\mathbf{D}$ mátrixot Householder transzformációval hozzuk felső háromszög alakra!

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

69. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak adott a QR felbontása. (Az $\mathbf{A}$ mátrix előállítása nélkül, $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ felhasználásával oldjuk meg a feladatot.)

$\mathbf{Q} = \mathbf{H}(\mathbf{v})$, a $\mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ által meghatározott Householder mátrix,

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & -4 \end{bmatrix}^T$ és

$$\mathbf{R} = 9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Megoldások

2.2.1. Gauss elimináció és determináns meghatározása

1. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására a Gauss-eliminációt használjuk fel. Az elimináció lényege, hogy felső háromszögalakú együttható mátrixot alakítunk ki. Ehhez a főátló alatti elemek kinullázásával jutunk.

Az eliminációs lépéseket el kell végeznünk az egyenletrendszer jobboldalán ($\mathbf{b}$ vektoron) is. Azért, hogy az eliminációs lépéseket könnyen el tudjuk végezni a jobboldalon is, vezessük be az úgynevezett bővített mátrixos jelölést. Ez azt jelenti, hogy az együttható mátrixhoz "hozzá ragasztjuk" a jobboldalt reprezentáló $\mathbf{b}$ vektort.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Az első oszlopban kezdjük az eliminációt. Az első sor változatlan marad. A mátrix első oszlopában elimináljuk a főátlóbeli elem ($a_{11} = 1$) alatti elemeket. Fentről lefelé haladva végezzük az eliminációs lépéseket. Először a mátrix $a_{21} = 2$ elemét elimináljuk az első sor segítségével.

1. lépés: Az eliminációs lépésben a 2. sorból kivonjuk az első sor 2-szeresét, tehát
2. sor - (2) $\cdot$ 1. sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ \boxed{2} & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ \boxed{0} & -5 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Majd a 3. sorban található $a_{31} = -1$ elemet kell eliminálnunk az 1. sor segítségével. Tehát a 3. sorhoz kivonjuk az 1. sor (-1)-szeresét, azaz hozzáadjuk az -1-szeresét
3. sor + (1) $\cdot$ 1. sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ \boxed{-1} & 3 & 1 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ \boxed{0} & 5 & 0 & 10 \end{array}\right]$$

Ezzel az első oszlopban a főátlóbeli elem alatti elemeket elimináltuk a mátrixból.

2. lépés: A második oszlopban található főátlóbeli elemeket kell eliminálnunk. Ennek megfelelően a jelenlegi mátrix esetén ez egyetlen elem: $a_{23} = 5$ eliminációját jelenti.
3. sor + (1) $\cdot$ 2. sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 10 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & \boxed{0} & 5 & 5 \end{array}\right]$$

Általánosságban egy nxn-es mátrix esetén $n-1$ oszlopban kell eliminálnunk és a j-ik oszlopban az $a_{j+1,j}, ..., a_{n,j}$ elemeket kell eliminálnuk.

Ezzel megkaptuk a célul kitűzött felsőháromszög alakú együttható mátrixunkat. A lineáris egyenletrendszer megoldását elemi úton, visszahelyettesítésekkel is meghatározhatjuk, de emellett bemutatunk egy egyszerű és könnyen automatizálható módszert is.

a) Elemi megoldás visszahelyettesítéssel:
Alulról felfelé haladva soronként kiszámoljuk az ismeretleneket. Tehát ennek megfelelően az utolsó sorból indulva az x_3 értékét számítjuk ki a következőképpen.

$$5x_3 = 5 \Longrightarrow \boxed{x_3 = 1}$$

Ennek segítségével meghatározzuk a következő, vagyis a 2. sor egyetlen ismeretlen értékét az x_2-t.

$$-5x_2 + 5 \cdot 1 = -5 \Longrightarrow \boxed{x_2 = 2}$$

Innen pedig az első sorba visszahelyettesítve kapjuk x_1 értékét az alábbiak szerint:

$$x_1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 4 \Longrightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

Vagyis a keresett megoldás vektor a következő

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Sorműveletek segítségével diagonális alakra hozzuk a mátrixot:
A módszer lényege abban áll, hogy a Gauss elimináció végeredményeként kapott mátrixot sorműveletek segítségével egység mátrixszá alakítjuk. Ez az alak azért lesz kellemes a számunkra, mert ilyen formában a megoldás vektort a transzformációk elvégzése után egyszerűen le tudjuk olvasni. Ehhez a Gauss eliminációhoz használt módszert alkalmazzuk "visszafelé". A metódust a mátrix utolsó oszlopában kezdjük, de még az elimináció előtt az adott oszlop főátlójában található elemet leoszjuk önmagával, hogy így biztosítsuk a főátlóban az egyest. Ezt követően a főátló feletti elemeket elimináljuk.

Tehát ennek megfelelően a 3. sort végigosztjuk 5-tel, majd pedig a 2. és az 1. sorokban elimináljuk a főátlóbeli elem ($a_{33} = 5$) feletti elemeket a következőképpen:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right]$$

Ezt követően a 2. sort végigosztjuk (-5)-tel, majd pedig az 1. sorban elimináljuk a főátlóbeli elem (a_{22}) feletti elemet ($a_{12} = 2$) a következő képpen:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Vagyis a keresett megoldás vektor könnyen leolvasható:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldását Gauss elimináció segítségével az előző feladatban részletesen bemutattuk, így a továbbiakban csak a legfontosabb részleteket, illetve az esetleges újdonságokat mutatjuk be.

1. lépés: Az első oszlopban a 2. sorhoz hozzáadjuk az első sor 1-szeresét, illetve a 3. sorból kivonjuk az első sor 3-szorosát, tehát:

2. sor + (1) · 1. sor.
3. sor - (3) · 1. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 9 \\ \boxed{1} & -1 & 3 & 2 \\ \boxed{3} & -6 & -1 & 25 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 9 \\ \boxed{0} & 1 & -2 & -7 \\ \boxed{0} & 0 & -16 & -2 \end{array}\right]$$

2. lépés: A következő lépésben a 2. sorban kell a főátló alatti elemeket eliminálnunk, de a példánkban szerencsére nulla került az a_{23} pozícióba, így nincs szükség az eliminációra. Ezzel elkészült a felső háromszögmátrix.

Sorműveletek segítségével diagonális alakra hozzuk a mátrixot. Az eliminációt nem kell feltétlenül az utolsó oszlopban kezdenünk, hiszen előfordulhat, hogy másik oszlop esetén egyszerűbb a kézi számolás. Fontos megjegyezni, hogy a felsőháromszög mátrix kialakítása esetén ez az egyszerűsítés nem használható! A mostani példában a 2. oszlopban kezdjük az eliminációt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-2} & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -16 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{0} & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -16 & -2 \end{array}\right]$$

Ezt követően az utolsó oszlopban kell eliminálnunk, vagyis a 3. sort leosztjuk (-16)-tal, majd pedig az így kapott új 3. sor 2-szeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz, illetve a 3. sor (-1)-szeresét hozzáadjuk az 1. sorhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \boxed{1} & -5 \\ 0 & 1 & \boxed{-2} & -7 \\ 0 & 0 & -16 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \boxed{0} & \frac{-41}{8} \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \frac{-54}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Tehát az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldása a következő:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{-41}{8} \\ \frac{-54}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

3. A korábban már bemutatott módszer lépéseit követve kapjuk az alábbi megoldást.

1. lépés:
2.sor + (-2) · 1.sor.
3.sor + $(+1)$ · 1.sor.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & -3 \\ \boxed{-1} & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \mathbf{A}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ \boxed{0} & 5 & 5 & -5 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Az első lépés után szerencsére megkaptuk a felső háromszögmátrixot.
Mivel a Gauss elimináció során csak sorműveleteket végeztünk, melyek nem változtatják meg a mátrix determinánsát, így a kapott felső háromszögmátrix ($\mathbf{A}'$) determinánsa megegyezik az eredeti ($\mathbf{A}$) mátrix determinánsával. A felső háromszög alakú mátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

$$\det(\mathbf{A}') = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 1 \cdot 5 \cdot 5 = 5.$$

Ezt követően a egyenletrendszer megoldásához szükséges diagonális alakot állítjuk elő.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. A korábbi feladatokhoz hasonlóan a megoldás lépései a következők.

1. lépés:
2.sor + $(\frac{5}{2}) \cdot$ 1.sor.
3.sor + $(\frac{4}{2}) \cdot$ 1.sor.

2. lépés:
3.sor - $(\frac{9}{20}) \cdot$ 2.sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 0 & 2 \\ -5 & -5 & -7 & -6 \\ -4 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & -20 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & 11 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & -20 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{43}{20} & \frac{229}{20} \end{array}\right]$$

Most diagonális alakra hozzuk a mátrixot.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & -20 & 0 & \frac{1560}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{229}{43} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{78}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{229}{43} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{191}{43} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{78}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{229}{43} \end{array}\right]$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{191}{43} \\ -\frac{78}{43} \\ \frac{229}{43} \end{bmatrix}.$$

5. Előfordulhat olyan eset, amikor egy adott eliminációs lépés után a soron következő diagonális elem nullává válik. Ilyen esetben megakad a Gauss elimináció. Az ismeretlenek, vagy az egyenletek felcserélésével elérhetjük, hogy az imént említett nulla helyére egy nem nulla elem kerüljön. Erre két eljárás is ismert.

Részleges főelemkiválasztás
Az adott k. oszlopban az $a_{k,k}, a_{k+1,k}, ..., a_{n,k}$ elemek közül megkeressük a legnagyobb abszolút értékűt és a sorát felcseréljük a k. sorral. Így a hibaszámításnál tanultak szerint a kis számmal való osztás elkerülhető, melyről tudjuk, hogy növeli a hibát. Azonban így is előfordulhat, hogy

a sorcserével a probléma nem oldható meg, ekkor az úgynevezett teljes főelemkiválasztást kell alkalmazni.

Teljes főelemkiválasztás
A k-tól n-ig terjedő sorok és oszlopok által meghatározott mátrixrészben megkeressük a legnagyobb abszolút értékű elemet. A sorát felcseréljük a k. sorral, az oszlopát a k. oszloppal. Így a hibaszámításnál tanultak szerint a számmal való osztás elkerülhető és ezzel a hibát csökkenthetjük. Az oszlopcserékre figyelni kell, mert a megoldásvektor megfelelő komponenseinek cseréjét vonja maga után. Ha még így is elakad a Gauss elimináció, akkor a $rang(A) < n$. A $\mathbf{b}$ jobboldal megfelelő koordinátáinak értékétől függően vagy nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.

Fontos megjegyezni, hogy a sorcserék és oszlopcserék esetén a determináns értékét korrigálnunk kell a sorok és oszlopok cseréjének a számával, vagyis az inverziók számával. Általános alak a determináns meghatározására

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)} \cdot (-1)^i,$$

ahol az i az inverziók számát jelöli.

