Oktatási segédanyag
a Programtervező matematikus szak
Analízis 2. című tantárgyához
(2003–2004. tanév tavaszi félév)

Analízisfeladat-gyűjtemény IV.

(Függvények határértéke és folytonossága)

Összeállította

Filipp Zoltán, Kővári Zsolt,
Lóczi Lajos és Szili László

2004

Tartalomjegyzék

I. rész

Feladatok

1. Függvények határértéke

1.1. Számhalmaz torlódási pontja

F1. Adjon meg olyan $A \subset \mathbb{R}$ halmazt, amelyre

(a) $A' = \{-2, 3\}$; (b) $A' = \mathbb{N}$.

F2. Van-e olyan $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre $A' = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$?

F3. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Igazolja, hogy ha $\sup A \notin A$, akkor $\sup A \in A'$.

1.2. Függvény határértékének az értelmezése

F4. Legyen f valós-valós függvény. Mit jelent az, hogy

(a) $\lim\limits_{-2} f = 7$; (b) $\lim\limits_{-2} f \neq 7$;

(c) $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -1$; (d) $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = -1$;

(e) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$; (f) $\lim\limits_{1+0} f = +\infty$.

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$; (h) $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -1$.

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; (j) $\lim\limits_{x \to +\infty} f = -\infty$.

(k) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; (l) $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$.

Környezetekkel és abszolút értékkel is fogalmazza meg ezeket az állításokat! Adjon meg olyan függvényeket, amelyekre a fenti relációk teljesülnek.

F5. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy az $f \in \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban

(a) *nincs* határértéke; (b) $A \in \overline{\mathbb{K}}$ *nem* határértéke.

F6. A definíció alapján lássa be, hogy

(a) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$;

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, ha $n = 1, 2, 3, \dots$;

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \dots \\ -\infty & \text{ha } n = 1, 3, 5, \dots; \end{cases}$

(d) minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}$, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}$, ha $n = 1, 2, 3, \ldots$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} \nexists, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \\ = +\infty & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots \ . \end{cases}$

F7. A definíció alapján igazolja, hogy

(a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$;

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

F8. A definíció alapján határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x+5}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$;

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

F9. Legyen a az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $(x_n^{(1)}) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ és $(x_n^{(2)}) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ sorozatok, amelyre

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(1)} = \lim_{n\to+\infty} x_n^{(2)} = a \quad \text{és} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n^{(1)}) \neq \lim_{n\to+\infty} f(x_n^{(2)})$$

teljesül. Mutassa meg, hogy az f függvénynek *nincs* határértéke az $a \in \mathcal{D}_f'$ pontban.

F10. Bizonyítsa be, hogy az alábbi határértékek *nem* léteznek

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign}(x)$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$.

1.3. Függvény határértékének meghatározása

F11. Legyen $f_1(x) := x$, $f_2(x) := x$, $f_3(x) := x^2$, $f_4(x) := \dfrac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Határozza meg $\lim\limits_{x\to+\infty} f_i(x)$-et $i = 1, 2, 3, 4$-re. Azután vizsgálja a következő függvények határértékét $+\infty$-ben:

$$f_1 + f_2, \quad f_1 - f_2, \quad f_1 - f_3, \quad f_1/f_2, \quad f_1/f_3, \quad f_1 \cdot f_2, \quad f_1 \cdot f_4, \quad f_3 \cdot f_4.$$

F12. Legyen $p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $(x \in \mathbb{R})$, ahol $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \neq 0$. Mutassa meg, hogy

(a) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \operatorname{sign}(\alpha_n)(+\infty)$,

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = (-1)^n \operatorname{sign}(\alpha_n)(+\infty)$.

F13. Határérték szempontjából vizsgálja meg a racionális törtfüggvények (két polinomfüggvény hányadosa) határértékét $+\infty$-ben és $-\infty$-ben.

Mj1. **Kritikus határértékek vizsgálata.** Függvények határértékének a meghatározásánál „szerencsés esetekben” alkalmazhatjuk a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó (igen általános!) tételünket. Ezek az eredmények akkor használhatók, ha a tételben szereplő $\overline{\mathbb{K}}$-beli $A+B, AB, A/B$ műveletek értelmezve vannak. Ha valamelyik művelet nincs értelmezve, akkor a megfelelő függvények határértékéről általában semmit sem mondhatunk. Ezeket a **kritikus határértékeket** röviden a

$$(+\infty) + (-\infty), \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}$$

szimbólumokkal szoktuk jelölni. Ilyen esetekben a sorozatoknál már megismert „módszert” követhetjük: a kritikus határértéket „valamilyen módon” (alkalmas azonosságok felhasználásával) megpróbáljuk nem kritikus határértékre átalakítani.

F14. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+x+1}{x^3+x+2}$; (b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$ $(n \in \mathbb{N})$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{3x^2-2x+5}$; (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3+1000}$;

(e) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m, n \in \mathbb{N})$;

(f) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{n}{1-x^n} - \dfrac{m}{1-x^m} \right)$ $(m, n \in \mathbb{N})$;

(g) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{a}{x-1} - \dfrac{b}{x^3-1} \right)$ (a és b valós paraméter);

(h) $\lim\limits_{x\to0} x \left[\frac{1}{x}\right]$, ahol $[x]$ az $x \in \mathbb{R}$ egész részét jelöli;

(i) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-x+1}{x^3+x-2}$.

F15. Határozza meg az alábbi hárértékeket:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; (b) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-x-1}$; (d) $\lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$;

(e) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m,n\in\mathbb{N})$; (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n\in\mathbb{N})$;

F16. Milyen $a,b\in\mathbb{R}$ mellett igaz az, hogy $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right)=0$?

F17. Határozza meg az alábbi hárértékeket:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ $(a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$; (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; (d) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ $(a\in\mathbb{R})$;

(e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$; (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$;

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$; (h) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x - x}$.

F18. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim_{x\to+\infty} e^x$; (b) $\lim_{x\to-\infty} e^x$;

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; (d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$.

F19. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek az értelmezési tartományuk melyik torlódási pontjában van határértéke:

(a) $\mathbb{R}\ni x\mapsto \{x\}$; (b) $\mathbb{R}\ni x\mapsto x-\{x\}$;

(c) $f(x):=\begin{cases} x^2, & \text{ha } x\in\mathbb{Q} \\ -x^2, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \end{cases}$

(d) $f(x):=\begin{cases} 1, & \text{ha } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \end{cases}$

(e) **Riemann-függvény:**

$$f(x):=\begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}, (p,q)=1, q\in\mathbb{N}, p\in\mathbb{Z} \\ 1, & \text{ha } x=0 \\ 0, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

(itt (p,q) jelöli a p és q számok legnagyobb közös osztóját).

2. Függvények folytonossága

2.1. Topológiai fogalmak $\mathbb{K}$-ban

F20. Mutassa meg, hogy ha $H \subset \mathbb{K}$, akkor

(a) $\overline{H}$ zárt halmaz ($\overline{H} := H \cup H'$ a H halmaz *lezártja*);

(b) $H = \overline{H}$ akkor és csak akkor teljesül, ha H zárt halmaz;

(c) $\overline{H} \subset F$ minden olyan zárt $F \subset \mathbb{K}$ halmaz esetén, amelyre $H \subset F$.

((a) és (c) szerint $\overline{H}$ az a legszűkebb $\mathbb{K}$-beli zárt halmaz, amely még tartalmazza a H halmazt.

F21. Igazolja, hogy ha H a valós számok nemüres, felülről korlátos részhalmaza, akkor $\sup H \in \overline{H}$.

F22. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $H \subset \mathbb{K}$ halmaz esetén H' zárt halmaz. Mutassa meg azt is, hogy H és $\overline{H}$ torlódási pontjai megegyeznek. Megegyezik-e mindig a H és a H' halmaznak a torlódási pontjai?

F23. Legyen $H \subset \mathbb{K}$, és jelölje $\operatorname{int} H$ a H halmaz belső pontjainak a halmazát. (Az $\operatorname{int} H$ halmazt a H *belsejének* nevezzük.) Lássa be, hogy

(a) $\operatorname{int} H$ mindig nyílt halmaz;

(b) H akkor és csak akkor nyílt, ha $H = \operatorname{int} H$;

(c) ha $G \subset H$ és G nyílt, akkor $G \subset \operatorname{int} H$.

F24. Zárt, illetve kompakt halmazok metszete, uniója zárt-e, kompakt-e?

F25. Adjon meg olyan $\mathbb{R}$-beli kompakt halmazt, amelynek torlódási pontjai megszámlálható halmazt alkotnak.

F26. Legyen H azon $x \in [0, 1]$ számok halmaza, amelynek tizedestört alakja csak a 4 és a 7 számjegyeket tartalmazza. Igaz-e, hogy $\overline{H} = [0, 1]$?

2.2. A pontbeli folytonosság fogalma

F27. Mit jelent az, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény nem folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban?

F28. Az f valós-valós függvény $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli folytonossága ekvivalens-e a következővel

$$\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ és } \forall\, x \in k_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon?$$

F29. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Mutassa meg, hogy ekkor az a pontnak létezik olyan környezete, amelyben f csak pozitív értéket vesz fel.

F30. Kiterjeszthető-e az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ függvény a 0 pontban folytonosan?

F31. Mely pontokban folytonosak az alábbi függvények:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ x, & \text{ha } x \text{ irracionális?} \end{cases}$

F32. Adjon példát olyan, az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett függvényre, amely csak a 4 pontban folytonos.

