11. A Lagrange interpoláció és hibája

Az interpoláció a függvény közelítések olyan módja, ahol azt írjuk elő, hogy az interpoláló függvény a közelíteni kívánt függvény értékét vegye fel a megadott helyeken. Az interpoláció alappontjait gyűjtsük az $\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ halmazba, ahol az x_i-k nem szükségképpen rendezettek. A tulajdonságokat az $[a,b]$ intervallumban fogjuk vizsgálni. Sokszor $[a,b] = [\min_i x_i, \max_i x_i]$, de az is lehetséges, hogy minden alappont $[a,b]$ belső pontja.

11.1. Interpoláló függvény lineáris paraméterekkel

Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, az $x_k \in \mathbb{R},\ \ k = 0,1,...,n$ pontokban ismerjük az $f(x)$ függvény értékeit. Az interpoláció alkalmával eljárhatunk úgy, hogy felveszünk egy

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{11.1}$$

alakú próbafüggvényt, ahol az a_i paraméterek meghatározandók az

$$f(x_i) = \Phi(x_i), \ \ i = 0,...,n \tag{11.2}$$

feltételekből. Az (1.1)-ben szereplő $\varphi_i(x)$ függvények lehetnek például hatványfüggvények, $\varphi_i(x) = x^i$, amivel interpolációs polinomhoz jutunk, de választhatunk más függvényeket: $\varphi_i(x) = \sin(i\omega x),\ \ \varphi_i(x) = \cos(i\omega x),\ \ \varphi_i(x) = \exp(i\omega x).$ Ha $n = 2$, az (1.2) interpolációs feladat a következő lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

Látjuk tehát, hogyha a függvények lineáris kombinációját vesszük, akkor az interpolációs feladat lineáris egyenletrendszerre vezet. A feladat egyértelműen megoldható, ha a kapott rendszer együtthatómátrixának van inverze.

11.2. Polinom-interpoláció

Ekkor a $\varphi_i(x) = x^i$ választással az (1.2) rendszerben az együtthatómátrix a Vandermonde mátrix transzponáltja,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \tag{11.4}$$

amiről tudjuk, hogy determinánsa nemzérus, ha az x_i alappontok különbözők. Következik, hogy az egyváltozós polinom-interpoláció feladata különböző alappontokra egyértelműen megoldható.

11.3. Interpoláció Lagrange-alappolinomokkal

Az Ω_n-ben szereplő alappontokhoz rendeljük a kövekező polinomot:

$$\omega_n(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j). \tag{11.5}$$

Ez $n+1$-edfokú és az alappontokon eltűnik. Segítségével könnyen bevezethetünk egy olyan n-edfokú Lagrange-alappolinomot, amely minden alappontban zérust ad, egyet kivéve, - legyen ez az i-edik, és e helyen az értéke legyen 1:

$$l_i(x)=\frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\prod\limits_{j=0,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)}=\frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}=\prod_{j=0,\,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{11.6}$$

Itt az $(x-x_i)$ tényezővel azért osztottunk, hogy az (1.5) szorzatból kihagyjuk, és a produktum a nevezőben azért szerepel, hogy $l_i(x_i)=1$ legyen. Ha most (1.1)-ben $\varphi_i(x)=l_i(x)$, akkor az interpolációs feladat együtthatómátrixa az E egységmátrix, mert $l_i(x_j)=\delta_{ij}$ - ahol δ_{ij} a Kronecker delta. Innen adódik:

$$a_i=f(x_i), \tag{11.7}$$

és a Lagrange-interpoláció polinomja:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)l_i(x). \tag{11.8}$$

Ekkor a Lagrange-alappolinomok tulajdonsága alapján $L_n(x_i)=f(x_i)$.