1. lépés: A részleges főelemkiválasztáshoz megkeressük a mátrix első oszlopában a diagonális alatti elemek közül az abszolút értékben maximálisat. Vagyis keressük a $\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\}$ értékét. Mivel

$$\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = \max\{2, 4, 2\} = 4,$$

így az a_{21}-et kell becserélni az a_{11} helyére. Ezt az 1. és 2. sor cseréjével tudjuk megtenni. Ne feledjük, hogy a sorcsere a jobboldalra is vonatkozik!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right]$$

Ezt követően a Gauss elimináció első lépését kell végrehajtanunk az átrendezett rendszeren, vagyis:
2. sor$-(\frac{2}{4}) \cdot 1$. sor
3. sor$-(\frac{2}{4}) \cdot 1$ .sor

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

2. lépés: A következő lépés ismét a részleges főelemkiválasztás, amelyet a soron következő oszlopon kell végrehajtani, vagyis abszolút maximumot kell keresni, tehát

$$\max\{|a_{22}|, |a_{32}|\} = \max\{1, 3\} = 3.$$

Ez azt jelenti, hogy meg kell cserélnünk a 2. és 3. sort. Ezt követően el kell végeznünk a Gauss elimináció következő lépését.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

Ezzek elértük a felső háromszög alakot. A determináns meghatározásakor - ahogy azt már fentebb említettük - figyelnünk kell a sorcserékre. Mivel 2 sorcsere történt, így a determináns értékének meghatározásakor korrigálnunk kell az inverziók számával, vagyis 2-vel

$$\det(\mathbf{A}) = 4 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot (-1)^2 = 16.$$

Most már csak az egyenletrendszer megoldásának meghatározása van hátra.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Az előző példában látott módszer segítségével oldjuk meg ezt a feladatot.
1. lépés: Látható, hogy az $a_{11} = 0$, ezért szükséges a részleges főelemkiválasztás. Mivel

$$\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = \max\{0, 2, 4\} = 4,$$

ezért $a_{31} = (-4)$-et kell becserélni az $a_{11} = 0$ helyére.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -8 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ -4 & -6 & 5 & 9 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right]$$

Ezt követően a 2.sorhoz hozzáadjuk az első sor $\frac{2}{4}$-ét.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right]$$

2. lépés: Folytatva a részleges főelemkiválasztást, mivel

$$\max\{|a_{22}|, |a_{23}|\} = \max\{1, 7\} = 7,$$

a 3. sort és a 2. sort fel kell cserélni.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{array}\right]$$

Ezt követően a 3. sorhoz hozzáadjuk a 2. sor $\left(-\frac{1}{7}\right)$-szeresét.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{14} & \frac{71}{14} \end{array}\right]$$

A determináns értéke a 2 sorcserét figyelembe véve

$$\det(\mathbf{A}) = (-4) \cdot 7 \cdot (-\frac{19}{14}) \cdot (-1)^2 = 38$$

Ezt követően diagonális alakra hozzuk a mátrixot és meghatározzuk a lineáris egyenletrendszer megoldását.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{14} & \frac{71}{14} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 0 & \frac{526}{19} \\ 0 & 7 & 0 & -\frac{511}{19} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{14} & \frac{71}{14} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 0 & 0 & \frac{526}{19} \\ 0 & 7 & 0 & -\frac{511}{19} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{14} & \frac{71}{14} \end{array}\right]$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{22}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{73}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{71}{19} \end{array}\right] \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{22}{19} \\ -\frac{73}{19} \\ -\frac{71}{19} \end{bmatrix}$$

7. A feladat megoldásához a teljes főelemkiválasztás módszerét használjuk fel. Tehát első lépésként a teljes $\mathbf{A}$ mátrixban abszolút maximumot kell keresnünk. Figyelem, csak az $\mathbf{A}$ mátrixban kell az abszolút maximumot keresnünk, tehát a kiegészített mátrix $\mathbf{b}$ vektorhoz tartozó részében nem!

1. lépés: Mivel

$$\max_{i,j=1}^{n}\{|a_{ij}|\} = 3,$$

nem csak egy a_{ij} elemre teljesül, ezért ebben az esetben tetszőlegesen választhatunk közülsük. A példa szemléletességét megtartva az a_{22} elemet választjuk és ezt cseréljük az a_{11} helyére. Ehhez egy oszlopcserére és egy sorcserére lesz szükség, vagyis az 1. és a 2. sort felcseréljük, majd ezt követően az 1. és a 2. oszlopot is megcseréljük.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Ily módon a mátrixot megfelelő alakra hoztuk, tehát végrehajthatjuk a Gauss elimináció 1. lépését.
2. sor $+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot$ 1. sor
3. sor $-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot$ 1. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right]$$

2. lépés: Ismét a teljes főelemkiválasztás következik, de arra figyeljünk, hogy most már csak egy $(n-1)\times(n-1)$-es , vagyis jelen esetben egy 2×2-es részmátrixon kell csak ezt az abszolút maximumot megkeresnünk. Így

$$\max\{|a_{22}|, |a_{23}|, |a_{32}|, |a_{33}|\} = \frac{7}{5}.$$

Tehát jelen esetben csak egy oszlopcserére lesz szükség, hiszen a felcserélendő elemek egy sorban helyezkednek el, vagyis a 2. oszlopot és a 3. oszlopot kell felcserélnünk. A cserét követően elvégezzük a Gauss elimináció következő lépését.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & 4 \end{array}\right]$$

Ezzel elkészült a felső háromszögmátrix, így ezen a ponton könnyedén meghatározhatjuk a mátrix determinánsát. Mivel az inverziók száma 3, hiszen volt egy szomszédos sor cserénk és két szomszédos oszlopcserénk, így a determináns:

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^3 \cdot \left(3 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{10}{7}\right) = (-10)$$

Most már csak az ismeretlenek meghatározása van hátra. Visszahelyettesítést követően az alábbi eredményt kapjuk

$$x_1 = \frac{14}{5}, \quad x_2 = -\frac{1}{5}, \quad x_3 = 0.$$

8. Az előző példákban már ismertetett Gauss elimináció segítségével különböző jobboldalú, azonos mátrixú egyenletrendszerek megoldására is van lehetőség. Ilyen esetben a mátrix mellé írjuk a különböző jobboldalakat és az eliminációs lépéseket így hajtjuk végre.

$$\mathbf{A}|\mathbf{b_1}\mathbf{b_2}$$

1. lépés:
2. sor $+ (-2) \cdot$ 1. sor
3. sor $+ (-3) \cdot$ 1. sor
4. sor $+ (-1) \cdot$ 1. sor

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

2. lépés:
3. sor $+ (-1) \cdot$ 2. sor
4. sor $+ (-1) \cdot$ 2. sor

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Mivel a 3. oszlop és 3. sor által meghatározott részmátrixban csak nulla elemek vannak, így a teljes főelemkiválasztás sem segít a továbblépésben. Mivel a $\mathbf{b_1}$ jobboldal esetén a "nullás" sorokhoz nulla érték tartozik, ami azt jelenti, hogy azonosságot kaptunk, így ebben az esetben az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b_1}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ezzel szemben a $\mathbf{b_2}$ jobboldal esetén van nem nulla érték a "nullás" sorokhoz tartozóan, ami azt jelenti, hogy ellentmondáshoz jutottunk, így nincs megoldása az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b_2}$ lineáris egyenletrendszernek.

Tehát azt érdemes megjegyeznünk, hogy a Gauss elimináció során eldől, hogy megoldható-e a lineáris egyenletrendszer vagy sem.

9. Az általános megoldás meghatározásához először néhány konkrét lépését végezzük el a Gauss eiliminációnak.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & \dots & 0 & \boxed{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & \boxed{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right]$$

Az első pár lépés után láthatjuk, hogy a mátrix bidiagonális volta miatt hogyan alakul az általános k. lépés. Ha k páratlan, akkor a k. lépésben a k. sort hozzáadjuk a $k+1$. sorhoz, ezzel teljesen kinullázva a k. oszlopot, mellyel eleget teszünk a Gauss elimináció feltételének. Ekkor a $\mathbf{b}$ vektor $k+1$-ik helyén az egyesből 0 lesz. Az így kapott mátrixot láthatjuk a sorok számozásával.

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ \vdots \\ n. \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & 0 & \boxed{-1} & 1 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ \vdots \\ n. \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & (-1)^n \end{array}\right]$$

Az általános lépés nem sokban különbözik k páros esetén. A különbség mindössze abban áll, hogy a $\mathbf{b}$ vektor k-ik helyén 0 lesz és a $k+1$. helyen a (-1)-es érték változatlan marad. Tehát végeredményben a $\mathbf{b}$ vektor a következő alakú lesz

páratlan n esetén:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}^T$$

páros n esetén:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

10. Az általános megoldás meghatározásához a Gauss elimináció első néhány lépését végezzük el.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Az első két lépést követően már jól látjuk a szabályosságot. Tehát $k = 1$ és $k = 2$ esetére látjuk, hogy a $\mathbf{b}$ vektor hogyan is alakul. Tegyük fel, hogy k-ra is igaz ez a szabályosság. Nézzük meg $k+1$-re.

páratlan k esetén: a k. sort kivonjuk a $k+1$ sorból, ezáltal a k oszlopot kinulláztuk. A $\mathbf{b}$ vektoron is elvégezve a műveletet, a $k+1$ elem is nulla lesz.

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ \vdots \\ n. \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \boxed{1} & 1 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ \vdots \\ n. \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{array}\right]$$

páros k esetén: csak annyi a különbség, hogy a vektorban a k. helyen 0 található, ezért a $k+1$. elem 1-es marad.
Tehát végeredményben a $\mathbf{b}$ vektor a következő alakú lesz

n páratlan esetén:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$$
n páros esetén:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

2.2.2. Mátrix inverz meghatározása

11. Az inverz meghatározására számtalan módszer áll a rendelkezésünkre, de ezek a módszerek nehezen automatizálhatóak, vagy olykor igen sok számítást igényelnek. Egy egyszerű és könnyen automatizálható eljárást fogunk megismerni a következő példák megoldása során. A Gauss eliminációt fogjuk alkalmazni mátrix inverz meghatározására.

Kezdjük egy rövid elméleti áttekintéssel. Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A^{-1}} = \mathbf{I}$ összefüggésből határozhatjuk meg. Ez azt jelenti, hogy keresnünk kell egy olyan $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre igaz az alábbi mátrix egyenlet
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}.$$
Vezessük be a következő jelöléseket.
$$\mathbf{X} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n}), \quad \mathbf{I} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n})$$
Blokkos mátrix szorzással ellenőrizhető, hogy az imént említett mátrix egyenlet valójában n darab lineáris egyenletrendszer a következő alakban.
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x_1} = \mathbf{e_1}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x_2} = \mathbf{e_2}$$
$$\vdots$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x_n} = \mathbf{e_n}$$

Fontos észrevenni, hogy ez nem más mint n darab $\mathbf{A}$ mátrixú lineáris egyenletrendszer. Ahogy azt már korábban említettük erre a típusú problémára nagyon jól alkalmazható megoldást ad a Gauss elimináció, hiszen a jobboldal vektorokat egymás mellé írva, csak egyszer kell az $\mathbf{A}$ mátrixon eliminálnunk. Most nézzük meg, hogy ez hogyan is működik a gyakorlatban.

1. lépés: Írjuk fel a jobboldalakkal kiegészített bővített mátrixunkat, majd pedig végezzük el rajta a Gauss elimináció első lépését. Az első lépés során a következő sorműveleteket kell elvégeznünk.
2. sor $+ (-2) \cdot$ 1. sor
3. sor $+ (+1) \cdot$ 1. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. lépés: A 2. oszlopban kell eliminálnunk, tehát a megfelelő sorművelet a következő.
3. sor $+ (-\frac{6}{2}) \cdot$ 1. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Így megkaptuk a felső háromszög alakot, ahonnan könnyedén le tudjuk olvasni a mátrix determináns értékét.

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 2 \cdot (-1) = (-2)$$

Folytatva a mátrix inverz meghatározását, ezt követően sorműveletek segítségével diagonális alakra hozzuk a mátrixot.
3. sor $\cdot(-1)$
1. sor $+ (-1) \cdot$ 3. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

2. sor $\cdot\frac{1}{2}$
1. sor $+ (-1) \cdot$ 2. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 9 & -\frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix inverze könnyen leolvasható.

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. A megoldás során az előző feladatban látott eljárást alkalmazzuk.
1. lépés:
2. sor + 1. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. lépés: Látjuk, hogy elakad a hagyományos Gauss elimináció, ezért szükséges egy sorcsere, vagyis ennek megfelelően a 2. és a 3. sort megcseréljük. A sorcsere nem befolyásolja az inverz mátrixot, de a determináns értékét igen.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Sorcserét követően megkaptuk a felső háromszögmátrixot. Vagyis meghatározhatjuk a mátrix determinánsának értékét, figyelve a sorcsere miatti 1 inverziószámra.

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^1 = (-1)$$

Sorműveletekkel diagonális alakra hozzuk a mátrixot.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix inverze

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. A megoldás során az előző feladatban látott eljárást alkalmazzuk.
1. lépés: 2. sor + 1. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. lépés: 3. sor + $\frac{1}{3} \cdot$ 2. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

A felső háromszög alakból kiolvasva a determináns értékét, kapjuk hogy

$$\det(\mathbf{B}) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Sorműveletekkel diagonális alakra hozzuk a mátrixot.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Tehát a **B** mátrix inverze a következő.

$$\mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

14. A megoldás során az előző feladatban látott eljárást alkalmazzuk.

1. lépés:
2. sor + 1. sor
3. sor - 1. sor

2. lépés:
3. sor + 2. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A felső háromszög alakból megkapjuk az alábbi determináns értéket

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$$

Folytatva az eliminációt megkapjuk az **A** mátrix inverzét.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Tehát az **A** mátrix inverze a következő.