2.3. Függvények folytonosságának a vizsgálata

F33. Határozza meg az alábbi függvények folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusát:

(a) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2,5\} \\ 0, & \text{ha } x = 2, x = 5; \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ 10, & \text{ha } x = -1; \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 2 \ (\alpha \in \mathbb{R} \text{ paraméter}); \end{cases}$

(d) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$

(e) $f(x) := \begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$

(f) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$

(g) $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$

(h) $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$

(i) $f(x) := \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$ $(x \in \mathbb{R}_0^+)$; (j) $f(x) := (-1)^{[x^2]}$ $(x \in \mathbb{R})$;

(k) $f(x) := \begin{cases} x\left[\dfrac{1}{x}\right], & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

F34. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesz mindenütt folytonos a következő függvény:

(a) $f(x) := \begin{cases} \alpha x^2 + 4x - 1, & \text{ha } x \le 1 \\ -x + 3, & \text{ha } 1 < x; \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha^2, & \text{ha } x < 4 \\ \alpha x + 20, & \text{ha } x \ge 4; \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{e^{x+\frac{1}{x}}}, & \text{ha } x > 0 \\ -2x + \alpha, & \text{ha } x \le 0? \end{cases}$

F35. Mutassa meg, hogy a *Riemann-függvény* (l. az **F19.**(e) feladatot) irracionális pontokban folytonos, de a racionális helyeken szakadása van.

F36. Bizonyítsa be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és f értéke minden racionális pontban 0, akkor $f(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

F37. Igazolja, hogy egy intervallumon értelmezett monoton függvénynek legfeljebb megszámlálható sok szakadása van, és az is mind elsőfajú szakadási hely.

F38. Adjon meg olyan $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvényt, amelynek minden $(0, 1)$-beli racionális szám szakadási helye.

F39. Legyen f és g valós-valós függvény.

(a) Lehet-e az $f + g, fg, f/g$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban, ha az f és a g függvénynek az a pont szakadási helye?

(b) Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos, a g függvénynek pedig szakadása van az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban. Lehet-e az $f+g, fg, f/g$ függvény folytonos a-ban?

F40. Igazolja, hogy az $f(x) := (1 + x^2)\operatorname{sign} x$ $(x \in \mathbb{R})$ szakadásos függvénynek az inverze folytonos.

2.4. Kompakt halmazon folytonos függvények

F41. Bizonyítsa be, hogy minden páratlan fokszámú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

F42. Igazolja, hogy az alábbi egyenleteknek van megoldása a jelzett I intervallumon:

(a) $x = \cos x$, $I := (0, \pi/2)$;

(b) $e^x = 2 - x$, $I := \mathbb{R}$;

(c) $\dfrac{x^2+1}{x-1} + \dfrac{x^6+1}{x-2} = 0$, $I := (1,2)$;

(d) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} = 0$, $I := (1,2), I := (2,3)$.

F43. (a) Igazolja, hogy az $x^3 + x - 1$ polinomnak pontosan egy valós gyöke van, és számítsa ki ezt a gyököt 10^{-1} pontossággal.

(b) Igazolja, hogy az $x^3 + 2x^2 + 4x - 3$ polinomnak pontosan egy pozitív valós gyöke van, és számítsa ki ezt a gyököt 10^{-2} pontossággal.

F44. Bizonyítsa be, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor minden $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén van olyan $\xi \in [a,b]$, amelyre

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

F45. Mutassa meg, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $\mathcal{R}_f = [a,b]$, akkor van olyan $\xi \in [a,b]$, amelyre $f(\xi) = \xi$.

F46. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény határértéke mind $+\infty$-ben, mind pedig $-\infty$-ben $+\infty$. Mutassa meg, hogy ekkor f-nek létezik minimuma.

2.5. Egyenletes folytonosság

F47. A definíció alapján döntse el, hogy egyenletesen folytonosak-e az alábbi függvények:

(a) $f(x) := x^2 \ \big(x \in [0,1]\big)$;

(b) $f(x) := x^2 \ \big(x \in [1,+\infty)\big)$;

(c) $f(x) := \sqrt{x} \ \big(x \in [1,+\infty)\big)$;

(d) $f(x) := \sqrt{x} \ \big(x \in [0,+\infty)\big)$;

(e) $f(x) := \dfrac{1}{x} \ \big(x \in [1,+\infty)\big)$;

(f) $f(x) := \dfrac{1}{x} \ \big(x \in (0,1)\big)$.

F48. Igazolja, hogy az

$$\text{(a) } f(x) := \frac{\sin x}{x} \ \big(x \in (0,1)\big), \qquad \text{(b) } f(x) := x \sin\frac{1}{x} \ \big(x \in (0,1)\big)$$

függvények egyenletesen folytonosak.

F49. Legyen $f, g : A \to \mathbb{R}$, ahol $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f és g egyenletesen folytonos. Mutassa meg, hogy ebből következik $f+g$ egyenletes folytonossága, de nem következik $f \cdot g$ egyenletes folytonossága.

F50. Az előző feladat feltételeit egészítsük ki azzal, hogy f és g korlátos. Igazolja, hogy ekkor $f \cdot g$ is egyenletesen folytonos lesz.

F51. Legyenek f és g az $[a, b]$ intevallumon értelmezett valós értékű egyenletesen folytonos függvények. Tegyük fel, hogy $g(x) \neq 0$ $(a \leq x \leq b)$. Mutassa meg, hogy ekkor $\dfrac{f}{g}$ egyenletesen folytonos.

F52. Határozza meg azokat a $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomokat, amelyek egyenletesen folytonosak.

F53. Bizonyítsa be, hogy ha a folytonos $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek van véges határértéke $+\infty$-ben, akkor f egyenletesen folytonos.

II. rész

Megoldások

1. Függvények határértéke

1.1. Számhalmaz torlódási pontja

M1. (a) Legyen például $A := \left\{-2 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{3 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Mutassa meg, hogy ennek a halmaznak -2 is és 3 is torlódási pontja, és minden $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{-2, 3\}$ pont már nem torlódási pont.

(b) Legyen például $A := \cup_{m=1}^{+\infty}\left\{m + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. ■

M2. Nincs ilyen $\mathbb{R}$-beli halmaz, ui. ha egy halmaznak minden $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ szám torlódási pontja, akkor ennek a halmaznak 0 is torlódási pontja, és ezt az $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ halmaz nem tartalmazza. ■

M3. A szuprémum definíciójából következik, hogy $\sup A$ minden környezete tartalmaz A-beli elemet. Mivel $\sup A \notin A$, ezért $\sup A$ minden környezete tartalmaz $\sup A$-tól különböző A-beli elemet is, ami azt jelenti, hogy $\sup A$ torlódási pontja az A halmaznak. ■

1.2. Függvény határértékének az értelmezése

M4. (a) *Környezetekkel megfogalmazva*: $-2 \in \mathcal{D}'_f$ és

$\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, x \in \big(k_\delta(-2) \setminus \{-2\}\big) \cap \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) \in k_\varepsilon(7)$.

Abszolút értékekre átírva: $-2 \in \mathcal{D}'_f$ és

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$, $0 < |x - (-2)| < \delta$ esetén $|f(x) - 7| < \varepsilon$.

(b) Tagadva az előző állítást: $-2 \in \mathcal{D}'_f$ és

$\exists\, \varepsilon > 0$, hogy $\forall\, \delta > 0$-hoz $\exists\, x \in \mathcal{D}_f$, hogy $0 < |x - (-2)| < \delta$ és $|f(x) - 7| \geq \varepsilon$.

(c) Környezetekkel megfogalmazva: A 0 eleme $\mathcal{D}_f$ bal-torlódáspontjai halmazának és (-1) bármely V környezetéhez van a 0-nak olyan U baloldali környezete, hogy f a $\mathcal{D}_f \cap U \setminus \{0\}$ halmazt V-be képezi. Abszolút értékekkel kifejezve: $(0 \in \mathcal{D}'_f \cap (-\infty, 0])$ és $(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$, melyre $-\delta < x < 0$, igaz, hogy $|f(x) - (-1)| < \varepsilon)$.

(h) $(-\infty \in \mathcal{D}'_f)$ és $(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists d < 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$, melyre $x < d$, fennáll, hogy $|f(x) - (-1)| < \varepsilon)$.

(j) $(+\infty \in \mathcal{D}'_f)$ és $(\forall c < 0 \quad \exists d > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$, melyre $x > d$, teljesül, hogy $f(x) > c)$. ■

M6. (a) Legyen tehát $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$ rögzített. Ha $|x-a|<1$, akkor $|x|<1+|a|$ is fennáll, s így

$$|x^n - a^n| = |x-a| \cdot \left| \sum_{j=0}^{n-1} x^j a^{n-1-j} \right| \leq |x-a| \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |x|^j |a|^{n-1-j} \leq$$

$$\leq |x-a| \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (1+|a|)^j |a|^{n-1-j}.$$

Legyen $K := \sum_{j=0}^{n-1}(1+|a|)^j|a|^{n-1-j}$ csak a rögzített a-tól és n-től függő állandó. Nyilván $K \geq (1+|a|)^{n-1} > 0$. A fenti számolás miatt adott $\varepsilon > 0$-hoz a $\delta := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{K}\right)$ választás a limesz definíciójában megfelelő.

(b) Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$ rögzített. Ha $x > 1$, akkor $x^n > x$. Ebből következik, hogy tetszőleges $c > 0$-hoz megválasztva a $d := \max(1, c)$ számot, igaz lesz, hogy minden $x > d$ esetén $x^n > c$.