11.3.1 Tétel. Az interpoláció hibája.

Legyen az interpolált függvény legalább $n+1$-szer differenciálható az $[a,b]$ intervallumon: $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$, ahol az alappontok az $[a,b]$-ben vannak . Akkor $\forall x\in[a,b]$ esetén $\exists\xi_x\in[a,b]$, melyre

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x), \tag{11.9}$$

továbbá

$$|f(x)-L_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|, \tag{11.10}$$

ahol $M_k\le\left\|f^{(k)}\right\|_\infty=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(k)}(x)\right|$.

Bizonyítás. Ha $x\in\Omega_n$, akkor (1.9) mindkét oldala zérus és az egyenlőség fennáll. A továbbiakban tegyük fel, $x\notin\Omega_n$ és vezessük be a

$$g_x(z)=f(z)-L_n(z)-\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(x)}(f(x)-L_n(x)),\ \ z\in[a,b] \tag{11.11}$$

függvényt. Szintén teljesül $g_x(z)\in C^{n+1}[a,b]$ és $g_x(z)=0,\ z\in\Omega_n$, de ezen felül $z=x$ is zérushely, így összesen $n+2$ db zérus van. A zérushelyek között többszörösen alkalmazva a Rolle-tételt, az $(n+1)$-edik deriválás után kapjuk: $\exists\xi_x\in[a,b]$, amelyre

$$g_x^{(n+1)}(\xi_x)=0=f^{(n+1)}(\xi_x)-0-\frac{(n+1)!}{\omega_n(x)}(f(x)-L_n(x))$$

és innen rendezéssel kapjuk (1.9)-et. A második állítás úgy adódik, hogy mindkét oladolon vesszük az abszolút értéket és az $(n+1)$-edik deriváltat felülről becsüljük az $[a,b]$ intervallumban. ■

Megjegyzés. Rolle tétele szerint, ha $f(a)=f(b)=0$ és $[a,b]$-ben f deriválható, akkor $[a,b]$-ben van egy olyan pont, ahol a függvény deriváltja zérus. E tétel egyszerű következménye a Lagrange középérték-tételnek és akkor is igaz, ha $f(a)=f(b)$. Hasonlóan (1.10)-hez, az $(n+1)$-edik derivált abszolút érték minimumával az alsó becslés is elkészíthető.

11.4. Példa

Az $\Omega_n=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ alappontokon adott y_i értékek egy n-edfokú $p_n(x)$ polinom értékei. Mutassuk meg, hogy ezen pontokra készített $L_n(x)$ interpolációs polinomra $L_n(x)=p_n(x)$.

Megoldás. Vizsgáljuk meg az interpoláció hibáját:

$$p_n(x)-L_n(x)=\frac{p_n^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x)=0,$$

mert az n-edfokú polinom $(n+1)$-edik deriváltja mindenütt zérus.

11.5. Feladatok

1. Egy függvény 3 pontban adott: (-1,-1), (1,1), (2,3). Készítsük el a Lagrange-alappolinomokat és azt az $L_2(x)$ polinomot, mely áthalad e pontokon.

2. Az $f(x)=(x+1)^{-2}$ függvényt a [0,1] intervallumban interpoláljuk az $\Omega=\{0, 0.2, \ 0.5, 0.8, 1\}$ alappontokon. Becsüljük meg az $\left|f(x)-L_4(x)\right|$ hibát az $x=0.4$ helyen!

3. Lássuk be: $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x)=x^k$, ha $k\le n$.

4. Igazoljuk: $x^{n+1}-\sum_{j=0}^{n} x_j^{n+1} l_j(x)=\omega_n(x)$.

12. A polinom-interpoláció tulajdonságai

Természetesen adódik a kérdés: Pontosabb az interpoláció közelítése, ha növeljük a polinom fokszámát? Ekkor konvergál-e a polinom a függvényhez? A válasz nem mindig igenlő, de van eset, amikor az.