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

15. A mátrix méretével a számítások mennyisége ugyan megnő, de az eddig alkalmazott technika természetesen továbbra is működik. Ennek megfelelően a megoldás az alábbiak szerint alakul.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A következő lépésnél elakad a Gauss elimináció ezért sorcserét kell végrehajtanunk. Mégpedig a 2. és a 3. sort cseréljük meg a részleges főelemkiválasztás szabálya mentén. A sorcserét követően folytathatjuk a Gauss elimináció lépéseit.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Megkaptuk a felső háromszögmátrixot, innen a determináns az egy sor csere miatt a következőképpen alakul

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 4 \cdot (-1)^1 = -16.$$

Folytassuk a diagonális alakra hozást.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix inverze a következő:

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

16. Az általános megoldás meghatározásához először néhány lépést el kell végeznünk, hogy megsejtsük a megoldást. Ezt követően pedig indukcióval bebizonyítjuk a sejtést.

1. lépés:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & \dots & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{1} & 1 & 1 & \dots & 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & \dots & 0 & \boxed{-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{0} & 1 & 1 & \dots & 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

2. lépés:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & \dots & 0 & -1 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \boxed{1} & 1 & \dots & 1 & -1 & \boxed{0} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & -1 & \boxed{-1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 1 & -1 & \boxed{-1} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

Innen megsejtjük, hogy az általános megoldás egy olyan bidiagonális mátrix, ahol a főátlóban csupa 1-es szerepel és az átló alatti átlóban pedig (-1)-esek szerepelnek.
Tegyük fel, hogy a k. lépés után kapott mátrix bal felső $(k \times k)$-s részmátrixa ilyen alakú. Ennek segítségével megmutatjuk, hogy a $k+1$. lépés után is ilyen alakú mátrixhoz jutunk.

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right] \longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right]
$$

Tehát ezzel megmutattuk, hogy a sejtésünk helytálló, tehát az $\mathbf{A}$ mátrix inverze a következő.

$$
\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
-1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & -1 & 1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}
$$

17. Az általános megoldás meghatározásához először néhány lépést el kell végeznünk, hogy megsejtsük a megoldást. Ezt követően pedig indukcióval bebizonyítjuk a sejtést.

1. lépés:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\boxed{2} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right] \longrightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right]
$$

2. lépés:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \boxed{2} & 1 & \dots & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right] \longrightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & \boxed{4} & \boxed{-2} & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right]
$$

Mivel **A** bidiagonális mátrix, ezért a k. lépésben csak a $k+1$ sorban kell eliminálni, ebből következik, hogy a jobb oldali mátrixban is k. lépésben a $k+1$. sorban kell a lépéseket végrehajtani. Ezért csak a főátló alatt lesz elem és mivel mindig a kétszeresét vonjuk ki a k. sornak, ezért a főátló alatt 2. hatványon fognak szerepelni balról jobbra csökkenő sorban váltott előjellel. Az ismétlődő elemek miatt pedig a főátló alatti átlóban lévő átlóbeli elemek megegyeznek. Tehát az **A** mátrix inverze

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1}(2)^{n-1} & (-1)^{n-1}(2)^{n-1} & \dots & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

18. Ebben a példában a korábbiaktól eltérően már rendelkezésünkre áll a felső háromszögmátrixú alak, így ebben az esetben "csak" sorműveletekkel diagonális alakra kell hoznunk a mátrixot. Az eddigiekben megszokott módon elvégzünk néhány lépést az általános megoldás megsejtéséhez.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \boxed{0} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \boxed{-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A mátrix speciális alakjából azt sejtjük, hogy a baloldalon egy felső härömszögmátrix alakul ki, mégpedig olyan formában, hogy a főátló feletti átlóban (-1) -esek e feletti átlóban újra 1 -esek, majd pedig e felett újra (-1) -esek és így tovább.

Tehát tegyük fel, hogy k. lépésig igaz ez a sejtés, vagyis a jobboldali mátrixban jobb alsó $(k \times k)$-s mátrixára igaz az imént leírt struktúra. Mutassuk meg, hogy $(k+1)$-re is igaz.

A k. lépés után kapott mátrix

$$\left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 & \dots & 1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right].$$

Most végezzük el a $k+1$. lépést.

$$\left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & -1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 & \dots & 1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right]$$

Látjuk, hogy a $k+1$. lépés után kapott jobboldali mátrix $(k+1) \times (k+1)$-es jobbalsó részmátrixára is igaz maradt a sejtés, vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix inverze a következő.

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\
0 & 1 & -1 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}$$

2.2.3. *LU* felbontás

19. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *LU* felbontása azt jelenti, hogy keressük azt az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixokat, melyekre teljesül, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Ebben a felbontásban az $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ alsó háromszögmátrix, mégpedig úgy, hogy a főátlóban rendre 1-es elemek helyezkednek el és $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pedig egy felső háromszögmátrix. Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix esetén $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrix alakja a következő.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszer megoldásához az $\mathbf{LU}$ felbontás egy újabb módszert ad a kezünkbe. Miért is jó az *LU* felbontás egy lineáris egyenletrendszer megoldására?

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 1.\ \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \ \to \mathbf{y} \\ 2.\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \ \to \mathbf{x} \end{array}$$

Ebben az esetben az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ helyett az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, majd pedig az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert kell megoldanunk. Az LU felbontás hátterében - mint azt majd látni fogjuk a további példák megoldása során - tulajdonképpen a Gauss elimináció húzódik meg.

Éppen ezért érdemes megjegyezni, hogy az LU felbontás létezik pontosan akkor, ha a Gauss elimináció sor- és oszlopcsere nélkül elvégezhető. Az $\mathbf{LU}$ felbontást többféleképpen is előállíthatjuk. A példa megoldások során 3 alapvető módszert mutatunk be.

a) Előállítás $\mathbf{L_i}$ alsó háromszögmátrixok segítségével ($i = 1, \ldots, n-1$).

b) Előállítás Gauss eliminációval párhuzamosan, tömörített alakkal.

c) Előállítás mátrixszorzás segítségével.

Először tekintsük végig a jelenlegi példán, hogyan készíthetjük el az LU felbontást az $\mathbf{L_i}$ alsóháromszög mátrixok segítségével.

Az $\mathbf{L_i}$ ($i = 1, \ldots, n-1$) mátrixok segítségével a Gauss elimináció egyes lépéseit valósítjuk meg. Tehát a Gauss elimináció $k-1$. lépése után kapott $\mathbf{A_{k-1}}$ mátrixra a következő lépésben kapott $\mathbf{A_k}$ mátrixhoz eljuthatunk egy alkalmas $\mathbf{L_k}$ mátrix szorzás segítségével is.

$$\mathbf{A_k} = \mathbf{L_k} \cdot \mathbf{A_{k-1}}$$

Ennek megfelelően a Gauss elimináció k. lépését szeretnénk reprezentálni. Minden lépésben az előző lépésben kapott mátrixból indulunk ki.

k. lépés: Az $\mathbf{L_k}$ számítása a következőképpen történik. Vegyük az $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{nxn}$ egységmátrixot és módosítsuk azt a k. oszlopában úgy, hogy a diagonális alatt lévő $-l_{k+1,k}, \ldots, -l_{nk}$ értékek rendre a

$$-\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \ldots, -\frac{a_{nk}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

hányadosok legyenek, tehát $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$, ($i = k+1, \ldots, n$).

Miután az $\mathbf{L_{n-1}}$ mátrixot, vagyis a Gauss elimináció $n-1$. lépését is alkalmaztuk, megkapjuk az $\mathbf{U}$ mátrixot, vagyis a felső háromszög alakot.

$$\mathbf{L_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

Innen invertálással és mátrixszorzással kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{L_1^{-1}} \cdot \mathbf{L_2^{-1}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L_{n-1}^{-1}}\right) \cdot \mathbf{U}$$

Belátható, hogy az $\mathbf{L}$ alsó háromszögbeli elemei a korábban említett $l_{i,k}$ elemekből a megfelelő oszlopokba pakolással előállíthatók. Nézzük meg ezt a technikát a konkrét példa megoldása során.

$$\mathbf{A_0} := \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Első lépésként elkészítjük az $\mathbf{L_1}$ mátrixot. Ahogy azt már korábban leírtuk, ebben az esetben az $\mathbf{I}$ egységmátrix első oszlopában kell a főátló alatti elemeket kiegészíteni a következőképpen. $(-1)\frac{a_{21}}{a_{11}} = (-1)\frac{-2}{1} = 2$

$(-1)\frac{a_{31}}{a_{11}} = (-1)\frac{1}{1} = -1$

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezt alkalmazzuk az $\mathbf{A}$ mátrixra.

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

A következő lépés az $\mathbf{L_2}$ mátrix előállítása.
$(-1)\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = (-1)\frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-\dfrac{1}{8}} & 1 \end{bmatrix}$$

Ezt alkalmazzuk az $\mathbf{A_1}$ mátrixra.

$$\mathbf{A_2} = \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

Mivel a mátrixunk 3×3-as volt, ezért készen is vannak az $\mathbf{L_i}$ mátrixok, sőt ahogy azt már korábban leírtuk ebben az esetben az $\mathbf{U}$ mátrix is könnyen leolvasható.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

Most már csak az $\mathbf{L}$ mátrixot kell elkészítenünk, ami definíció szerint 3×3-as esetben. $\mathbf{L} = \mathbf{L_1^{-1}} \cdot \mathbf{L_2^{-1}}$ Az $\mathbf{L_i}$ mátrixok inverzét kiszámítani nagyon egyszerű, hiszen az egységmátrixtól különböző elemeinek a (-1)-szeresét kell venni.

$$\mathbf{L_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

Így az $\mathbf{L}$ mátrix a következő

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1^{-1}} \cdot \mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ha nem vagyunk kíváncsiak az $\mathbf{L_i}$ mátrixokra, akkor az $\mathbf{L}$ -be kerülő elemek úgy is megjegyezhetők, hogy az elimináció k. lépésében az $\mathbf{L}$ k. oszlopában a diagonális alá az $\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ elemek kerülnek, vagyis a diagonális elemmel osztunk.
Az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa a Gauss eliminációnál már említett módon számolható ki. Mivel elkészült a felső háromszögmátrix, így abból könnyedén leolvasható a mátrix determinánsa.

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 8 \cdot \frac{19}{8} = 19$$

20. Az előző feladatban megismert módszert felhasználva határozzuk meg az **A** mátrix LU felbontását.

$$\mathbf{A_0} := \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ennek segítségével elkészítjük az $\mathbf{L_1}$ mátrixot. Tehát az **I** egységmátrix első oszlopában kell a főátló alatti elemeket kiegészíteni a következőképpen.
$(-1)\frac{a_{21}}{a_{11}} = (-1)\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
$(-1)\frac{a_{31}}{a_{11}} = (-1)\frac{-4}{2} = -2$

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-\dfrac{1}{2}} & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát innen az A_1 mátrixot a következőképpen számoljuk.

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Innen az L_2 mátrix a következő.

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\dfrac{16}{11}} & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A_2}$ mátrix az előbbiekben már ismertetett módon számítható.

$$\mathbf{A_2} = \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Ezzel elkészítettük az **L** mátrix meghatározásához szükséges $\mathbf{L_i}$ mátrixokat. Arra kell csak figyelnünk, hogy az **L** mátrix meghatározásához az $\mathbf{L_i}$ mátrixok inverzére van szükségünk. Ezt a már említett összepakolással készítjük el.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{16}{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

A determináns meghatározása az eddigieknek megfelelően a következő.

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot \frac{11}{2} \cdot 13 = 143$$

21. Készítsük el az **A** mátrix LU felbontása a korábbi példákban bemutatott módszer segítségével.

$$\mathbf{A_0} := \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Elkészítjük az $\mathbf{L_1}$ mátrixot. Tehát az $\mathbf{I}$ egységmátrix első oszlopában kell a főátló alatti elemeket kiegészíteni a következőképpen.
$(-1)\frac{a_{21}}{a_{11}} = (-1)\frac{4}{2} = -2$
$(-1)\frac{a_{31}}{a_{11}} = (-1)\frac{-2}{2} = -1$

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát az $\mathbf{A_1}$ mátrix

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Innen az $\mathbf{L_2}$ mátrix a következő.