(d) Legyen tehát $n \in \mathbb{N}$ és $0 \neq a \in \mathbb{R}$ rögzített. Mivel $|a| > 0$, ezért $|x-a| < \frac{|a|}{2}$ maga után vonja, hogy $\frac{|a|}{2} < |x| < \frac{3|a|}{2}$. Ennek felhasználásával

$$\left| \frac{1}{x^n} - \frac{1}{a^n} \right| = \frac{|x^n - a^n|}{|x|^n |a|^n} \leq \frac{|x-a| \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |x|^j |a|^{n-1-j}}{|x|^n |a|^n} \leq$$

$$\leq |x-a| \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{3|a|}{2}\right)^j |a|^{n-1-j}}{\left(\frac{|a|}{2}\right)^n |a|^n}$$

Legyen $K := \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{3|a|}{2}\right)^j |a|^{n-1-j}}{\left(\frac{|a|}{2}\right)^n |a|^n}$. Nyilván $K > 0$. Adott $\varepsilon > 0$-hoz a $\delta := \min\left(\frac{|a|}{2}, \frac{\varepsilon}{K}\right)$ választás a limesz $\varepsilon - \delta$ definíciójában megfelelő.

(f) Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x^n}$ jobboldali határérték értéke $(+\infty)$, valamint azt, hogy páratlan $n \in \mathbb{N}$ esetén $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x^n} = -\infty$, továbbá, hogy páros $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x^n} = +\infty$. Ezekből a feladat állítása már következik, hiszen a 0-beli limesz pontosan akkor létezik, ha létezik a bal- és jobboldali limesz, és ezek egyenlőek.

A három bizonyítandó állítás közül példaképpen megmutatjuk a másodikat, a többi igazolása analóg, mindössze előjelcserékre van szükség a megfelelő helyeken. Legyen tehát $n \in \mathbb{N}$ rögzített *páratlan* természetes szám. Legyen $c < 0$ tetszőlegesen adott. Az ehhez tartozó δ legyen $\delta := \left|\sqrt[n]{\frac{1}{c}}\right|$. Ekkor minden x esetén, amelyre $-\delta < x < 0$ fennáll, hogy $\frac{1}{x^n} < c$. (Valóban: $-\delta = \sqrt[n]{\frac{1}{c}} < x < 0$ miatt $\frac{1}{c} < x^n < 0$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $1 > x^n c$, illetve, hogy $\frac{1}{x^n} < c$. Figyeljünk rá, hogy menet közben az egyenlőtlenség iránya kétszer is megfordult, amikor negatív számmal szoroztunk. A limesz definíciója alapján készen vagyunk.) ■

M7. (b) Nyilván $|\sqrt{x} - \sqrt{2}| = \frac{|x-2|}{|\sqrt{x}+\sqrt{2}|} \leq \frac{|x-2|}{\sqrt{2}} \leq |x-2|$, ha $x \geq 0$. Ez azt mutatja, hogy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ számhoz $\delta := \varepsilon$ megfelelő.

(d) Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ számhoz a $\delta := \varepsilon$ választás megfelelő, ugyanis $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$. (Itt felhasználtuk azt, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $|\sin \alpha| \leq 1$, ami következik a minden α valós számra fennálló $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosságból.) Ha tehát $0 < |x| < \delta$, akkor $\left|x \sin \frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

(f) Mivel $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz a $d := \frac{1}{\varepsilon}$ választás megfelelő, hiszen $x > d$ maga után vonja, hogy $\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \varepsilon$. ■

M8. (a) A 0-hoz „közeli" pontokban a függvényértékek 1-hez vannak „közel", ebből azt *sejtjük*, hogy a kérdéses határérték 1. Ezt precízen a szokásos ε-δ definícióval *bizonyíthatjuk be*: legyen ugyanis $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott szám. Ekkor közös nevezőre hozással kapjuk, hogy $\left|\frac{1}{1+x} - 1\right| = \frac{|x|}{|1+x|}$. Ha $|x| < \frac{1}{2}$, akkor $\frac{1}{2} < |1+x|$, tehát $\frac{|x|}{|1+x|} < 2|x|$. Emiatt a $\delta := \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ választás megfelelő.

(c) 1-hez „közeli" pontokban a számláló is és a nevező is 0-hoz „közeli" érték. Két „kicsi" szám hányadosa bármi lehet, ezért a határérték megsejtéséhez először átalakítjuk a törtet:

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x^2-1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+1)(x^2+3)}{x-2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}\big).$$

Ez a kifejezés 1-hez „közeli" pontokban (-8)-hoz „közeli" értékeket vesz fel, ezért azt *sejtjük*, hogy a keresett limesz (-8). A *bizonyításhoz* azt kell megmutatnunk, hogy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left|\frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x-2} - (-8)\right| \leq \varepsilon,$$

ha $0 < |x-1| < \delta$, valamely, alkalmas, ε-tól függő $\delta > 0$ számmal. Alakítsuk át a vizsgálandó kifejezést: közös nevezőre hozással és kiemeléssel kapjuk, hogy

$$\left|\frac{x^3+x^2+3x+3}{x-2} - (-8)\right| = \left|\frac{x^3+x^2+11x-13}{x-2}\right| = |x-1|\frac{|x^2+2x+13|}{|x-2|}\,.$$

Ebből látszik, hogy egy lehetséges δ megkapható, ha felülről megbecsüljük az $\frac{|x^2+2x+13|}{|x-2|}$ kifejezést. Ha például első közelítésben megköveteljük, hogy $0 < |x-1| < \frac{1}{2}$ legyen, akkor ezzel el tudjuk érni, hogy $\frac{1}{2} < |x-2|$ és $|x| < \frac{3}{2}$ teljesüljön, amiből kapjuk, hogy

$$\frac{|x^2+2x+13|}{|x-2|} < \frac{|x^2+2x+13|}{1/2} \leq \frac{|x|^2+2|x|+13}{1/2} <$$

$$\frac{(3/2)^2+2\cdot(3/2)+13}{1/2} = \frac{73}{2} < 37.$$

Ebből látjuk, hogy a $\delta := \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{37}\right)$ választás megfelelő.

(f) Megmutatjuk, hogy a limesz értéke $\frac{1}{2}$. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott szám. Be kell lássuk, hogy minden $x < d$ esetén $\left|\frac{x^2-1}{2x^2+1} - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon$, ha $d < 0$ alkalmas, ε-tól függő valós szám. Mivel $\left|\frac{x^2-1}{2x^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2\,(1+2\,x^2)}$, így elegendő a jobb oldalról megmutatni, hogy 0-hoz tetszőlegesen közel kerülhet, ha x elég nagy abszolút értékű negatív szám. A $\frac{3}{2\,(1+2\,x^2)} \leq \varepsilon$ egyenlőtlenség viszont következik az $x < -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\varepsilon}}$ egyenlőtlenségből, tehát a $d := -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\varepsilon}}$ választás megfelelő. ■

M9. A feladat állítása nem más, mint a függvényhatárérték létezésére vonatkozó és az átviteli elvvel megfogalmazott szükséges és elégséges feltétel tagadása. ■

M10. (a) Mivel a sign függvény leszűkítése a negatív számok halmazára a konstans -1 függvény, ezért nyilván $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign}(x) = -1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sign}(x) = 1$, vagyis a 0-beli baloldali- és jobboldali határértékek különbözőek, tehát a 0-beli határérték nem létezik.

(b) Már tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, melyek különbözők, tehát a 0-beli határérték nem létezik. ■

1.3. Függvény határértékének meghatározása

M12. (a) Mivel minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$, ha $n = 0$, ill. $n = 1$, ezért az állítás a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételünkből következik.

(b) Mivel

$$p(x) = x^n \Big(\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{x} + \frac{\alpha_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{\alpha_0}{x^n} \Big) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

valamint

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

ezért az állítás a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételünkből következik.

(c) A (b)-hez hasonlóan.

Megjegyzés. A (b) és (c) állítások tehát azt jelentik, hogy polinomok „viselkedését" a plusz/mínusz végtelen környezetében a polinom főtagja (az $\alpha_n x^n$ tag, illetve még pontosabban az α_n főegyüttható előjele és n paritása) határozza meg, azaz polinom határértéke a $\pm$ végtelenben megegyezik a főtag $\pm$ végtelenben vett határértékével. ■

M13. Legyen

$$r : \mathbb{R} \setminus H \to \mathbb{R}, \quad r(x) := \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \beta_0},$$

ahol n és m pozitív egészek, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \neq 0, \beta_m \neq 0$, továbbá H a nevezőben levő polinom zérushelyeinek a halmaza. Világos, hogy $+\infty$ és $-\infty$ torlódási pontja $\mathcal{D}_r$-nek. Meg kell határoznunk a

$$\lim_{x \to -\infty} r(x) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to +\infty} r(x)$$

határértékeket. Az *ötlet* az, hogy emeljünk ki a számlálóból x^n-t, a nevezőből pedig x^m-t, azaz végezzük el a következő átalakítást:

$$r(x) = x^{n-m} \cdot \frac{\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{\alpha_0}{x^n}}{\beta_m + \frac{\beta_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{\beta_0}{x^m}} \quad (x \in \mathcal{D}_r \setminus \{0\}).$$

Itt az egyes tagok, illetve tényezők határértéke már „látható".

Csak a $-\infty$-ben vett határértéket részletezzük, a $+\infty$-ben vett határértéket is hasonlóan lehet megvizsgálni.