12.1. Tétel, egyenletes konvergencia

Legyen $f \in C^{\infty}[a,b]$ és legyen $x_k^{(n)},\ k=0,1,\dots,n;\ n=0,1,2,\dots$ az $[a,b]$ intervallumot kifeszítő alappontrendszerek egy sorozata. Jelölje $L_n(x)$ az $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ alappontrendszerre illesztett Lagrange interpolációs polinomot, $n=0,1,2,\dots$ Ha $\exists M>0$ úgy, hogy $M_n \le M^n$ $\forall n$-re, akkor az L_n interpolációs polinomok sorozata egyenletesen konvergál az $f(x)$ függvényhez.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az egész intervallumra érvényes hibakorlátot, majd becsüljük felülről az $\|\omega_n\|_\infty$ normát:

$$|f(x)-L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\omega_n\|_\infty \le \frac{M^{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{[M(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!}.$$

A nevezőben lévő faktoriális függvény a hatványfüggvénynél gyorsabban tart ∞-hez, emiatt a jobb oldal zérushoz tart, így igaz az egyenletes konvergencia:

$$\|f-L_n\|_\infty \to 0,$$

ami azt jelenti, hogy a két függvény maximális abszolút eltérése zérushoz tart. ■

12.2. Lemma

Rendezzük nagyság szerint az alappontokat: $x_{k-1} < x_k$ és legyen $h = \max\limits_{k=1,2,\dots,n} |x_k - x_{k-1}|$. Ekkor $|\omega_n(x)|$-re a következő becslés adható:

$$|\omega_n(x)| \le \frac{n!}{4} h^{n+1}, \quad x \in [a,b]. \tag{12.1}$$

Bizonyítás. Átvizsgáljuk az egyes intervallumokat. Először legyen $x \in [x_0, x_1]$. Ekkor deriválva és x értékét a maximum helyen véve kapjuk: $|(x-x_0)(x-x_1)| \le h^2/4$. Tovább felhasználva adódik:

$$|\omega_n(x)| \le (h^2/4)(2h)(3h)\dots(nh) = \frac{h^{n+1}n!}{4}.$$

Másodszor legyen $x \in [x_1, x_2]$. Hasonlóan kapjuk:

$$|\omega_n(x)| \le (2h)(h^2/4)(2h)\dots((n-1)h) < \frac{h^{n+1}n!}{4}.$$

A többi belső intervallumra is azt kapjuk, hogy kisebb a becslés eredménye, mint az első intervallumra. Végül az utolsó intervallumra az elsőével azonos becslésre jutunk, így (12.1) a végső eredmény. ■

Megjegyzés. Az itt látott becslés alapján kisebb hibára számítunk, ha x az $[a,b]$ intervallum közepén van, mint amikor az $[a,b]$ intervallum széleinél volna. Ez akkor igaz, ha az alappontok közel egyenletesen helyezkednek el. Sejthető, jobb lesz a közelítés, ha az alappontok az intervallum széleinél sűrűbben helyezkednek el.

A megismert lemma segítségével az egész intervallumra érvényes hibakorláthoz jutunk:

12.3. Tétel

Az alappontok legyenek nagyság szerint rendezettek: $x_{k-1} < x_k$, ahol $h = \max\limits_{k=1,2,\ldots,n} |x_k - x_{k-1}|$. Ekkor fennáll

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} h^{n+1}, \quad x \in [a,b]. \tag{12.2}$$

Bizonyítás. (12.1)-et beírva a hibatételbe kapjuk az állítást. ■

12.4. Az alappontok ügyes megválasztása, Csebisev polinomok

Az n-edfokú Csebisev polinom a következő összefüggéssel adható meg:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,\ldots \tag{12.3}$$

Belátjuk, hogy ez polinom. Legyen $\vartheta = \arccos x$, ekkor

$$\begin{aligned} T_{n\pm1}(x) &= \cos((n\pm1)\vartheta) = \cos(n\vartheta \pm \vartheta) = \\ &= \cos(n\vartheta)\cos\vartheta \mp \sin(n\vartheta)\sin(\vartheta) = xT_n(x) \mp \sin(n\vartheta)\sin\vartheta. \end{aligned}$$