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{A_2} = \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Most már csak $\mathbf{L_i}$ mátrixok inverzét kell meghatározni az $\mathbf{L}$ mátrix elkészítéséhez.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa a következő

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16.$$

22. Készítsük el az $\mathbf{A}$ mátrix LU felbontását a korábbi példákban bemutatott módszer segítségével!

$$\mathbf{A_0} := \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

Elkészítjük az $\mathbf{L_1}$ mátrixot. Tehát az $\mathbf{I}$ egységmátrix első oszlopában kell a főátló alatti elemeket kiegészíteni.
$(-1)\frac{a_{21}}{a_{11}} = (-1)\frac{6}{3} = -2$
$(-1)\frac{a_{31}}{a_{11}} = (-1)\frac{9}{3} = -3$

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vagyis az $\mathbf{A_1}$ mátrix a következő.

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -20 & 1 \end{bmatrix}$$

Innen az $\mathbf{L_2}$ mátrix könnyen számolható a következő segítségével.
$(-1)\frac{l_1 a_{23}}{l_2 a_{22}} = (-1)\frac{-20}{-6} = -\frac{10}{3}$

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-\frac{10}{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Az **L** és **U** mátrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{10}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{A_2} = \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen az **A** mátrix determinánsa a következő.

$$\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot (-6) \cdot 1 = -18$$

23. Az LU felbontáshoz nem szükséges az $\mathbf{L_i}$ mátrixokat elkészíteni, hiszen ezek, ahogyan azt korábban már említettük, a Gauss elimináció egyes lépéseit reprezentálják. Így előállíthatjuk az LU felbontást a Gauss eliminációval párhuzamosan is. A következőkben megmutatjuk, hogy hogyan is lehet a számítógépes reprezentációhoz helytakarékosan megvalósítani az LU felbontást a Gauss elimináció segítségével.

Az alap ötletre bárki könnyen rájöhet, ha megfigyeli a mátrixok szerkezetét. Az **L** mátrix egy olyan alsó háromszögmátrix, amelyben a főátlóban egyesek találhatóak. Vagyis az "értékes" elemek valójában a főátló alatt helyezkednek el.
A másik fontos megfigyelés a Gauss elimináció során előállított felső háromszög, vagyis az LU felbontásban **U** mátrixként ismert mátrix strukúrájára vonatkozik. A felső háromszögmátrixban a főátló alatt nullák helyezkednek el, így az értékes elemek a főátlóban, illetve fölötte helyezkednek el. Most már csak egy apró megfigyelésre van szükség. Az $\mathbf{L_i}$ mátrix inverze egy (-1) -es szorzó segítségével könnyen képezhető, illetve a struktúra specialitásából fakad, hogy az $\mathbf{L_i^{-1}}$ mátrixok szorzata gyakorlatilag a mátrixok megfelelő oszlop vektorainak egymás mellé írásával képezhető. Ezeket a megfigyeléseket összesítve kapjuk az alábbi helytakarékos algoritmust.

i/1. lépés: Végrehajtjuk a Gauss elimináció i. lépését.

i/2. lépés: kiszámítjuk az $i-1$. lépésben kapott mátrixból az $\mathbf{L_i}$ mátrixhoz szükséges hányadosokat. Ezeket az előző lépésben kapott mátrixban a nullák helyére beírjuk. Csak arra kell figyelnünk, hogy ezek az elemek nem az A_i mátrix elemei, vagyis a következő lépésben rajtuk nem végezzük el a Gauss elimináció műveleteit, hiszen a Gauss elimináció szempontjából ezeknek az elemeknek a helyén nullák vannak.

A Gauss elmináció végeztével könnyen le is tudjuk olvasni az **L** és **U** mátrixokat. Nézzük meg ezt a módszert a gyakorlatban is. Keretezve jelöljük az **L** mátrixhoz tartozó részt.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ezzel elkészítettük a Gauss elimináció első lépését. Most ki kell számolnunk az L_1 mátrixhoz szükséges hányadosokat. Arra ügyeljünk, hogy most nem kell a (-1)-szerest venni, hiszen az inverzhez erre van szükség.
$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-2}{1} = -\frac{2}{1}$

$\frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1$
A kapott hányadosokat az elimináció végén kapott nullák helyére beírva kapjuk az első lépés utáni tömörített alakot.

$$\mathbf{A_1'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-2} & 8 & 13 \\ \boxed{1} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Most elvégezzük a Gauss elimináció második lépését, arra ügyelve, hogy az első oszlopban a főátló alatti elemek ebben a kontextusban nullák.

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-2} & 8 & 13 \\ \boxed{1} & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-2} & 8 & 13 \\ \boxed{1} & 0 & 4\frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

Most pedig az $\mathbf{L_2}$ mátrixbeli háyadost kell meghatároznunk.
$\frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{1}{8}$

$$\mathbf{A_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-2} & 8 & 13 \\ \boxed{1} & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-2} & 8 & 13 \\ \boxed{1} & \boxed{\frac{1}{8}} & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

Innen könnyen leolvashatjuk az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ mátrixot.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

24. Az előző feladatban bemutatott módszer segítségével oldjuk meg ezt a feladatot is. Tehát a Gauss elimináció első lépése után az alábbi hányadosokkal egészítjük ki a mátrixot.
$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2}$
$\frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-4}{2} = (-2)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1'} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 5,5 & 5,5 \\ 0 & -8 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ \boxed{-2} & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Folytassuk a Gauss elimináció 2. lépésével és a hányadosok beépítésével.

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ \boxed{-2} & -8 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2'} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ \boxed{-2} & 0 & \frac{286}{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ \boxed{-2} & \boxed{-\frac{8}{5}} & 13 \end{bmatrix}$$

Az előbbiekben megismerteknek megfelelően könnyen leolvashatjuk az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ mátrixot.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

25. A Gauss elimináció első lépése után az alábbi hányadosokkal egészítjük ki a mátrixot.
$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{6}{3} = 2$
$\frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{9}{3} = 3$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & -8 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1'} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 20 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ \boxed{2} & -6 & 0 \\ \boxed{3} & -20 & 1 \end{bmatrix}$$

Folytatva a Gauss elimináció 2. lépésével és a hányadosok beépítésével kapjuk.

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ \boxed{2} & -6 & 0 \\ \boxed{3} & -20 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2'} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ \boxed{2} & -6 & 0 \\ \boxed{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ \boxed{2} & -6 & 0 \\ \boxed{3} & \boxed{\frac{10}{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Az előbb megismerteknek megfelelően könnyen leolvashatjuk az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ mátrixot.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

26. A korábbiakban megismert kétféle módszer ($\mathbf{L_i}$ mátrixok, Gauss elimináció) után egy harmadik alternatívát mutatunk be az LU felbontás megvalósítására. Ez a módszer a mátrixszorzás segítségével készíti el az LU felbontást.
Ez a módszer az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ mátrixok speciális szerkezetének köszönhetően működhet. Háromféle elrendezés segítségével fogjuk meghatározni az ismeretleneket, ezek a sorrendek beszédes elnevezésűek.

a) Oszlopfolytonos kifejtés esetén az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopában fentről lefelé haladva határozzuk meg az ismeretleneket, majd folytatjuk a második oszlopban és így tovább.

b) Sorfolytonos kifejtés során az $\mathbf{A}$ mátrix első sorából indulunk ki és az elemeken balról jobbra haladva sorban határozzuk meg az ismeretleneket.

c) Parketta kifejtés esetén az A mátris első során haladunk végig balról jobbra, ezt követően az első oszlopban a második elemtől fentről lefelé. Így egy $(n-1) \times (n-1)$ -es részmátrix marad, amin ugyanezt kell folytatnunk.

Oldjuk meg a konkrét feladatot a parketta kifejtéssel.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

A fent leírtaknak megfelelően az első sorban kell az ismeretleneket meghatároznunk balról jobbra haladva. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix első sora mindig megegyezik az $\mathbf{U}$ első sorával, a későbbi feladatok során ezt már felhasználjuk.

$$\begin{aligned} 1 = 1 \cdot u_1 \longrightarrow u_1 &= 1 \\ 2 = 1 \cdot u_2 \longrightarrow u_2 &= 2 \\ 3 = 1 \cdot u_3 \longrightarrow u_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ezt követően az első oszlopban folytatjuk a kifejtést fentről lefelé haladva a második pozíciótól.

$$\begin{aligned} -2 = l_1 \cdot u_1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = l_1 \cdot 1 \longrightarrow l_1 &= -2 \\ 1 = l_2 \cdot u_1 + l_3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = l_2 \cdot 1 \longrightarrow l_2 &= 1 \end{aligned}$$

Ezt követően a maradék 2×2-es mátrix részen kell elvégeznünk az előbbi kifejtést.

$$\begin{aligned} 4 = l_1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_4 + 0 \cdot 0 = -2 \cdot 1 + u_4 \longrightarrow u_4 &= 8 \\ 7 = l_1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_5 + 0 \cdot u_6 = -2 \cdot 3 + u_5 \longrightarrow u_5 &= 13 \\ 3 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 + 1 \cdot 0 = 1 \cdot 2 + 8 \cdot l_3 \longrightarrow l_3 &= \frac{1}{8} \\ 7 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + 1 \cdot u_6 = 1 \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 13 + u_6 \longrightarrow u_6 &= \frac{19}{8} \end{aligned}$$

Visszaírva a mátrixokba a meghatározott ismeretlenek értékeit, megkapjuk az alábbi **L** és **U** mátrixokat.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

27. Az előző feladatban leírtaknak megfelelően oldjuk meg a feladatot.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

Az **U** első sorában lévő ismeretlenek egyeznek az **A** első sorával.

$$u_1 = 2, \quad u_2 = -5, \quad u_3 = 3$$

Ezt követően az első oszlopban folytatjuk a kifejtést fentről lefelé haladva a második pozíciótól.

$$\begin{aligned} 1 = l_1 \cdot u_1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = l_1 \cdot 2 \longrightarrow l_1 &= \frac{1}{2} \\ -4 = l_2 \cdot u_1 + l_3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = l_2 \cdot 2 \longrightarrow l_2 &= -2 \end{aligned}$$

Ezt követően a maradék 2×2-es mátrixrészen kell elvégeznünk az előbbi kifejtést.

$$\begin{aligned} 3 = l_1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_4 + 0 \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 + u_4 \longrightarrow u_4 &= \frac{11}{2} \\ 7 = l_1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_5 + 0 \cdot u_6 = \frac{1}{2} \cdot 3 + u_5 \longrightarrow u_5 &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

És így tovább.

$$\begin{aligned} 2 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 + 1 \cdot 0 = (-2) \cdot (-5) + \frac{11}{2} \cdot l_3 \longrightarrow l_3 = \frac{-8}{5,5} &= -\frac{16}{11} \\ -1 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + 1 \cdot u_6 = (-2) \cdot 3 + \frac{-8}{5,5} \cdot 5,5 + u_6 \longrightarrow u_6 &= 13 \end{aligned}$$

Visszaírva a mátrixokba a meghatározott ismeretlenek értékeit, kapjuk az alábbi **L** és **U** mátrixokat.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{16}{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

28. A korábbi példában említett oszlopfolytonos kifejtést használjuk a feladat megoldásához.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

A fentebb leírtaknak megfelelően az első oszlopban kell az ismeretleneket meghatároznunk fentről lefelé haladva.

$$\begin{aligned} 1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \longrightarrow u_1 &= 1 \\ -2 = l_1 \cdot u_1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \longrightarrow l_1 &= -2 \\ 1 = l_2 \cdot u_1 + l_3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \longrightarrow l_2 &= 1 \end{aligned}$$

Folytatjuk a második oszlopban fentről lefelé. A továbbiakban a null aszorzatokat nem írjuk ki.

$$\begin{aligned} 2 = 1 \cdot u_2 \longrightarrow u_2 &= 2 \\ 4 = l_2 \cdot u_2 + u_4 \longrightarrow u_4 &= 8 \\ 3 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 \longrightarrow l_3 &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

A harmadik oszloppal folytatjuk.

$$\begin{aligned} 3 = u_3 \longrightarrow u_3 &= 3 \\ 7 = l_1 \cdot u_3 + u_5 \longrightarrow u_5 &= 13 \\ 7 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 \longrightarrow u_6 &= \frac{19}{8} \end{aligned}$$

Tehát az **L** és az **U** mátrixok.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

29. Az előző feladatban leírtaknak megfelelően oldjuk meg a feladatot.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

Az első oszlopban kezdjük az ismeretlenek meghatározását.