Mivel $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, ezért a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételünkből következik, hogy

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{\alpha_0}{x^n}}{\beta_m + \frac{\beta_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{\beta_0}{x^m}} = \frac{\alpha_n}{\beta_m}.$$

Másrészt, mivel $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ is igaz, ezért a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételünkből következik, hogy

$$\lim_{x\to-\infty} x^{n-m} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n < m \\ 1, & \text{ha } n = m \\ (-1)^{n-m}(+\infty), & \text{ha } n > m. \end{cases}$$

A fentiek alapján tehát

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n < m \\ \frac{\alpha_n}{\beta_m}, & \text{ha } n = m \\ \operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_m}\right)(-1)^{n-m}(+\infty), & \text{ha } n > m. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

M14. (a) A számláló határértéke 1-ben 3, a nevezőé pedig 4, ezért a hányadosfüggvény határértékére vonatkozó tételünk alapján a tört határértéke 1-ben 3/4. ■

(b) A számlálónak is és a nevezőnek is 0 a határértéke az 1 pontban, ezért a hányadosfüggvény határértékére vonatkozó tételünk *nem* alkalmazható ($\frac{0}{0}$-*típusú kritikus határértékről van szó*). Ha $n = 1$, akkor a kérdezett határérték nyilván 1, ezért feltehetjük, hogy n egynél nagyobb természetes szám. Az

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

azonosságot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^n - 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}),$$

és erre a függvényre a műveleti tételeink már alkalmazhatók:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^n - 1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1) = n. \qquad \blacksquare$$

(c) A számláló és a nevező határértéke is $+\infty$ ha $x \to +\infty$. Most $\frac{+\infty}{+\infty}$ esettel van dolgunk. Emeljük ki a „domináns tagokat”, azaz x^2-et, majd az egyszerűsítés után kapjuk, hogy:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2-2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}.$$

A tanult műveleti szabályok értelmében az eredmény: $\frac{2}{3}$. ■

(d) A számlálónak $+\infty$, a nevezőnek pedig $-\infty$ a határértéke $-\infty$-ben, tehát ez egy $\frac{+\infty}{-\infty}$-típusú kritikus határérték. Emeljük ki a domináns tagokat: a számlálóban x^2-et, a nevezőben pedig x^3-t. Egyszerűsítés után, adódik:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^3+1000} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\cdot(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3\cdot(1+\frac{1000}{x^3})} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1000}{x^3}} = 0. \qquad ■$$

(e) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték. Alakítsuk szorzattá a polinomokat (mindkettő tartalmaz $(x-1)$-es tényezőt). Egyszerűsítés után a kapott racionális törtfüggvény határértéke egyenlő a helyettesítési értékkel.

$$\lim_{x\to1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)\cdot(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1} = \frac{m}{n}. \qquad ■$$

(f) Egyik tagnak sincs határértéke 1-ben (a jobb-és bal oldali határértékek különbözők). Vezessük be a $t := x-1$ jelölést. Azt kapjuk, hogy:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{m}{1-x^m}\right) = \lim_{t\to0}\left(\frac{n}{1-(t+1)^n}-\frac{m}{1-(t+1)^m}\right)$$

Legyen $m, n \geq 2$. A binomiális tétel segítségével kifejtve a nevezőben lévő hatványokat, majd elvégezve az összevonásokat:

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{n}{1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot t^k}-\frac{m}{1-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cdot t^k}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{m}{\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\cdot t^k} - \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot t^k}\right) =$$

Hozzunk közös nevezőre:

$$= \lim_{t\to 0}\frac{m(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot t^k) - n(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\cdot t^k)}{(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\cdot t^k)\cdot(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot t^k)} =$$

A számláló is és a nevező is t-nek polinomja. A számlálóban az elsőfokú tagok „kiejtik egymást”, a többi tagból pedig ki tudunk emelni t^2-et. A nevező mindkét tényezőjéből t-t kiemelve, majd egyszerűsítve azt kapjuk, hogy:

$$= \lim_{t\to 0}\frac{m(\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot t^{k-2}) - n(\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}\cdot t^{k-2})}{(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\cdot t^{k-1})\cdot(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot t^{k-1})} =$$

(az így kapott racionális törtfüggvény határértéke a helyettesítési érték, azaz)

$$= \frac{m\cdot\binom{n}{2} - n\cdot\binom{m}{2}}{m\cdot n} = \frac{n-m}{2}.$$

Ez a képlet lesz érvényes akkor is, ha $n = 1$ és $m \in \mathbb{N}$ vagy $m = 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (miért?). ■

(g) Ha $a = 0$ és $b = 0$, akkor a kérdezett határérték 0. Ha $a = 0$ és $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, akkor a $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{b}{x^3-1}\right)$ határérték nem létezik (miért?). Ha $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ és $b = 0$, akkor a $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{a}{x-1}\right)$ határérték adódik, ami szintén nem létezik.

Tegyük fel, hogy a is és b is 0-tól különböző valós szám. Hozzunk közös nevezőre:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{x-1} - \frac{b}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{a(x^2+x+1)-b}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{a\cdot x^2 + a\cdot x + (a-b)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Itt a számlálónak $3a - b$, a nevezőnek pedig 0 a határértéke az 1 pontban, ezért a műveletekre vonatkozó tételünk nem használható.

Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: Ha $3a - b \neq 0$, akkor csak a jobb- és bal oldali határértékek léteznek, és ezek:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{a\cdot x^2 + a\cdot x + (a-b)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \operatorname{sign}(3a-b)(+\infty) \quad \text{(miért??)},$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{a\cdot x^2 + a\cdot x + (a-b)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \operatorname{sign}(3a-b)\cdot(-\infty) \quad \text{(miért??).}$$

Ezek különbözők, így a kérdezett határérték ebben az esetben nem létezik.

2. eset: Ha $3a-b=0$ akkor egy $\frac{0}{0}$típusú kritikus határérték adódik. A $b=3a$ helyettesítéssel kapott törtfüggvényt tudjuk egyszerűsíteni $(x-1)$-gyel:

$$\lim_{x\to 1} \frac{a\cdot x^2 + a\cdot x - 2a}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{a\cdot(x+2)}{x^2+x+1} = a.$$

Összefoglalva: a kérdezett határérték

$3a=b$ esetén a;

$3a\neq b$ esetén nem létezik. ■

(h) Az egész rész definíciója alapján

$$\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1 \qquad (x\in\mathbb{R},\quad x\neq 0).$$

Ha $x>0$, akkor x-szel szorozva, majd átrendezve kapjuk, hogy:

$$1-x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 \qquad (x>0).$$

A közrefogási elv értelmében a jobb oldali határérték létezik, és

$$\lim_{x\to 0+0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

Az $x<0$ esetben hasonló módon azt kapjuk, hogy:

$$1 \leq x\left[\frac{1}{x}\right] < 1-x \qquad (x<0).$$

Így a bal oldali határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to 0-0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

Mivel a bal- és a jobb oldali határértékek megegyeznek, ezért a kérdezett határérték is létezik, és 1-gyel egyenlő. ■

(i) A számláló tart 1-hez, a nevező pedig 0-hoz, ha $x\to 1$. $\frac{1}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. Most a jobb oldali határérték $+\infty$, a bal oldali pedig $-\infty$ (miért??), ezért a keresett határérték nem létezik. ■

M15. (a) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték. Gyöktelenítsük a számlálót, azaz bővítsük a törtet $(\sqrt{1+x}+1)$-gyel, majd egyszerűsítsünk x-szel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

(b) Az (a)-hoz hasonló módon járunk el, eredményül $\frac{1}{4}$ adódik. $\blacksquare$

(c) Vezessük be a $t := \sqrt[5]{1+5x}$ jelölést. Ekkor $t \to 1$, ha $x \to 0$, illetve $x = \frac{t^5-1}{5}$. Az új változóra áttérve azt kapjuk, hogy a következő határértéket kell kiszámolnunk:

$$\lim_{t\to 1}\frac{(t^5-1)^2}{-5t^5+25t-20}.$$

Látható, hogy a számlálónak és nevezőnek egyaránt zérushelye az 1, ezért $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. Mivel

$$\frac{(t^5-1)^2}{-5t^5+25t-20}=\frac{(t-1)^2(t^4+t^3+t^2+t+1)^2}{-5(t^5-5t+4)}=$$
$$=\frac{(t-1)^2(t^4+t^3+t^2+t+1)^2}{-5[(t^5-1)-5(t-1)]}=\frac{(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)^2}{-5[(t^4+t^3+t^2+t+1)-5]}=$$
$$\frac{(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)^2}{-5[(t^4-1)+(t^3-1)+(t^2-1)+(t-1)]}=$$
$$=\frac{(t^4+t^3+t^2+t+1)^2}{-5[(t^3+t^2+t+1)+(t^2+t+1)+(t+1)+1]},$$

ezért a keresett határérték $-\frac{1}{2}$ $\blacksquare$

(d) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték. Gyöktelenítsük a számlálót is és a nevezőt is. Egyszerűsítés után kapjuk, hogy:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}=1. \qquad \blacksquare$$

(e) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték.
1. megoldás: Vezessük be a $t := \sqrt[nm]{x}$ új változót. Nyilván $t \to 1$, ha $x \to 1$. Ekkor a következő ekvivalens határértéket kell számolnunk:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^n-1}{t^m-1}=\frac{n}{m}.$$

(lásd 14(e)).

2. megoldás: Gyöktelenítsük a számlálót is és a nevezőt is (felhasználva az $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})=a^n-b^n$ azonosságot), majd osztva $(x-1)$-gyel kapjuk, hogy:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}+\cdots+1}{(\sqrt[m]{x})^{m-1}+(\sqrt[m]{x})^{m-2}+\cdots+1}=\frac{n}{m}\qquad\blacksquare$$

(f) Az előző feladathoz hasonlóan kapjuk az $\dfrac{1}{n}$ végeredményt. ■

M16. Vegyük észre, hogy ha $a\le 0$, akkor az adott függvény határértéke: $+\infty$. Feltehető tehát, hogy $a>0$. Ekkor $(+\infty)-(+\infty)$-típusú kritikus határértékről van szó. Gyöktelenítés után azt kapjuk, hogy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)}.$$

Tegyük fel, hogy a számláló főegyütthatója (azaz $(1-a^2)$) nullától különböző. Ekkor x-szel elosztva a számlálót is és a nevezőt is azt kapjuk, hogy a tört határértéke $0<a<1$ esetén $+\infty$, $1<a$ esetén pedig $-\infty$.