$$\begin{aligned} 2 = u_1 \longrightarrow u_1 &= 2 \\ 1 = l_1 \cdot u_1 = l_1 \cdot 2 \longrightarrow l_1 &= \frac{1}{2} \\ -4 = l_2 \cdot u_1 = l_2 \cdot 2 \longrightarrow l_2 &= -2 \end{aligned}$$

Folytatjuk az ismeretlenek meghatározását a második oszlopban.

$$\begin{aligned} -5 = u_2 \longrightarrow u_2 &= (-5) \\ 3 = l_1 \cdot u_2 + u_4 = \frac{1}{2} \cdot (-5) + u_4 \longrightarrow u_4 &= \frac{11}{2} \\ 2 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 = (-2) \cdot (-5) + \frac{11}{2} \cdot l_3 \longrightarrow l_3 = \frac{-8}{5,5} &= -\frac{16}{11} \end{aligned}$$

Most már csak a harmadik oszlopban kell az ismeretleneket meghatároznunk.

$$\begin{aligned} 3 = u_3 \longrightarrow u_3 &= 3 \\ 7 = l_1 \cdot u_3 + u_5 = \frac{1}{2} \cdot 3 + u_5 \longrightarrow u_5 &= \frac{11}{2} \\ -1 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 = (-2) \cdot 3 - \frac{16}{11} \cdot \frac{11}{2} + u_6 \longrightarrow u_6 &= 13 \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{16}{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

30. Első lépésként az ismeretlenek meghatározásához az első sorban haladunk végig balról jobbra.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

Az első sor $\mathbf{U}$ -ban ugyanaz, mint $\mathbf{A}$ -ban.

$$u_1 = 2, \quad u_2 = -5, \quad u_3 = 3$$

Folytatva a második sorban.

$$\begin{aligned} 1 = l_1 \cdot u_1 = l_1 \cdot 2 \longrightarrow l_1 &= \frac{1}{2} \\ 3 = l_1 \cdot u_2 + u_4 = \frac{1}{2} \cdot (-5) + u_4 \longrightarrow u_4 &= \frac{11}{2} \\ 7 = l_1 \cdot u_3 + u_5 = \frac{1}{2} \cdot 3 + u_5 \longrightarrow u_5 &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Az utolsó sorban folytatva az ismeretlenek meghatározását.

$$\begin{aligned} -4 = l_2 \cdot u_1 = l_2 \cdot 2 \longrightarrow l_2 &= (-2) \\ 2 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 = (-2) \cdot (-5) + \frac{11}{2} \cdot l_3 \longrightarrow l_3 &= -\frac{16}{11} \\ -1 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 = (-2) \cdot 3 - \frac{16}{11} \cdot \frac{11}{2} + u_6 \longrightarrow u_6 &= 13 \end{aligned}$$

Tehát a megoldás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{16}{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

31.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & -3 \\ 16 & 25 & -33 & -\frac{47}{2} \\ 8 & 9 & 18 & -\frac{29}{2} \\ -10 & -14 & \frac{33}{4} & \frac{63}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & u_5 & u_6 & u_7 \\ 0 & 0 & u_8 & u_9 \\ 0 & 0 & 0 & u_10 \end{bmatrix}$$

Első lépésként az ismeretlenek meghatározásához az első oszlopban haladunk végig fentről lefelé.

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \\ 16 = u_1 \cdot l_1 = 2 \cdot l_1 \longrightarrow l_1 &= 8 \\ 8 = u_1 \cdot l_2 = 2 \cdot l_2 \longrightarrow l_2 &= 4 \\ -10 = u_1 \cdot l_4 = 2 \cdot l_4 \longrightarrow l_4 &= -5 \end{aligned}$$

A második oszlopban folytatjuk a megoldást.

$$\begin{aligned} u_2 &= 3 \\ 25 = u_2 \cdot l_1 + u_5 = 3 \cdot 8 + u_5 \longrightarrow u_5 &= 1 \\ 9 = u_2 \cdot l_2 + u_5 \cdot l_3 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot l_3 \longrightarrow l_3 &= -3 \\ -14 = u_2 \cdot l_4 + u_5 \cdot l_5 = 3 \cdot (-5) + 1 \cdot l_5 \longrightarrow l_5 &= 1 \end{aligned}$$

A harmadik oszlopban folytatjuk az eljárást.

$$\begin{aligned} u_3 &= -3 \\ -33 = u_3 \cdot l_1 + u_6 = (-3) \cdot 8 + u_6 \longrightarrow u_6 &= -9 \\ 18 = u_3 \cdot l_2 + u_6 \cdot l_3 + u_8 = (-3) \cdot 4 + (-9) \cdot (-3) + u_8 \longrightarrow u_8 &= 3 \\ \frac{33}{4} = u_3 \cdot l_4 + u_6 \cdot l_5 + u_8 \cdot l_6 = (-3) \cdot (-5) + (-9) \cdot 1 + 3 \cdot l_6 \longrightarrow l_6 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Végül az utolsó oszlopon haladunk végig.

$$\begin{aligned} u_4 &= -3 \\ -\frac{47}{2} = u_4 \cdot l_1 + u_7 = (-3) \cdot 8 + u_7 \longrightarrow u_7 &= \frac{1}{2} \\ -\frac{29}{2} = u_4 \cdot l_2 + u_7 \cdot l_3 + u_9 = (-3) \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-3) + u_9 \longrightarrow u_9 &= -1 \\ \frac{63}{4} = u_4 \cdot l_4 + u_7 \cdot l_5 + u_9 \cdot l_6 + u_10 = (-3) \cdot (-5) + \frac{1}{2} \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{3}{4} \longrightarrow u_10 &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

32.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -6 & 17 & 19 \\ 8 & -4 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

a) Sorfolytonos kifejtés:

Első sor

$2 = 1 \cdot u_1 \longrightarrow u_1 = 2$
$4 = 1 \cdot u_2 \longrightarrow u_2 = 4$
$-6 = 1 \cdot u_3 \longrightarrow u_3 = -6$

Második sor

$-6 = l_1 \cdot u_1 = 2 \cdot l_1 \longrightarrow l_1 = -3$
$-17 = l_1 \cdot u_2 + u_4 = 4 \cdot (-3) + u_4 \longrightarrow u_4 = -4$
$19 = l_1 \cdot u_3 + u_5 = (-6) \cdot (-3) + u_5 \longrightarrow u_5 = 1$

Harmadik sor

$8 = l_2 \cdot u_1 = 2 \cdot l_2 \longrightarrow l_2 = 4$
$-4 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 = 4 \cdot 4 + (-5) \cdot l_3 \longrightarrow l_3 = 4$
$-14 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 = (-6) \cdot 4 + 1 \cdot 4 + u_6 \longrightarrow u_6 = 6$

b) Oszlopfolytonos kifejtés:

Első oszlop

$2 = 1 \cdot u_1 \longrightarrow u_1 = 2$
$-6 = l_1 \cdot u_1 = 2 \cdot l_1 \longrightarrow l_1 = -3$
$8 = l_2 \cdot u_1 = 2 \cdot l_2 \longrightarrow l_2 = 4$

Második oszlop

$4 = 1 \cdot u_2 \longrightarrow u_2 = 4$
$-17 = l_1 \cdot u_2 + u_4 = 4 \cdot (-3) + u_4 \longrightarrow u_4 = -5$
$-4 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 = 4 \cdot 4 + (-5) \cdot l_3 \longrightarrow l_3 = 4$

Harmadik oszlop

$-6 = 1 \cdot u_3 \longrightarrow u_3 = -6$
$19 = l_1 \cdot u_3 + u_5 = (-6) \cdot (-3) + u_5 \longrightarrow u_5 = 1$
$-4 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 = (-6) \cdot 4 + 1 \cdot 4 + u_6 \longrightarrow u_6 = 6$

c) Parketta kifejtés:

Első sor

$2 = 1 \cdot u_1 \longrightarrow u_1 = 2$
$4 = 1 \cdot u_2 \longrightarrow u_2 = 4$
$-6 = 1 \cdot u_3 \longrightarrow u_3 = -6$

Első oszlop

$-6 = l_1 \cdot u_1 = 2 \cdot l_1 \longrightarrow l_1 = -3$
$8 = l_2 \cdot u_1 = 2 \cdot l_2 \longrightarrow l_2 = 4$

És így tovább.

$-17 = l_1 \cdot u_2 + u_4 = 4 \cdot (-3) + u_4 \longrightarrow u_4 = -4$
$19 = l_1 \cdot u_3 + u_5 = (-6) \cdot (-3) + u_5 \longrightarrow u_5 = 1$

$-4 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 = 4 \cdot 4 + (-5) \cdot l_3 \longrightarrow l_3 = 4$
$-14 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 = (-6) \cdot 4 + 1 \cdot 4 + u_6 \longrightarrow u_6 = 6$

A megoldás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

2.2.4. *LDU* felbontás *LU* segítségével

33. Az *LDU* felbontás esetén az **A** mátrix egy olyan szorzat felbontását keressük, amelyben az **L** egy alsó háromszögmátrix, a **D** egy diagonális mátrix, míg az **U** egy felső háromszögmátrix, ahol az **L** és **U** diagonálisában egyesek vannak.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{n1} & \dots & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ 0 & \dots & 1 & u_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az előállításhoz használhatjuk a korábban tanult $\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontásból kapott mátrixokat. Ez utóbbi felső háromszögmátrixát másképp kell jelölnünk, hiszen ott a diagonálisra nincs megkötésünk. Ha elkészült az **A** mátrix $\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontása, akkor a **D** mátrix meghatározása könnyű, hiszen az $\widetilde{\mathbf{U}}$ mátrix diagonálisában lévő elemeket kell a **D** mátrix diagonálisába helyeznünk.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \widetilde{u}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{u}_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \widetilde{u}_{nn} \end{bmatrix}$$

A **D**-vel való szorzás kompenzálásaként az $\widetilde{\mathbf{U}}$ mátrix sorait végig kell osztani a diagonálisbeli elemekkel. Nézzük meg ezt a módszert a gyakorlatban a kitűzött feladat megoldása során. Első lépésként elkészítjük az **A** mátrix $\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontását. Ennek a részletes bemutatásától eltekintünk, hiszen a korábbi példák esetén már megtettük.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 8 & 8 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ebből készítsük el a fent leírt módszer segítségével az *LDU* felbontást, mely a következő lesz.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

34. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Az LDU felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

35. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Az LDU felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

36. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Az LDU felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

37. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{15} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{bmatrix}$$

Az LDU felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{15} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

38. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Az LDU felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

39. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Az LDU felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.5. LDL^T és LL^T (Cholesky) felbontás

40. Az LL^T felbontás meghatározására három módszert mutatunk be.

a) LU felbontás segítségével.
b) Az LDU segítségével, ami jelen esetben LDL^T felbontás.
c) Mátrix szorzásból oszloponként.

Fontos megjegyezni, hogy csak szimmetrikus **A** mátrixra lehet Cholesky-féle felbontást készíteni. Másrészt ha **A** pozitív definit mátrix, akkor $\exists$ $\mathbf{LL^T}$ felbontás. Egyértelmű a felbontás, ha megköveteljük, hogy $l_{ii} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ legyen.

a) Először nézzük meg az LU felbontás segítségével. A jobb érthetőség kedvéért az eddigi LU felbontást jelölje $\widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{U}}$. Tehát az új jelöléssel legyen adott az $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás és ennek segítségével határozzuk meg az LL^T felbontást.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az LL^T felbontáshoz az $\widetilde{\mathbf{L}}$ mátrix oszlopait szorozzuk meg az $\widetilde{\mathbf{U}}$ diagonálisában található elemek gyökével. Ezzel megkapjuk a keresett **L** mátrixot.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

b) Az LDU felbontás segítségével is ugyanilyen egyszerű az előállítás. Mivel **A** szimmetrikus mátrix, ezért $\mathbf{L^T} = \mathbf{U}$, így valójában LDL^T felbontásból indulunk ki. Az LDL^T felbontásnál az előzőekhez hasonlóan bevezetjük a hullámos jelölést, legyen $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{L}^\mathbf{T}}$. Vegyük a **D** elemeinek gyökét és szorozzuk meg $\widetilde{\mathbf{L}}$ oszlopait. Így $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}} \cdot \sqrt{\mathbf{D}}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{LDU}$$

$$\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}} \cdot \sqrt{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c) Az LL^T felbontást meg tudjuk határozni mátrixszorzás segítségével is.
Írjuk fel az $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L^T} = \mathbf{A}$ mátrixszorzatot.

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ 0 & l_3 & l_5 \\ 0 & 0 & l_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Innen az $\mathbf{L}$ mátrix oszlopain sorban végighaladva meghatározhatjuk az l_i értékeket.

- Az első oszlop alapján
  $l_1^2 = 2 \longrightarrow l_1 = \sqrt{2}$
  $l_2 \cdot l_1 = 1 \longrightarrow l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  $l_4 \cdot l_1 = 2 \longrightarrow l_4 = \sqrt{2}.$

- A második oszlop alapján
  $l_2^2 + l_3^2 = 2 \longrightarrow l_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$
  $l_4 \cdot l_2 + l_5 \cdot l_3 = 1 \longrightarrow l_5 = 0.$

- A harmadik oszlop alapján
  $l_4^2 \cdot l_5^2 + l_6^2 = 4 \longrightarrow l_6 = \sqrt{2}.$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy mindhárom esetben ugyanazt az eredményt kaptuk.

41. Az előző feladatban bemutatott LL^T felbontás kapcsán megismerhettük az LU felbontásból történő meghatározás módszerét. Az LDL^T felbontásnál is hasonlóan fogunk eljárni, mint az LL^T esetnél. Most is használjuk a könnyebb követhetőség kedvéért a hullámos jelölést, vagyis legyen $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$. Az $\mathbf{L}$ -re nem kell új jelölést bevezetnünk, hiszen az LDL^T felbontásnál és az LU felbontásnál is egyesek vannak az $\mathbf{L}$ diagonálisában.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$$

Az LDL^T felbontás előállítása tulajdonképpen megegyezik az LDU felbontásnál megismert módszerrel. A $\mathbf{D}$ mátrixba rakjuk az $\mathbf{U}$ diagonális elemeit.

Ellenőrizhetjük, hogy $\mathbf{L^T} = \mathbf{D^{-1}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}$, ehhez az $\widetilde{\mathbf{U}}$ sorait kell a diagonális elemekkel leosztani. Ezzel tulajdonképpen elő is állítottuk az LDL^T felbontást.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az LL^T felbontást elkészíthetjük az LDL^T segítségével is, hiszen

$$(\mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}})(\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{L})^{\mathbf{T}} = \widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}.$$

Tehát az $\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$ felbontás

$$\widehat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

42. Használjuk fel az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás eredményét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ebből az LDL^T felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen pedig az LL^T felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

43. Használjuk fel az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás eredményét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből az LDL^T felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen pedig az LL^T felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

44. Használjuk fel az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás eredményét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

Ebből az LDL^T felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen pedig az LL^T felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}.$$

.

45. Használjuk fel az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás eredményét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ebből az LDL^T felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen pedig az LL^T felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

2.2.6. QR felbontás Gram-Schmidt ortogonalizációval

46. Egy nagyon jól használható módszert ad a kezünkbe a lineáris egyenletrendszerek megoldásához a QR felbontás. Miért is jó a QR felbontás a lineáris egyenletrendszerek megoldásához? A válasz nagyon egyszerű természetesen a mátrixok speciális tulajdonságai miatt igaz az iménti ekvivalencia. A $\mathbf{Q}$ mátrix ortogonális mátrix, míg az $\mathbf{R}$ mátrix egy felső háromszögmátrix.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{QRx} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Rx} = \mathbf{Q^T b},$$

A feladat megoldásához a $\mathbf{Q}$ és az $\mathbf{R}$ mátrixokat a következő alakban keressük.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} & \mathbf{q_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

Az egyszerűség kedvéért a $\mathbf{Q}$ mátrixot oszlopvektoronként fogjuk előállítani. $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ előállításához a Gram-Schmidt ortogonalizáció képleteit használjuk.

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a_1}\|_2 \\ \mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}} \mathbf{a_1} \end{aligned}$$

$k = 2, \ldots, n$ -re a következő képleteket használjuk.

$$\begin{aligned} r_{jk} &= < \mathbf{a_k}, \mathbf{q_j} > \\ r_{kk} &= \| \mathbf{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \mathbf{q_j} \|_2 \\ \mathbf{q_k} &= \frac{1}{r_{kk}} \left(\mathbf{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \mathbf{q_j} \right) \end{aligned}$$

Fontos megjegyezni, hogy kézi számolás esetén nem kell feltétlenül ragaszkodni a normált vektorok előállításához, ezt a végén egy egyszerű kompenzációval elő tudjuk állítani. Ezt majd egy későbbi feladat kapcsán ismertetjük.

Az előbbiekben leírtaknak megfelelően számítsuk ki az ismeretleneket.

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \|\,\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{2^2+6^2+3^2} = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7 \\
\mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\,\mathbf{a_1} = \frac{1}{7}\,\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \\
r_{12} &= <\mathbf{a_2}, \mathbf{q_1}>= 5\cdot\frac{2}{7} + 8\cdot\frac{6}{7} + (-3)\cdot\frac{3}{7} = \frac{49}{7} = 7 \\
r_{22} &= \|\,\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\,\|_2 = \sqrt{3^2+2^2+(-6)^2} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7 \\
\mathbf{q_2} &= \frac{1}{r_{22}}\,(\,\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\,) = \frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{13} &= <\mathbf{a_3}, \mathbf{q_1}>= 2\cdot\frac{2}{7} + 6\cdot\frac{6}{7} + 3\cdot\frac{3}{7} = \frac{49}{7} = 7 \\
r_{23} &= <\mathbf{a_3}, \mathbf{q_2}>= 4\cdot\frac{3}{7} + 0\cdot\frac{2}{7} + 2\cdot\frac{-6}{7} = 0 \\
r_{33} &= \|\,\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\,\|_2 = \sqrt{2^2+(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11} \\
\mathbf{q_3} &= \frac{1}{r_{33}}\,(\,\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\,) = \frac{1}{2\sqrt{11}}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2\sqrt{11}} \\ -\frac{6}{2\sqrt{11}} \\ -\frac{2}{2\sqrt{11}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tehát a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{2\sqrt{11}} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{2\sqrt{11}} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{2\sqrt{11}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{11} \end{bmatrix}.$$

.

47. Az előző feladatban ismertetett módszer alapján készítjük el a megoldást.

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \|\,\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5 \\
\mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\,\mathbf{a_1} = \frac{1}{5}\,\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \\
r_{12} &= <\mathbf{a_2}, \mathbf{q_1}>= 6\cdot\frac{3}{5} + 8\cdot\frac{4}{5} + (-2)\cdot 0 = \frac{50}{5} = 10 \\
r_{22} &= \|\,\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\,\|_2 = \sqrt{0^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{0+0+4} = \sqrt{4} = 2 \\
\mathbf{q_2} &= \frac{1}{r_{22}}\,(\,\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\,) = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{13} &= <\mathbf{a_3}, \mathbf{q_1}>= (-1)\cdot\frac{3}{5} + 7\cdot\frac{4}{5} + 3\cdot 0 = \frac{25}{5} = 5 \\
r_{23} &= <\mathbf{a_3}, \mathbf{q_2}>= (-1)\cdot 0 + 7\cdot 0 + 3\cdot(-1) = -3 \\
r_{33} &= \|\,\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\,\|_2 = \sqrt{(-4)^2+3^2+0^2} = \sqrt{16+9+0} = \sqrt{25} = 5 \\
\mathbf{q_3} &= \frac{1}{r_{33}}\,(\,\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\,) = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tehát a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

.

48. Az előző feladatban ismertetett módszer alapján készítjük el a megoldást.

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{0^2+5^2+0^2} = \sqrt{0+25+0} = \sqrt{25} = 5 \\ \mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{5}\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= <\mathbf{a_2}, \mathbf{q_1}> = 4\cdot 0 + 7\cdot 1 + 3\cdot 0 = 7 \\ r_{22} &= \|\,\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\,\|_2 = \sqrt{4^2+0^2+3^2} = \sqrt{16+0+9} = \sqrt{25} = 5 \\ \mathbf{q_2} &= \frac{1}{r_{22}}(\,\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\,) = \frac{1}{5}\cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= <\mathbf{a_3}, \mathbf{q_1}> = 1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + 5\cdot 0 = -2 \\ r_{23} &= <\mathbf{a_3}, \mathbf{q_2}> = 1\cdot \frac{4}{5} + (-2)\cdot 0 + 5\cdot \frac{3}{5} = \frac{25}{5} = \frac{1}{5} \\ r_{33} &= \|\,\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\,\|_2 = \sqrt{(-3)^2+0^2+2^2} = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13} \\ \mathbf{q_3} &= \frac{1}{r_{33}}(\,\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\,) = \frac{1}{\sqrt{13}}\cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tehát a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{bmatrix}.$$

.

49. Az előző feladatban ismertetett módszer alapján készítjük el a megoldást.

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = \sqrt{0+0+1} = \sqrt{1} = 1 \\ \mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{1}\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= <\mathbf{a_2}, \mathbf{q_1}> = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0,7\cdot 1 = 0,7 \\ r_{22} &= \|\,\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\,\|_2 = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = \sqrt{1+0+0} = \sqrt{1} = 1 \\ \mathbf{q_2} &= \frac{1}{r_{22}}(\,\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\,) = \frac{1}{1}\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{13} &= <\mathbf{a_3},\mathbf{q_1}>= 0,8\cdot 0+0,2\cdot 0+0,7\cdot 1=0,7\\
r_{23} &= <\mathbf{a_3},\mathbf{q_2}>= 0,8\cdot 1+0,2\cdot 0+0,7\cdot 0=0,8\\
r_{33} &= \|\,\mathbf{a_3}-r_{13}\mathbf{q_1}-r_{23}\mathbf{q_2}\,\|_2=\sqrt{0^2+0,2^2+0^2}=\sqrt{0,04}=0,2\\
\mathbf{q_3} &= \frac{1}{r_{33}}\,(\,\mathbf{a_3}-r_{13}\mathbf{q_1}-r_{23}\mathbf{q_2}\,)=\frac{1}{0,2}\cdot\begin{bmatrix}0\\0,2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tehát a **Q** és **R** mátrixok

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix}1&0,7&0,7\\0&1&0,8\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

.

50. Először oldjuk meg az eddig megismert módon, majd ezt követően egy egyszerűsített módszert mutatunk be.

a) Az eddig bemutatott módszer segítségével oldjuk meg a feladatot.

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \|\,\mathbf{a_1}\|_2=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3\\
\mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\,\mathbf{a_1}=\frac{1}{3}\,\mathbf{a_1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\\
r_{12} &= <\mathbf{a_2},\mathbf{q_1}>= 0\cdot\frac{2}{3}+12\cdot\frac{2}{3}+12\cdot\frac{1}{3}=8+4=12\\
r_{22} &= \|\,\mathbf{a_2}-r_{12}\mathbf{q_1}\,\|_2=\sqrt{(-8)^2+4^2+8^2}=\sqrt{64+16+64}=\sqrt{144}=12\\
\mathbf{q_2} &= \frac{1}{r_{22}}\,(\,\mathbf{a_2}-r_{12}\mathbf{q_1}\,)=\frac{1}{12}\cdot\begin{bmatrix}-8\\4\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{13} &= <\mathbf{a_3},\mathbf{q_1}>= 3\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{3}=2+1=3\\
r_{23} &= <\mathbf{a_3},\mathbf{q_2}>= 3\cdot\frac{-2}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{3}=-2+2=0\\
r_{33} &= \|\,\mathbf{a_3}-r_{13}\mathbf{q_1}-r_{23}\mathbf{q_2}\,\|_2=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3\\
\mathbf{q_3} &= \frac{1}{r_{33}}\,(\,\mathbf{a_3}-r_{13}\mathbf{q_1}-r_{23}\mathbf{q_2}\,)=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tehát a **Q** és **R** mátrixok

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix}3&12&3\\0&12&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

.

b) Az eddigi megoldások során, minden lépésben normálva tartottuk a **Q** mátrix oszlopvektorait. A mostani megoldásban ezt a normálást az eljárás végén hajtjuk végre. Így menet közben nem kell a normálásból fakadó esetleges nehezebb számítást okozó számokkal számolni. Ehhez az alábbi módosított képleteket használjuk.

$$\begin{aligned}
r_{11} &= 1\\
\mathbf{q_1} &= \mathbf{a_1}
\end{aligned}$$

$k = 2, \ldots, n$ -re a következő képleteket használjuk.

$$\begin{aligned} r_{jk} &= \frac{< \mathbf{a_k}, \mathbf{q_j} >}{< \mathbf{q_j}, \mathbf{q_j} >} \quad (j = 1, \ldots, k-1) \\ r_{kk} &= 1 \\ \mathbf{q_k} &= \mathbf{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \mathbf{q_j} \end{aligned}$$

Fontos megjegyeznünk, hogy a mátrixokat az eljárás végén kompenzálni kell a $\mathbf{Q}$ mátrix normáival.