Ha $a=1$, akkor a feladat a következő alakot ölti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-(2b+1)x+(1-b^2)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(2b+1)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{b}{x}}=\frac{-2b-1}{2},$$

ami $b=-\dfrac{1}{2}$ esetén lesz 0. Tehát ebben az esetben $a=1,\ b=-\dfrac{1}{2}$. ■

M17. (a) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték. Vegyük észre, hogy a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$-ből az is következik, hogy minden $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ esetén $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ is teljesül. Ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}.$$

Megjegyzés. A tett észrevétel így általánosítható: Ha a valós-valós f függvényre $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ teljesül, akkor $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$. (A bizonyítást érdemes meggondolni!) ■

(b) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték.

1. megoldás: Bővítsük a törtet $(1+\cos x)$-el

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

2. megoldás: A trigonometriából is ismert azonosságokat felhasználva írjuk át a számlálót $\frac{x}{2}$ segítségével:

$$1-\cos x=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Ekkor, a nevezőben is kialakítva $\frac{x}{2}$-t kapjuk, hogy :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

3. megoldás: Írjuk be a cos függvényt definiáló hatványsort, majd az összevonások után osszunk x^2-tel, végül hatványsorok határértékéről szóló tétel alapján vesszük a helyettesítési értéket:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}-\cdots}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{2!}-\frac{x}{3!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n-2}}{n!}-\cdots)=\frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

(c) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték. A számlálóban átírva $\operatorname{tg} x$-et ki tudunk emelni $\sin x$-et, majd közös nevezőre hozva, a következő alakra hozhatjuk a függvényt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}$$

Lásd a (b) feladatot. $\blacksquare$

(d) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték.

1. megoldás: Vezessük be a $h:=x-a$ jelölést. Nyilván $h\to 0$, ha $x\to a$. Az addíciós tételt felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin a\cos h+\cos a\sin h-\sin a}{h}.$$

Alakítsuk kifejezésünket úgy, hogy ismert határértékek alakuljanak ki, majd a műveleti szabályokat használva, adódik:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos a\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin a\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}\cdot h\right)=\cos a.$$

2. megoldás: Ismét a trigonometriából is ismert

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

szorzattá alakítási szabályt használva (érdemes ezt bebizonyítani, kiindulva az addíciós tételekből!), kapjuk, hogy:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}2\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\tfrac{x+a}{2}=\cos a.$$

3. megoldás: A (b) feladatnál látott módon írjuk be a $\sin x$, illetve $\sin a$ hatványsorát, majd a konvergens sorokra vonatkozó tétel értelmében vonjuk össze a két sort, és csoportosítsunk a megfelelő hatványok szerint:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x^{2n+1}-a^{2n+1})}{x-a}.$$

A számlálóban $x^{2n+1}-a^{2n+1}$-et szorzattá alakítva, majd egyszerűsítve $(x-a)$-val (figyeljük meg, hogy a számlálóban lévő sor első tagja is tartalmaz $(x-a)$-t!) kapjuk, hogy:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x^{2n}+x^{2n-1}a+\cdots+a^{2n})=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)a^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{(2n)!}a^{2n}=\cos a. \qquad \blacksquare$$

(e) Ebben az esetben $\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\to\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=0$ midőn $x\to\frac{\pi}{2}$, így a $\frac{0}{0}$ esettel van dolgunk.

1. megoldás: Alakítsuk át a nevezőt úgy, hogy áttérünk „félszögre” ($\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$), majd szorzattá alakítás és egyszerűsítés után kapjuk eredményül, hogy:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. megoldás: Végezzük el a $h := x - \dfrac{\pi}{2}$ helyettesítést. Ekkor $h \to 0$, ha $x \to \frac{\pi}{2}$. Átírás után az addíciós tételeket használva és összevonva a következő határértéket ki kell számolnunk:

$$\lim_{h\to 0} \sqrt{2} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin h}$$

Hasonlóan az (a) ponthoz kapjuk eredményül a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$-t. ■

(f) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték.

1. megoldás: Kialakítjuk az ismert $\frac{\sin(f(x))}{f(x)}$ alakot:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\dfrac{\sin 5x}{5x} - 3\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin x}{x}} = 2.$$

2. megoldás: Alakítsuk szorzattá a számlálót (lásd a (d) pontnál a szabályt). Kapjuk, hogy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos 4x}{\sin x} = 2.$$

3. megoldás: Itt is alkalmazható a hatványsorokra való átírás, majd egyszerűsítés után két konvergens hatványsor hányadosának határértéket számoljuk. ■

(g) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték. Gyöktelenítsük a nevezőt, majd osszuk el a számlálót is és a nevezőt is x^2-tel. Így a már megismert határértékeket tudjuk kialakítani:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x})}{1 + x\sin x - \cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{2}{1 + \dfrac{1}{2}} = \frac{4}{3}. \qquad ■$$

(h) A nevezőben $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$-et írva kapjuk, hogy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \frac{x - \sin x}{\sin x - x\cos x}.$$

A törtben írjuk be a sin, illetve a cos függvény hatványsorát:

$$\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{x-(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)}{(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)-x(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots}{(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)+(-x+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^5}{4!}+\cdots)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots}{(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})x^3+(\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!})x^5+\cdots}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}{(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+(\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!})x^2+\cdots}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}{(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+(\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!})x^2+\cdots}=1\cdot\frac{\frac{1}{3!}}{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}}=\frac{1}{2}.\quad\blacksquare$$

M18. (a) Feltehető, hogy $x>0$. Könnyen kialakíthatjuk a sejtést, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$$

Felhasználva az exp függvény definícióját azt kapjuk, hogy:

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}>x\quad(x>0),$$

és innen a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ definícióját használva megkapjuk állításunkat. $\blacksquare$

(b) Legyen $x=-y$. Ha $x\to-\infty$, akkor $y\to+\infty$, így

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=\lim_{y\to+\infty}e^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^y}=\frac{1}{+\infty}=0.\quad\blacksquare$$

(c) Írjuk be az e^x, az e^{-x}, illetve a $\sin x$ helyére hatványsoraikat, és használjuk a 18.(h) pontnál bemutatott módszert. A végeredmény: 2. $\blacksquare$

(d) Itt is alkalmazzuk a fenti módszert. A végeredmény: $\alpha-\beta$. $\blacksquare$

M19. A törtrész-függvény értelmezését használva, megadhatjuk ennek explicit alakját:

$$f(x) = \{x\} = \begin{cases} \dots \\ x-2, & \text{ha } 2 \le x < 3 \\ x-1, & \text{ha } 1 \le x < 2 \\ x, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ x+1, & \text{ha } -1 \le x < 0 \\ x+2, & \text{ha } -2 \le x < -1 \\ \dots \end{cases}$$

Ha $a \in (n, n+1)$ valamely $n \in \mathbb{Z}$ mellett, akkor

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x - n) = a - n.$$

Ha pedig $a := m \in \mathbb{Z}$ akkor, a bal oldali határértékre kapjuk, hogy:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to m-0} (x - m + 1) = 1,$$

és hasonló módon a jobb oldali határértékre, pedig:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to m+0} (x - m) = 0.$$

A fentiek alapján tehát $\nexists \lim\limits_{x \to m} f(x)$ $(\forall m \in \mathbb{Z})$. Még vizsgálnunk kell a $+\infty$ és $-\infty$ eseteket. Az átviteli elvet használva igazolható, hogy $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, például tekintsük az $(x_n) := (n + \frac{1}{2})$ illetve a $(z_n) := (n)$ sorozatokat. Hasonlóan $\nexists \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ sem.

(b) Az (a) pontnál látott módon járjunk el. Az adott függvény az egészrész-függvény. A végeredmény:

$$\forall\, m \in \mathbb{Z} \text{ és } \forall\, a \in (m, m+1) \text{ esetén } \lim_{x \to a} f(x) = m,$$

illetve $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ esetén:

$$\lim_{x \to m-0} f(x) = m - 1, \quad \text{és} \quad \lim_{x \to m+0} f(x) = m.$$

Tehát egész helyeken nincs határértéke f-nek, de léteznek a kétoldali határértékek. Azt mondjuk, hogy a függvénynek „ugrása van” ezen pontokban. (a)-hoz hasonlóan $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ illetve $\nexists \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ezért $\mathcal{D}'_f = \overline{\mathbb{R}}$. Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített. Használjuk az átviteli elvet. Vegyünk egy olyan $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ racionális tagú sorozatot, melyre $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, illetve egy olyan $(z_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ irracionális tagú sorozatot, melyre $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$. (Ilyen sorozatok léteznek. Miért?) Ekkor a konvergens sorozatoknál tanult műveleti szabályok értelmében a helyettesítési értékek sorozataira kapjuk, hogy:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (x_n^2) = a^2,$$

illetve

$$\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = \lim_{n\to+\infty} (-z_n^2) = -a^2.$$

Ha f-nek létezik a pontban határértéke, akkor az átviteli elv értelmében teljesülnie kell az $a^2 = -a^2$ feltételnek. Ez utóbbi csak $a = 0$ esetén teljesül. Ezek szerint

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{esetén} \quad \nexists \lim_{x\to a} f(x)$$

és

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

lehet csak. Ha most $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat, melyre $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = 0$, akkor könnyű meggondolni, hogy $f(v_n) \to 0 \quad (n \to +\infty)$ is teljesül.

A definíció szerint is könnyen igazolhatjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, hiszen

$$|f(x) - 0| = \begin{cases} |x^2 - 0|, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ |-x^2 - 0|, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

miatt tehát: $|f(x) - 0| = x^2 < \epsilon$, ha $0 < |x - 0| < \delta$, ahol $0 < \delta \le \sqrt{\epsilon}$.

Vizsgálnunk kell még a határértéket $+\infty$ és $-\infty$-ben. Ezek sem léteznek, ugyanis, ismét az átviteli elvet használva az

$$x_n := n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to+\infty} (x_n) = +\infty$$

sorozattal

$$f(x_n) = n^2 \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

illetve a

$$z_n := n\sqrt{2} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to+\infty} (z_n) = +\infty$$

irracionális sorozattal, pedig:

$$f(z_n) = -(z_n)^2 = -2n \to -\infty \quad (n \to +\infty).$$

Tehát $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Hasonló módon $\nexists \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ sem. Megjegyzés: érdemes vázlatot készíteni f grafikonjáról és megfigyelni, hogyan „jelentkeznek” a fent megállapított tulajdonságok!

(d) Használjuk ismét az átviteli elvet (lásd a (c) pont megoldását). A végeredmény: sehol sem létezik f-nek határértéke:

$$\nexists \lim_{x\to a} f(x) \quad (\forall a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}).$$

(e) Érdemes 1 picit vizsgálni a függvényt! Könnyen láthatjuk, hogy értékkészlete:

$$\mathcal{R}_f = \left\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\right\} \cup \{0\},$$

halmaz; illetve f periodikus és periódusa 1. Éppen ezért elég vizsgálni a kérdést a $[0,1]$ intervallumon illetve $+\infty$, $-\infty$-ben. Vegyük észre, hogy rögzített $n = 1, 2, 3, \cdots$ természetes szám esetén f véges sok helyen veszi fel az $\dfrac{1}{n}$ értéket a $[0,1]$ intervallumon, azaz

$$f^{-1}\left[\{\frac{1}{n}\}\right] = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid (m,n) = 1\right\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\},$$

ahol $k = k(n)$ jelöli az n-nél kisebb, hozzá relatív prím m-ek számát. Ha most $a \in [0,1]$ rögzített és $0 < \varepsilon \le 1$ adott (ez feltehető), akkor $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\frac{1}{n_0+1} < \epsilon \le \frac{1}{n_0}$. Világos, hogy $\dfrac{1}{n_0+1}$-nél nagyobb értéket f csak véges sok helyen vesz fel. Tehát az $A := \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n_0+1}\right\}$ jelöléssel $\exists\, s = s(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$f^{-1}[A] = \{x_1, x_2, \cdots, x_s\}.$$

Ha most a-nak olyan környezetét választjuk, melybe nem „esik” bele egyetlen elem sem a fenti véges halmazból, akkor a megfelelő függvényértékek az adott ε „alatt maradnak”. Pontosítva: legyen $\delta := \min\{|a - x_i| \mid i = 1, \ldots, s, x_i \ne a\} > 0$. Ekkor $\forall\, x : 0 < |x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - 0| < \varepsilon$, és ez definíció alapján azt jelenti, hogy

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad (\forall a \in [0,1]).$$

Az átviteli elvet használva adódik, hogy

$$\nexists \lim_{x\to a} f(x) \quad (a \in \{+\infty, -\infty\}).$$

(Tekinstük például az (n); $(n\sqrt{2})$ sorozatokat az $a = +\infty$ esethez és ezek (-1)-szeresét az $a = -\infty$ esethez.)

Megjegyzés. A definíció alapján könnyen megállapíthatjuk a Riemann függvényről, hogy páros, periodikus és periódusa 1. Ezért a vizsgálat során elég a $[0, 1]$ intervalumon „szemlélteni"; ott is elég a racionális pontokra szorítkoznunk, hiszen irracionális helyeken 0 a függvény értéke. A továbbiakban a racionális x-ekhez tarozó $(x, f(x))$ síkbeli pontokra úgy hivatkozunk, mint *Riemann-pontok*. Érdekes, hogy megadható egy viszonylag egyszerű algoritmus, amivel a fent említett Riemann-pontok pontosan szerkeszthetők. Bármely Riemann-pont és az x tengelyre eső vetülete egy az y tengellyel párhuzamos egyenest határoz meg, így az ilyen egyenesek egymással is párhuzamosak. Ennek megfelelően bármely két Riemann-pont az x koordinátákkal egy-egy trapézt feszítenek ki. A legnagyobb ilyen trapéz az egységnégyzet; a $(0, 1)$ illetve az $(1, 1)$ Riemann-pontok által meghatározott négyzet $(f(0) = 1)$. E négyzet átlóinak metszéspontja, azaz az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pont is Riemann-pont. Alkalmazzuk ismét az eljárást a most kapott pont illetve ennek a közvetlen ősei által kifeszített trapézokra. Ezek átlóinak metszéspontjai $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ illetve $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ismét Riemann-pontok. Folytatva a fenti algoritmust az új pontok és közvetlen őseik által meghatározott 4 trapézra újabb 4 Riemann-pontot tudunk előállítani. Igazolható, hogy a fenti eljárással minden Riemann-pont előállítható (pontosan egyszer), és csak ezek a pontok „keletkeznek" az iterációval. ■

2. Függvények folytonossága

2.1. Topológiai fogalmak $\mathbb{K}$-ban

2.2. A pontbeli folytonosság fogalma

M27. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *nem* folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban pontosan akkor, ha

$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall\, \delta \in \mathbb{R}^+$ esetén $\exists\, x \in \mathcal{D}_f$, $|x-a| < \delta$, amelyre $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

■

M28. Nem. A feladatban megfogalmazott tulajdonság azt jelenti, hogy az f függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pont egy δ-sugarú környezetében állandó. Minden ilyen függvény persze folytonos a-ban, de van olyan folytonos függvény, amelyre ez a tulajdonság nem teljesül. Egy triviális példa erre az $f(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény és az $a = 0$ pont. ■

M29. Mivel f folytonos $a \in \mathcal{D}_f$-ben, ezért $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$ és $|x-a| < \delta$ esetén $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Legyen most $\varepsilon := \frac{f(a)}{2}$. Mivel $f(a) > 0$, ezért ez a választás megengedett. A definíció szerint ehhez az ε-hoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$, $|x-a| < \delta$ esetén $|f(x)-f(a)| < \frac{f(a)}{2}$ $\iff -\frac{f(a)}{2} < f(x)-f(a) < \frac{f(a)}{2} \iff 0 < \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$. ■

M30. Igen. Mivel $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$, ezért az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos a 0 pontban. ■

M31. (a) Könnyű szemléletes képet alkotni a függvényről. Ebből azt a *sejtést* alakíthatjuk ki, hogy a függvény az értelmezési tartományának egyetlen pontjában sem folytonos. A *bizonyítás:* Legyen $a \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Azt kell igazolni, hogy

$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall\, \delta \in \mathbb{R}^+$ számhoz $\exists\, x \in \mathcal{D}_f$, $|x-a| < \delta$, amelyre $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$.

Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{Q}$. Ekkor $f(a) = 1$. Legyen (például) $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Mivel minden intervallum tartalmaz irracionális számot, ezért $\forall\, \delta \in \mathbb{R}^+$ számhoz $\exists\, x \in \mathbb{Q}^*$, hogy $|x-a| < \delta$. Ebben az x pontban

$$|f(x)-f(a)| = |-1-1| = 2 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

teljesül, így f nem folytonos a-ban. A bizonyítás $a \in \mathbb{Q}^*$ esetén is hasonló. ■

(b) Most is a függvény képéből kiindulva alakíthatjuk ki azt a *sejtést*, hogy f csak az $a = 0$ pontban folytonos.

A *bizonyítás:* Legyen $a = 0$. Ekkor $f(a) = f(0) = 0$. Az a-beli folytonossághoz tehát azt kell igazolni, hogy

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ számhoz } \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } \forall\, x \in \mathbb{R}, |x| < \delta \text{ esetén } |f(x)| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ egy rögzített szám. Ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor $|f(x)| = 0 < \varepsilon$ minden $\delta \in \mathbb{R}^+$ mellett igaz. Ha $x \in \mathbb{Q}^*$, akkor $|f(x)| = |x| < \varepsilon$ teljesül, ha $0 < \delta \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén a $\delta := \varepsilon$ választás biztosítja a 0-beli folytonosság definíciójában megadott követelmény teljesülését, azaz $f \in C\{0\}$ valóban fennáll.