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1 \\ \mathbf{q_1} &= \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ r_{12} &= \frac{< \mathbf{a_2}, \mathbf{q_1} >}{< \mathbf{q_1}, \mathbf{q_1} >} = \frac{0 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 12 \cdot 1}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} = \frac{36}{9} = 4 \\ r_{22} &= 1 \\ \mathbf{q_2} &= \mathbf{a_2} - \mathbf{r_{12}} \mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= \frac{< \mathbf{a_3}, \mathbf{q_1} >}{< \mathbf{q_1}, \mathbf{q_1} >} = \frac{3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} = \frac{9}{9} = 1 \\ r_{23} &= \frac{< \mathbf{a_3}, \mathbf{q_2} >}{< \mathbf{q_2}, \mathbf{q_2} >} = \frac{3 \cdot (-8) + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 8}{(-8) \cdot (-8) + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 8} = \frac{0}{144} = 0 \\ r_{33} &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{q_3} = \mathbf{a_3} - r_{13} \mathbf{q_1} - r_{23} \mathbf{q_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ezt követően $\mathbf{Q}$ oszlopait osztjuk a 2 -es normájukkal , míg az $\mathbf{R}$ sorait ugyanezekkel az értékekkel szorozzuk.

$$\|\widetilde{\mathbf{q_1}}\|_2 = 3, \quad \|\widetilde{\mathbf{q_2}}\|_2 = 12, \quad \|\widetilde{\mathbf{q_3}}\|_2 = 3$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 3 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Nem meglepő módon mind a két módszer azonos megoldást adott.

51. Az előző feladat második részében megismertük a QR felbontás meghatározásánal egy egyszerűsített változatát. Most ennek a módszernek a segítségével oldjuk meg a kitűzött példát.

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1 \\ \mathbf{q_1} &= \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ r_{12} &= \frac{<\mathbf{a_2},\mathbf{q_1}>}{<\mathbf{q_1},\mathbf{q_1}>} = \frac{4\cdot 2+5\cdot 2+2\cdot 2}{1\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 2} = \frac{18}{9} = 2 \\ r_{22} &= 1 \\ \mathbf{q_2} &= \mathbf{a_2} - \mathbf{r_{12}q_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= \frac{<\mathbf{a_3},\mathbf{q_1}>}{<\mathbf{q_1},\mathbf{q_1}>} = \frac{6\cdot 1+6\cdot 2+9\cdot 2}{1\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 2} = \frac{36}{9} = 4 \\ r_{23} &= \frac{<\mathbf{a_3},\mathbf{q_2}>}{<\mathbf{q_2},\mathbf{q_2}>} = \frac{6\cdot 2+6\cdot 1+9\cdot(-2)}{2\cdot 2+1\cdot 1+(-2)\cdot(-2)} = \frac{0}{9} = 0 \\ r_{33} &= 1 \\ \mathbf{q_3} &= \mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} - 4\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 0\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ezt követően $\mathbf{Q}$ oszlopait osztjuk a 2 -es normájukkal , míg az $\mathbf{R}$ sorait ugyanezekkel az értékekkel szorozzuk.

$$\|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}\|_2 = 3, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}\|_2 = 3, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3}\|_2 = 3$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

52. Az előző feladatban használt módszert alkalmazzuk.

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1 \\ \mathbf{q_1} &= \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ r_{12} &= \frac{<\mathbf{a_2},\mathbf{q_1}>}{<\mathbf{q_1},\mathbf{q_1}>} = \frac{6\cdot 1+5\cdot 1+7\cdot 1}{1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1} = \frac{18}{3} = 6 \\ r_{22} &= 1 \\ \mathbf{q_2} &= \mathbf{a_2} - \mathbf{r_{12}q_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} - 6\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{13} &= \frac{<\mathbf{a_3},\mathbf{q_1}>}{<\mathbf{q_1},\mathbf{q_1}>} = \frac{1\cdot 1+0\cdot 1+5\cdot 1}{1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1} = \frac{6}{3} = 2 \\
r_{23} &= \frac{<\mathbf{a_3},\mathbf{q_2}>}{<\mathbf{q_2},\mathbf{q_2}>} = \frac{1\cdot 0+0\cdot(-1)+5\cdot 1}{0\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 1} = \frac{5}{2} \\
r_{33} &= 1 \\
\mathbf{q_3} &= \mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} = \begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{5}{2}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezt követően $\mathbf{Q}$ oszlopait osztjuk a 2 -es normájukkal , míg az $\mathbf{R}$ sorait ugyanezekkel az értékekkel szorozzuk.

$$\|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}\|_2 = \sqrt{3}, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}\|_2 = \sqrt{2}, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3}\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix}1 & 6 & 2\\ 0 & 1 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 6\sqrt{3} & 2\sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{2} & \frac{5}{2}\sqrt{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

53. Az előző feladatban használt módszert alkalmazzuk.

$$\begin{aligned}
r_{11} &= 1 \\
\mathbf{q_1} &= \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \\
r_{12} &= \frac{<\mathbf{a_2},\mathbf{q_1}>}{<\mathbf{q_1},\mathbf{q_1}>} = \frac{2\cdot(-1)+1\cdot 0+2\cdot 1}{(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1} = \frac{0}{2} = 0 \\
r_{22} &= 1 \\
\mathbf{q_2} &= \mathbf{a_2} - \mathbf{r_{12}}\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{13} &= \frac{<\mathbf{a_3},\mathbf{q_1}>}{<\mathbf{q_1},\mathbf{q_1}>} = \frac{5\cdot(-1)+2\cdot 0+3\cdot 1}{(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1 \\
r_{23} &= \frac{<\mathbf{a_3},\mathbf{q_2}>}{<\mathbf{q_2},\mathbf{q_2}>} = \frac{5\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 2}{2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 2} = \frac{18}{9} = 2 \\
r_{33} &= 1 \\
\mathbf{q_3} &= \mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} = \begin{bmatrix}5\\2\\3\end{bmatrix} - (-1)\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezt követően $\mathbf{Q}$ oszlopait osztjuk a 2 -es normájukkal , míg az $\mathbf{R}$ sorait ugyanezekkel az értékekkel szorozzuk.

$$\|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}\|_2 = \sqrt{2}, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}\|_2 = 3, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3}\|_2 = 0$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott eredményből látható, hogy az **A** oszlopvektorai nem lineárisan függetlenek. A kapott **Q** mátrix nem ortogonális, csak az első két oszlopa alkot ortonormális rendszert.

54. Az eddigi feladatban bemutatott módszert használva oldjuk meg a kitűzött feladatot.

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1 \\ \mathbf{q_1} &= \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ r_{12} &= \frac{<\mathbf{a_2}, \mathbf{q_1}>}{<\mathbf{q_1}, \mathbf{q_1}>} = \frac{1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 7 \cdot 3}{4 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3} = \frac{25}{25} = 1 \\ r_{22} &= 1 \\ \mathbf{q_2} &= \mathbf{a_2} - \mathbf{r_{12}} \mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= \frac{<\mathbf{a_3}, \mathbf{q_1}>}{<\mathbf{q_1}, \mathbf{q_1}>} = \frac{8 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 3}{4 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3} = \frac{50}{25} = 2 \\ r_{23} &= \frac{<\mathbf{a_3}, \mathbf{q_2}>}{<\mathbf{q_2}, \mathbf{q_2}>} = \frac{8 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 4}{(-3) \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 4} = \frac{0}{25} = 0 \\ r_{33} &= 1 \\ \mathbf{q_3} &= \mathbf{a_3} - r_{13} \mathbf{q_1} - r_{23} \mathbf{q_2} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ezt követően **Q** oszlopait osztjuk a 2 -es normájukkal , míg az **R** sorait ugyanezekkel az értékekkel szorozzuk.

$$\|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}\|_2 = 5, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}\|_2 = 5, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3}\|_2 = 2$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2.7. Householder transzformáció

55. A feladat, hogy az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A Householder transzformáció elvégzéséhez nincs feltétlenül szükség a transzformációs mátrix minden elemére, de a feladat megoldásához fontos ismerni a szerkezetét. A $\mathbf{H}$ mátrix olyan szimmetrikus és ortogonális (komplex esetben unitér) mátrix amelynek speciális alakja van:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{v}) = \mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1\|_2} \in \mathbb{R}^n$$

ahol

$$\sigma = -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2.$$

Első feladatunk a σ kiszámítása a fenti képlet alapján.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = -sgn(-1) \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \\ &= \sqrt{1+4+4} = 3 \end{aligned}$$

A $\mathbf{v}$ vektort a σ ismeretében megkaphatjuk egy egyszerű behelyettesítéssel a fenti képletből.

$$\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ezután alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot 12 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 3} \end{aligned}$$

Ahogy látható, a fenti képlet segítségével a transzformáció elvégezhető a $\mathbf{H}$ mátrix konkrét előállítása nélkül. A számolás után az $\mathbf{a}$ vektort sikerült a kívánt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozni.

56. A feladat megoldásához először ki kell számolnunk a σ-t.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = -sgn(2) \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \\ &= -\sqrt{4+4+1} = -3 \end{aligned}$$

A σ segítségével már könnyedén kiszámolható a $\mathbf{v}$ vektor értéke:

$$\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A fenti adatok segítségével a Householder mátrix immár kiszámolható.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v}) &= \mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & -\frac{14}{15} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

57. A feladat megoldásához első lépésként ki kell számolnunk a σ-t.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = \\
&= -sgn(2) \cdot \sqrt{4+1+1} = -\sqrt{6}
\end{aligned}$$

A σ segítségével kiszámolható a $\mathbf{v}$ vektor értéke.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A fenti adatok segítségével a Householder mátrix a következő.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v}) &= \mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} & 1 & 1 \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6+2\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} 10+4\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} & 1 & 1 \\ 2+\sqrt{6} & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\frac{10+4\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} \\ -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & 1-\frac{1}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6+2\sqrt{6}} \\ -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6+2\sqrt{6}} & 1-\frac{1}{6+2\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Ahhoz, hogy megkapjuk a k értékét, végre kell hajtanunk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra.

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{10+4\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} \\ -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & 1-\frac{1}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6+2\sqrt{6}} \\ -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6+2\sqrt{6}} & 1-\frac{1}{6+2\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = -\sqrt{6}}$$

A transzormáció a

$$\mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{a})$$

képlet alkalmazásával gazdaságosabban számolható ki.

58. A feladat megoldásához első lépésként ki kell számolnunk a σ-t.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = \\ &= -sgn(2) \cdot \sqrt{4+1+4} = -3 \end{aligned}$$

A σ segítségével a $\mathbf{v}$ vektor értéke is kiszámolható.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A fenti adatok segítségével a Householder-mátrix kiszámolható.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v}) &= \mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 25 & -5 & 10 \\ -5 & 1 & -2 \\ 10 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} -10 & 5 & -10 \\ 5 & 14 & 2 \\ -10 & 2 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Most, hogy megkaptuk a transzformációs mátrixot. Ahhoz, hogy megkapjuk a k értékét, alkalmaznunk kell a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektoron.