Az a tény, hogy f nem folytonos az $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontban az (a) részben mutatott módon igazolható. Egy másik lehetőség az átviteli elv alkalmazása. ■

M32. Az előző feladat alapján könnyű megadni ilyen függvényt. Legyen például:

$$f(x) := \begin{cases} 4, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^*. \end{cases}$$

Ez a függvény csak az $a = 4$ pontban folytonos. ■

2.3. Függvények folytonosságának a vizsgálata

M33. (a) Mivel $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, ezért 2 és 5 a nevező zérushelye. Racionális törtfüggvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, ezért f az $\mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$ halmaz minden pontjában folytonos. A további vizsgálatokhoz alakítsuk át a hozzárendelési utasítást:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5} = 1 + \frac{2}{x-5} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}).$$

Legyen $a = 2$. A fentiek alapján

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{1}{3} \neq f(2) = 0,$$

ezért az $a = 2$ pont az f függvénynek *megszüntethető szakadási helye.*

Legyen most $a = 5$. Ekkor

$$\lim_{x \to 5-0} f(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 5+0} f(x) = +\infty \qquad \text{(miért?)},$$

ami azt jelenti, hogy az $a = 5$ pont az f függvénynek *másodfajú szakadási helye.* ■

(b) $f \in C\{a\}$ minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ esetén (racionális törtfüggvény). A definíció alapján igazolható, hogy $\lim\limits_{x\to-1} f = +\infty$, és ez azt jelenti, hogy az $a = -1$ pont az f függvénynek *másodfajú szakadási helye.* ■

(c) $f \in C\{a\}$ minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ esetén. Mivel

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4,$$

ezért $\alpha = 4$ esetén f folytonos az $a = 2$ pontban is. Ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, akkor az $a = 2$ pont az f függvénynek *megszüntethető szakadási helye.* ■

(d) $f \in C\{a\}$ minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén. Mivel $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$, az $a = 0$ pont az f függvénynek *megszüntethető szakadási helye.* ■

(e) $f \in C\{a\}$ minden $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ esetén. A 0 pontbeli folytonosság vizsgálatához először vegyük észre azt, hogy

$$\begin{aligned} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \\ = x\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots > 0, \end{aligned}$$

ha $0 < x < \sqrt{6}$. Mivel a sin függvény páratlan, ezért $\sin x < 0$, ha $-\sqrt{6} < x < 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{ha } \ 0 < |x| < \sqrt{6}.$$

Így $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ miatt $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$ is igaz, ami azt jelenti, hogy f az $a = 0$ pontban is folytonos. ■

M34. (a) Az f függvény minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pontban folytonos. Az $a = 1$ pontban létezik a jobb oldali- és a bal oldali határérték is, és

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1+0} f(x) &= \lim_{x\to 1+0}(-x+3) = 2, \\ \lim_{x\to 1-0} f(x) &= \lim_{x\to 1-0}(\alpha x^2 + 4x - 1) = \alpha + 3, \end{aligned}$$

ezért ebben az esetben a függvény akkor és csak akkor folytonos, ha ezek a határértékek megegyeznek, azaz pontosan akkor, ha $\alpha = 1$. ■

(c) Az elemi függvények folytonosságára, valamint a folytonosság és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételünkből következik, hogy az f függvény folytonos a $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontokban. Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (-2x + \alpha) = \alpha.$$

Mivel

$$\lim_{x \to 0+0} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty,$$

ezért

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{e^{x + \frac{1}{x}}} = 0.$$

A függvény a 0 pontban akkor és csak akkor folytonos, ha a bal- és a jobb oldali határértékek megegyeznek, azaz pontosan akkor, ha $\alpha = 0$. ■

M35. Az **19.**(e) feladat megoldásában igazoltuk, hogy a Riemann-függvénynek minden valós helyen 0 a határértéke. Mivel irracionális pontokban a függvényérték 0, ezért ezeken a helyeken a függvény folytonos. Racionális pontokban a függvényértékek 0-tól különbözők, ezért ezeken a helyeken a függvénynek elsőfajú szakadása van. ■

M36. Alkalmazza az átviteli elvet. ■

M37. Legyen az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény például monoton növekedő. Tudjuk, hogy ennek minden $x \in (a, b)$ pontban létezik az $f(x - 0)$ bal oldali- és az $f(x + 0)$ jobb oldali határértéke. Jelöljük H-val az f szakadási helyeinek a halmazát. Ekkor $x_0 \in H$ esetén $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$ és minden $x, y \in H, x \neq y$ esetén

$$\big(f(x - 0), f(x + 0)\big) \cap \big(f(y - 0), f(y + 0)\big) = \emptyset.$$

Így létezik olyan g invertálható függvény, amelynek értelmezési tartománya H és értékkészlete $\mathbb{Q}$ egy részhalmaza. (Minden $x \in H$ esetén legyen $g(x)$ egy olyan racionális szám, amely eleme az $\big(f(x - 0), f(x + 0)\big)$ intervallumnak.) Ebből következik, hogy H legfeljebb megszámlálható, és így f szakadási helyeinek a halmaza is legfeljebb megszámlálható. ■

M38. Egy nem triviális példa a következő: Legyen $H := (0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Tudjuk, hogy H megszámlálható, ezért létezik $\mathbb{N} \to H$ bijekció. Jelöljön (r_n) egy ilyen bijekciót. (A $(0, 1)$-beli racionális számokat sorozatba rendezzük.) Vegyünk egy tetszőleges pozitív tagú $\sum\limits_{n=1} a_n$ sort, és tekintsük a következő függvényt:

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{r_n \leq x} a_n,$$

ahol az összegzést úgy kell érteni, hogy a $\sum a_n$ sor olyan indexű tagjait adjuk össze, amelyekre az (r_n) sorozatban $r_n \le x$ teljesül.

Könnyen belátható, hogy f monoton növekedő, H minden pontjában f-nek elsőfajú szakadása van (az $x = r_n$ pontban az ugrása $f(r_n+0)-f(r_n-0) = a_n$) és a $(0,1)$ irracionális pontjaiban a függvény folytonos. ■

M39. (a) Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} \\ -1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

és $g := -f$. Ezek a függvények az értelmezési tartományuk egyetlen pontjában sem folytonosak (mindegyik pont másodfajú szakadási hely), ugyanakkor az $f+g, fg, f/g$ és f^2 függvény mindegyike mindenütt folytonos. ■

(b) Ha az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban f folytonos és g-nek szakadása van, akkor az $f+g$ függvénynek is szakadása van az a pontban. Az ellenkező esetben ui. az $(f+g)-f = g$ függvény is folytonos lenne a-ban.

Az fg lehet folytonos a-ban. Legyen például $f(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$,

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

és $a := 0$. ■

M40. Mutassa meg, hogy f invertálható, $\mathcal{R}_f = (-\infty,-1) \cup \{0\} \cup (1,+\infty)$ és

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-1}, & \text{ha } y \in (1,+\infty), \\ 0, & \text{ha } y = 0 \\ -\sqrt{-y-1}, & \text{ha } y \in (-\infty,-1). \end{cases}$$

Ez a függvény mindenütt folytonos. ■

2.4. Kompakt halmazon folytonos függvények

M41. Legyen $p(x) := \alpha_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots + \alpha_0$ $(x \in \mathbb{R})$ egy páratlan fokszámú valós együtthatós polinom, és tegyük fel, hogy $\alpha_{2n+1} > 0$. Ekkor

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty. \qquad \text{(Miért?)}$$

Ezért léteznek olyan $x_1 < 0 < x_2$ számok, amelyekre $p(x_1) < 0 < p(x_2)$ teljesül. A p függvény folytonos az $[x_1,x_2]$ intervallumon (is), ezért Bolzano tételéből következik, hogy van olyan $\xi \in [x_1,x_2] \subset \mathbb{R}$ pont, amelyre $p(\xi) = 0$. ■

M42. (b) Tekintsük az $f(x) := e^x - 2 + x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. $f(0) = -1$ és $f(1) = e-1 > 0$. Mivel f folytonos $\mathbb{R}$-en, ezért folytonos a $[0,1]$ intervallumon is, így Bolzano tétele alapján van olyan $\xi \in (0,1)$ pont, amelyre $f(\xi) = 0$, azaz $e^\xi = 2 - \xi$ teljesül. ■

M43. (b) Legyen $p(x) := x^3 + 2x^2 + 4x - 3$ $(x \in \mathbb{R})$. Mivel $p(0) = -3$ és $p(1) = 4$, továbbá p folytonos a $[0,1]$ intervallumon (ui. p polinom lévén folytonos $\mathbb{R}$-en), ezért a Bolzano-tétel alapján a polinomnak van gyöke a $(0,1)$ intervallumon. A gyök egyértelműségét belátjuk, ha igazoljuk azt, hogy p szigorúan monoton $(0,1)$-en. Legyen $0 < x < y$. Ekkor

$$\begin{aligned} p(y) - p(x) &= y^3 - x^3 + 2(y^2 - x^2) + 4(y - x) = \\ &= (y - x)(y^2 + xy + x^2 + 2x + 2y + 4) > 0, \end{aligned}$$

és ez azt jelenti, hogy p szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}^+$-on, tehát ezen a halmazon p-nek pontosan egy gyöke van. Jelöljük ezt ξ-vel.

A $\xi \in [0,1] =: [x_0, y_0]$ gyök közelítő meghatározásához a *Bolzano-féle felezési eljárást* használjuk. Világos, hogy

$$|\xi - c_0| < \frac{1}{2} = 0.5, \qquad \text{ahol } c_0 := \frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mivel $p(c_0) = p(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} < 0$ és $p(y_0) = p(1) > 0$, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\xi \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big] = [c_0, y_0] =: [x_1, y_1],$$

így

$$|\xi - c_1| < \frac{1}{4} = 0.25, \qquad \text{ahol } c_1 := \frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Most $p(c_1) = p(\frac{3}{4}) = \frac{99}{64} > 0$ és $p(x_1) = p(\frac{1}{2}) < 0$, ezért

$$\xi \in \Big[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\Big] = [x_1, c_1] =: [x_2, y_2],$$

így

$$|\xi - c_2| < \frac{1}{8} = 0.125, \qquad \text{ahol } c_2 := \frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}.$$

Mivel $p(c_2) = p(\frac{5}{8}) = \frac{269}{512} > 0$ és $p(x_2) = p(\frac{1}{2}) < 0$, ezért

$$\xi \in \Big[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\Big] = [x_2, c_2] =: [x_3, y_3],$$

tehát

$$|\xi - c_3| < \frac{1}{16} = 0.0625, \qquad \text{ahol } c_3 := \frac{x_3 + y_3}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{8}}{2} = \frac{9}{16}.$$

A további számolások: $p(c_3) = p(\frac{9}{16}) = \frac{249}{4096} > 0$ és $p(x_3) = p(\frac{1}{2}) < 0$, ezért

$$\xi \in \left[\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right] = [x_3, c_3] =: [x_4, y_4],$$

tehát

$$|\xi - c_4| < \frac{1}{32} = 0.03125, \qquad \text{ahol } c_4 := \frac{x_4 + y_4}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{16}}{2} = \frac{17}{32}.$$

$p(c_4) = p(\frac{17}{32}) = -\frac{5263}{32768} < 0$ és $p(y_4) = p(\frac{9}{16}) > 0$, ezért

$$\xi \in \left[\frac{17}{32}, \frac{9}{16}\right] = [c_4, y_4] =: [x_5, y_5],$$

tehát

$$|\xi - c_5| < \frac{1}{64} = 0.015625, \qquad \text{ahol } c_5 := \frac{x_5 + y_5}{2} = \frac{\frac{17}{32} + \frac{9}{16}}{2} = \frac{35}{64}.$$

$p(c_5) = p(\frac{35}{64}) = -\frac{13317}{262144} < 0$ és $p(y_5) = p(\frac{9}{16}) > 0$, ezért

$$\xi \in \left[\frac{35}{64}, \frac{9}{16}\right] = [c_5, y_5] =: [x_6, y_6],$$

tehát

$$|\xi - c_6| < \frac{1}{128} = 0.0078125 < 0.01 \qquad \text{ahol } c_6 := \frac{x_6 + y_6}{2} = \frac{\frac{35}{64} + \frac{9}{16}}{2} = \frac{71}{128}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $c_6 = \frac{71}{128} = 0.554688$ szám már 10^{-2}-nél közelebb van a ξ gyökhöz.

Megjegyzés. A Bolzano-féle felezési eljárás tehát egy igen *egyszerű* módszer függvény zérushelyének (egyenlet gyökének) közelítő meghatározására. Ez a példa is illusztrálja azonban azt, hogy nagy pontosság elérésének nagy lehet a műveletigénye. Később majd ennél jóval „hatékonyabb” módszereket is meg fognak ismerni.

Az is „érzékelhető”, hogy ez az eljárás viszonylag egyszerűen „algoritmizálható”. *Írjon programot a Bolzano-féle felezési eljárásra!!!* ■

M44. Az állítás egyszerűen következik a Bolzano-tételből és abból, hogy

$$\min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \le$$
$$\le \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}. \quad ■$$

M45. Alkalmazza a Bolzano-tételt a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x$ függvényre. ■

M46. Az f függvény folytonos (például) a $[-1, 1]$ kompakt intervallumon, ezért a Weierstrass-tétel alapján f-nek ezen a halmazon van maximuma is és minimuma is, azaz $\exists\, x_m, x_M \in [-1, 1]$ pont, hogy

$$f(x) \le f(x_M) =: M \quad \text{és} \quad f(x) \ge f(x_m) =: m \quad \forall\, x \in [-1, 1] \text{ esetén.} \qquad (*)$$

Vegyünk egy $P > M$ valós számot. Mivel $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, ezért ehhez a P-hez

$$\exists\, x_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{hogy} \quad f(x) > P \quad \forall\, x \ge x_1 \quad \text{pontban.} \qquad (**)$$

De $P > M$, ezért $(*)$ alapján $x_1 > 1$ is igaz. Azonban $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ is fennáll, ezért

$$\exists\, x_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{hogy} \quad f(x) > P \quad \forall\, x \le x_2 \quad \text{esetén és } x_2 < -1. \qquad (***)$$

Az f függvény az $[x_2, x_1]$ kompakt intervallumon is folytonos, ezért ezen a halmazon is van minimuma, azaz $\exists\, x^* \in [x_2, x_1]$, amelyre $f(x) \ge f(x^*)$ teljesül $\forall\, x \in [x_2, x_1]$ esetén. Az $[x_2, x_1]$ intervallum tartalmazza a $[-1, 1]$ intervallumot, ezért $[x_2, x_1]$-en felvett minimum nem lehet nagyobb a $[-1, 1]$-beli minimumnál, azaz $f(x^*) \le m$. Így $(**)$ és $(***)$ alapján

$$f(x) > P > M \ge m \ge f(x^*), \quad \text{ha} \quad x \le x_2 \text{ vagy } x \ge x_1.$$

A fentieket összefoglalva azt kapjuk, hogy az $f(x) \ge f(x^*)$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ pontban teljesül, ami azt jelenti, hogy az f függvénynek valóban van minimuma. ■

2.5. Egyenletes folytonosság

M47. (a) Mivel

$$|x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \le 2|x - y| < \varepsilon,$$

ha $x, y \in [0, 1]$ és $|x - y| < \delta := \frac{\varepsilon}{2}$, ezért a függvény egyenletesen folytonos az $[0, 1]$ intervallumon.■

(b) Megmutatjuk, hogy f nem egyenletesen folytonos az $[1, +\infty)$ halmazon, azaz van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $\delta \in \mathbb{R}^+$ esetén léteznek olyan $x, y \in [1, +\infty)$ számok, amelyekre $|x - y| < \delta$ és $|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$. Legyen például $\varepsilon := 1$ és $\delta \in \mathbb{R}^+$ adott. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $n > \frac{1}{\delta}$. Ha $x := n + \frac{1}{n}$ és $y := n$, akkor

$$|x - y| = \frac{1}{n} < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - f(y)| = |(n + \frac{1}{n})^2 - n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} > \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy az f függvény nem egyenletesen folytonos az $[1,+\infty)$ intervallumon. ■

(c) Mivel

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{2} < \varepsilon,$$

ha $x, y \in [1,+\infty)$ és $|x-y| < \delta := 2\varepsilon$, ezért a függvény egyenletesen folytonos az $[1,+\infty)$ intervallumon. ■

(d) Mivel minden $x, y \in (0,+\infty)$ esetén

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{|x-y|}\cdot\frac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq$$

$$\leq \sqrt{|x-y|}\cdot\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \sqrt{|x-y|}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{|x-y|},$$

ezért tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x, y \in [0,+\infty) \text{ és } |x-y| < \delta := \varepsilon^2,$$

ami azt jelenti, hogy f egyenletesen folytonos a $[0,+\infty)$ intervallumon. ■

(e) Mivel

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|xy|} < |x-y| < \varepsilon,$$

ha $x, y \in [1,+\infty)$ és $|x-y| < \delta := \varepsilon$, ezért a függvény egyenletesen folytonos az $[1,+\infty)$ intervallumon.■

(f) Megmutatjuk, hogy f nem egyenletesen folytonos a $(0,1)$ intervallumon, azaz van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $\delta \in \mathbb{R}^+$ esetén léteznek olyan $x, y \in (0,1)$ számok, amelyekre $|x-y| < \delta$ és $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$. Legyen például $\varepsilon := 1$ és $\delta \in \mathbb{R}^+$ adott. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $n > \frac{1}{\delta}$. Ha $x := \frac{1}{n}$ és $y := \frac{1}{n+1}$, akkor $x, y \in (0,1)$ és

$$|x-y| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta \quad \text{és} \quad |f(x)-f(y)| = 1 \geq \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy az f függvény nem egyenletesen folytonos a $(0,1)$ intervallumon. ■

M48. (a) Legyen

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in (0,1) \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ \sin 1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ és $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = \sin 1$, ezért $\tilde{f}$ folytonos a $[0,1]$ kompakt halmazon. Heine tétele alapján $\tilde{f}$ egyenletesen is folytonos $[0,1]$-en, de akkor egyenletesen folytonos a $(0,1)$ intervallumon is. Ezen a halmazon az f függvény egyenlő $\tilde{f}$-fel, tehát f is egyenletesen folytonos a $(0,1)$ intervallumon. ■

M49. *Az összegre vonatkozó állítás igazolása:* Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőlegesen rögzített szám. f és g egyenletes folytonossága miatt az $\varepsilon/2$ számhoz léteznek olyan $\delta_1, \delta_2 > 0$ valós számok, hogy

$$x, y \in A, \quad |x-y| < \delta_1, \quad \text{illetve} \quad |x-y| < \delta_2$$

esetén

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{illetve} \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor minden $x, y \in A$, $|x-y| < \delta$ esetén

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \le |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy az $f+g$ függvény egyenletesen folytonos az A halmazon.

Két egyenletesen folytonos függvény szorzata lehet nem egyenletesen folytonos is. Ha például $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := g(x) := x$, akkor f és g egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en (miért?), de fg nem egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en (miért?). ■

M50. Az állítás az

$$|(fg)(x) - (fg)(y)| \le |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)|$$

egyenlőtlenség felhasználásával igazolható. ■

M51. ...

M52. ...

M53. Azt kell igazolni, hogy

$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall\, x, y \in \mathcal{D}_f$, $|x-y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Rögzítsük az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel $\lim\limits_{+\infty} f =: A$ véges, ezért

$$\frac{\varepsilon}{2}\text{-hez } \exists\, x_0 > 0, \text{ hogy } \forall\, x \in [x_0, +\infty) \text{ esetén } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebből persze az is következik, hogy

$$\forall\, x, y \in [x_0, +\infty) \text{ esetén } |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

ui. $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Az f függvény folytonos a $[0, x_0]$ kompakt intervallumon, ezért Heine tétele szerint f egyenletesen folytonos ezen a halmazon, azaz

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0\text{-hoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\, x, y \in [0, x_0] \text{ esetén } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha (például) $x \in [0, x_0], y \in [x_0, +\infty)$ és $|x - y| < \delta$, akkor a fentiek

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Az állítást tehát bebizonyítottuk. ■