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & 5 & -10 \\ 5 & 14 & 2 \\ -10 & 2 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = -3}$$

59. A feladat, hogy az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz $k \cdot \mathbf{e}_1$-re. Első feladatunk a σ kiszámítása.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = \\ &= -sgn(1) \cdot \sqrt{1 + 2^2 + 2^2 + 0} = -3 \end{aligned}$$

Mivel megkaptuk a σ-t, a $\mathbf{v}$ vektort ki tudjuk számítani.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ezután már csak annyi van hátra, hogy alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 12 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = -3} \end{aligned}$$

60. A feladat, hogy az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz $k \cdot \mathbf{e}_1$-re. Első feladatunk a σ kiszámítása.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = \\ &= -sgn(1) \cdot \sqrt{1 + 1 + 1 + 1} = -2 \end{aligned}$$

Mivel megkaptuk a σ-t, kiszámíthatjuk a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Az utolsó lépés, a transzformáció alkalmazása az $\mathbf{a}$ vektoron, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} &= (\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}-2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot 6 = \begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boxed{k=-2}
\end{aligned}$$

61. Számoljuk ki a σ-t.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sgn(a_1)\cdot\|\mathbf{a}\|_2 = \\
&= -sgn(2)\cdot\sqrt{2^2+2^2+1^2+0} = -3
\end{aligned}$$

Megkaptuk a σ-t, így most már ki tudjuk számítani a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\2\\1\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután már csak annyi van hátra, hogy alkalmazzuk a transzformációt az **a** vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} &= (\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}-2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\
&= \begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\2\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{15}\cdot\begin{bmatrix}5\\2\\1\\0\end{bmatrix}\cdot 15 = \begin{bmatrix}-3\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boxed{k=-3}
\end{aligned}$$

62. A feladat, hogy az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz $k\cdot\mathbf{e}_1$-re. Első feladatunk a σ kiszámítása.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sgn(a_1)\cdot\|\mathbf{a}\|_2 = \\
&= -sgn(1)\cdot\sqrt{1+0+4+4} = -3
\end{aligned}$$

Mivel megkaptuk a σ-t, lehetőségünk van arra, hogy a $\mathbf{v}$ vektort kiszámítsuk.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ezután már csak annyi van hátra, hogy alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{a} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 12 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = -3} \end{aligned}$$

63. A feladat, hogy az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz $k \cdot \mathbf{e}_1$-re. Első feladatunk a σ kiszámítása.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = \\ &= -sgn(1) \cdot \sqrt{1 + 4 + 4 + 16} = -5 \end{aligned}$$

Megkaptuk a σ-t, tehát kiszámíthatjuk a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{60}} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ezután már csak annyi van hátra, hogy alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} &= (\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}-2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\
&= \begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{60}}\cdot\frac{1}{\sqrt{60}}\cdot\begin{bmatrix}6\\2\\2\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & 2 & 2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix} - \frac{1}{30}\cdot\begin{bmatrix}6\\2\\2\\4\end{bmatrix}\cdot 30 = \begin{bmatrix}-5\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boxed{k=-5}
\end{aligned}$$

64. A feladat megoldásához először ki kell számolnunk a σ-t.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sgn(a_1)\cdot\|\mathbf{a}\|_2 = \\
&= -sgn(2)\cdot\sqrt{4+1+0+4} = -3
\end{aligned}$$

A σ segítségével már könnyedén kiszámolható a $\mathbf{v}$ vektor értéke.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix}2\\1\\0\\2\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A fenti adatok segítségével a Householder-mátrix immár kiszámolható.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v}) &= \mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}} = \\
&= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} - 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}\right)^T = \\
&= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} - \frac{1}{15}\cdot\begin{bmatrix}25&5&0&10\\5&1&0&2\\0&0&0&0\\10&2&0&4\end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{15}\cdot\begin{bmatrix}-10&-5&0&-10\\-5&14&0&-2\\0&0&15&0\\-10&-2&0&11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{14}{15}&0&-\frac{2}{15}\\0&0&1&0\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{15}&0&\frac{11}{15}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Most, hogy már megvan a **H** mátrix, a transzformáció elvégzéséhez csupán egy szorzásra van szükség.

$$\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} & 0 & -\frac{2}{15}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & 0 & \frac{11}{15}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\boxed{k=3}$$

65. A feladat, hogy az $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz $k\cdot\mathbf{e}_1$-re. Első feladatunk a σ kiszámítása.

$$\begin{aligned}\sigma &= -sgn(a_1)\cdot\|\mathbf{a}\|_2=\\ &= -sgn(1)\cdot\sqrt{1+1+1+1+1}=-\sqrt{5}\end{aligned}$$

A σ segítségével meghatározzuk a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\sqrt{5}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\sqrt{5}\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{5}\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ezután már csak annyi van hátra, hogy alkalmazzuk a transzformációt az **a** vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} &= (\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}-2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a})=\\ &= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{5}\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\\ &= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{5}\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot(5+\sqrt{5})=\begin{bmatrix}-\sqrt{5}\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\boxed{k=-\sqrt{5}}\end{aligned}$$

66. Feladatunk a $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{d}$ egyenletrendszer megoldása. Első lépésként el kell készítenünk a $\mathbf{c_1}$ vektorhoz a $\mathbf{H_1}$ mátrixot, ahol $\mathbf{c_1}$ vektor a $\mathbf{C}$ mátrix első oszlopa.

$$\begin{aligned}\sigma &= -sgn(c_{11})\cdot\|\mathbf{c_1}\|_2=\\ &= -sgn(4)\cdot 4=-4\end{aligned}$$

$$\mathbf{c_1} - \sigma\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{c_1} - \sigma\mathbf{e_1}}{\|\mathbf{c_1} - \sigma\mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Miután megkaptunk minden szükséges változót a $\mathbf{H_1}$ mátrixhoz, alkalmazzuk azt a $\mathbf{C}$ mátrix minden oszlopvektorára.

$$\mathbf{H}_1\mathbf{c_1} = (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}) \cdot \mathbf{c_1} = \mathbf{c_1} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{c_1}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_1}\mathbf{c_2} = \mathbf{c_2} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{c_2}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_1}\mathbf{c_3} = \mathbf{c_3} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{c_3}) =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A fenti adatoknak köszönhetően felírhatjuk a $\mathbf{C}$ mátrix $\mathbf{H_1}$ Householder mátrix-szal való szorzásának eredményét.

$$\mathbf{H_1} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A célunk, hogy a $\mathbf{C}$ mátrixból felső háromszögmátrixot készítsünk. Ehhez transzformációt kell alkalmaznunk a jobb alsó 2×2-es mátrixon is. Nevezzük ezt el $\widetilde{\mathbf{C}}$-nak. Az előző lépésekhez hasonlóan felírhatunk egy $\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{2}$ Householder mátrixot a $\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1}$ vektor segítségével.

$$\sigma = -sgn(1) \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = -\sqrt{2}$$

$$\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1} - \sigma\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \frac{\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1} - \sigma\mathbf{e_1}}{\|\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1} - \sigma\mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ezután a $\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{2}$ mátrixot alkalmazzuk a $\widetilde{\mathbf{C}}$ mátrix minden oszlopvektorára.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{2}\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1} &= \widetilde{\mathbf{c}}_1 - 2\cdot\widetilde{\mathbf{v}}\cdot(\widetilde{\mathbf{v}}^\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1}) = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{2+\sqrt{2}} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{2}\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{2} &= \widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{2} - 2\cdot\widetilde{\mathbf{v}}\cdot(\widetilde{\mathbf{v}}^\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{2}) = \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{2+3\sqrt{2}} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \underbrace{\frac{2+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}_{2\sqrt{2}-1}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezzel megkaptuk a kívánt felső háromszögmátrixot.

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{H_1}$ és $\mathbf{H_2}$ mátrixok segítségével meghatározhatjuk a $\mathbf{Q}$ mátrixot, míg a kapott felső háromszögmátrix megegyezik az $\mathbf{R}$ mátrixszal. Ezáltal megkaptuk a $\mathbf{C}$ mátrix $\mathbf{QR}$ felbontását.

$$\mathbf{QR} = \mathbf{C} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{QR}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{R}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{Q}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{d}$$

A következő feladatunk tehát, hogy alkalmazzuk a $\mathbf{H}_1$ -et $\mathbf{d}$ -re, majd annak utolsó két koordinátájára $\widetilde{\mathbf{H}}_2$ -t.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1\mathbf{d} &= \mathbf{d} - 2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{d}) = \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\widetilde{\mathbf{H}}_2\widetilde{\mathbf{d}} &= \widetilde{\mathbf{d}} - 2\cdot\widetilde{\mathbf{v}}\cdot(\widetilde{\mathbf{v}}^\mathbf{T}\cdot\widetilde{\mathbf{d}}) = \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4+2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{2+3\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tehát a Householder transzformációk eredménye $\begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$.
Utolsó lépésként a felső háromszög alakból visszahelyettesítéssel kiszámíthatók a megoldás vektor elemei.

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2}x_3 = 2\sqrt{2} &\quad\Rightarrow\quad \boxed{x_3 = 1} \\
-\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 = -\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} &\quad\Rightarrow\quad \boxed{x_2 = 0} \\
-4x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \Leftrightarrow -4x_1 = -4 &\quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1 = 1}
\end{aligned}$$

Tehát a lineáris egyenletrendszer megoldása: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

67. A feladat, hogy a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot felső háromszög alakra hozzuk. Ehhez Householder-transzformációt alkalmazunk a mátrixon. Első lépésként meg kell alkotnunk a $\mathbf{c_1}$ vektorhoz a $\mathbf{H_1}$ mátrixot.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(c_{11}) \cdot \|\mathbf{c_1}\|_2 = \\ &= -sgn(1) \cdot \sqrt{1+0+1} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c_1} - \sigma\mathbf{e_1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{c_1} - \sigma\mathbf{e_1}}{\|\mathbf{c}_1 - \sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Miután megkaptunk minden szükséges változót a $\mathbf{H_1}$ mátrixhoz, alkalmazzuk azt a $\mathbf{C}$ mátrix minden oszlopvektorára.

$$\begin{aligned} \mathbf{H_1 c_1} &= (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v^T}) \cdot \mathbf{c_1} = \mathbf{c_1} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v^T c_1}) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (2+\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H_1 c_2} &= \mathbf{c_2} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v^T c_2}) = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{4+2\sqrt{2}} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H_1 c_3} &= \mathbf{c_3} - 2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v^T c_3}) = \\
&= \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1+\sqrt{2} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}}_{2} = \\
&= \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix} - \underbrace{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}_{2-\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\2-\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\4\\\sqrt{2}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Miután elvégeztük a transzformációkat, a kapott eredmény felső háromszögmátrix, így készen vagyunk a feladat megoldásával.

$$\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\0 & 3 & 4\\0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

68. A feladat, hogy a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

mátrixot felső háromszög alakra hozzuk. Ehhez Householder-transzformációt alkalmazunk a mátrixon. Első lépésként meg kell határoznunk a $\mathbf{d_1}$ vektorhoz a $\mathbf{H_1}$ transzformációs mátrixot.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sqn(d_{11})\cdot\|\mathbf{d_1}\|_2 = \\
&= -sgn(1)\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2} = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{d_1} - \sigma\mathbf{e_1} &= \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{d_1}-\sigma\mathbf{e_1}}{\|\mathbf{d_1}-\sigma\mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Miután megkaptunk minden szükséges változót a $\mathbf{H_1}$ mátrixhoz, alkalmazzuk azt a $\mathbf{D}$ mátrix mindkét oszlopvektorára.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H_1 d_1} &= (\mathbf{I} - 2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v^T})\cdot\mathbf{d_1} = \mathbf{d}_1 - 2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v^T d_1}) = \\
&= \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2} & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}\cdot(2+\sqrt{2}) = \begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H_1 d_2} &= \mathbf{d}_2 - 2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v^T d_2}) = \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1+\sqrt{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\sqrt{2}} = \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}_{\sqrt{2}-1}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\sqrt{2}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Miután elvégeztük a transzformációkat, a kapott eredmény felső háromszögmátrix, így készen vagyunk a feladattal.

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

69. A feladat az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása. Mivel ismerjük az $\mathbf{A}$ mátrix QR felbontását, így ezt felhasználva az $\mathbf{A}$ kiszámolása nélkül is megoldható az egyenletrendszer, hiszen

$$\mathbf{QRx} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Rx} = \mathbf{Q^T b} = \mathbf{Qb}.$$

Mivel $\mathbf{Q}$ Householder mátrix, ezért megegyezik a transzponáltjával. Ebből következik, hogy első lépésként ki kell számolni $\mathbf{Qb}$-t.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Qb} &= \mathbf{b} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v^T b}) \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix}}_{-9} = \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{18}{3}}_{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Most már mindent előkészítettünk, hogy az $\mathbf{R}$ segítségével felírjuk az egyenleteket a háromszög mátrixba való behelyettesítéshez.

$$\begin{aligned}
9x_3 = 8 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{x_3 = \frac{8}{9}} \\
9x_2 + 9x_3 = 5 \Leftrightarrow 9x_2 + 8 = 5 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -\frac{1}{3}} \\
9x_1 + 9x_2 = 17 \Leftrightarrow 9x_1 - 3 = 17 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{20}{9}}
\end{aligned}$$

Tehát az eredmény: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{20}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}^T$.