A $+$ és $-$ előjelekhez tartozó kifejezéseket összeadva:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \tag{12.4}$$

azaz a Csebisev polinomok előállítására a következő rekurziót kapjuk:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad x \in [-1,1]. \tag{12.5}$$

Ha az első néhány polinomot kiírjuk, azt találjuk, hogy $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots, \; n > 0$. Így vezessük be az 1-főegyütthatós Csebisev polinomokat a

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), \quad 0 < n$$

utasítással. Ekkor igaz a következő tétel:

12.5. Tétel

$\|\tilde{T}_n\|_\infty \le \|p\|_\infty, \; p \in \mathcal{P}_n^1[-1,1]$, azaz szavakban: Jelölje $\mathcal{P}_n^1[-1,1]$ az 1-főegyütthatós n-edfokú polinomokat $[-1,1]$-ben, akkor e polinomok között az 1-re normált Csebisev polinom lesz az, amelyik a $[-1,1]$ intervallumban a legkisebb maximális értéket veszi fel, azaz ott legjobban közelíti a 0 függvényt.

Bizonyítás. A $T_n(x)$ polinomok a cos függvénynek megfelelően -1 és 1 között oszcillálnak. A szélsőérték helyek:

$$\cos(n \arccos z_k) = (-1)^k, \quad \text{ahonnan } z_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 0,1,\ldots n, \tag{12.6}$$

$n+1$ különböző pont. Az 1-re normált polinomok szélsőérték helyei ugyanitt vannak. Most indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists p \in \mathcal{P}_n^1[-1,1]$, amelyre $\|p\|_\infty < \|\tilde{T}_n\|_\infty$. De ekkor az $r = \tilde{T}_n - p$ különbség polinom $n-1$-edfokú és a szélsőérték helyek közt előjelet kéne váltani, $n+1$ hely között összesen n-szer. De ez ellentmondás, mert $r(x)$-nek legalább n-ed-fokúnak kéne lennie. ■

A Csebisev polinomok gyökei. $\cos(n\arccos x_k)=0 \to n\arccos x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi \to$

$$x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n},\quad k=0,1,\dots,n-1 \text{ különböző hely.} \tag{12.7}$$

Következmény. $[-1,1]$-ben az alappontokat válasszuk úgy, hogy egybeessenek a Csebisev polinomok gyökeivel. Így érjük el a legkisebb hibakorlátot az $\omega_n(x)$ polinomnál:

$$\left|f(x)-L_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\omega_n\|_\infty=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}. \tag{12.8}$$

Ha $x\in[a,b]$ akkor a gyökök egyszerű lineáris transzformációval $[-1,1]$-ből oda átvihetők.

12.6. Feladatok

1. Döntsük el, hogy az interpoláló polinom egyenletesen tart-e az alábbi függvényekhez, ha az $[a,b]$ intervallumot kifeszítő alappontok száma $n\to\infty$:

   a) $f(x)=\sin x,\ x\in[0,\pi]$ *b)* $f(x)=\cos x,\ x\in[0,\pi]$

2. *c)* $f(x)=e^x,\ x\in[0,1]$ *d)* $f(x)=(x+2)^{-1},\ x\in[0,1]$

   e) $f(x)=(x+2)^{-1},\ x\in[-1,1]$

3. Az előző feladat *e)* példájánál mi a helyzet, ha az alappontoknak mindig a Csebisev polinomok gyökeit választjuk?
4. Állapítsuk meg azt az egyszerű lineáris transzformációt, amely a $t\in[-1,1]$ változót átviszi az $x\in[a,b]$ változóba! Mi lesz az inverz transzformáció?
5. Írjuk fel, $[a,b]$-ben mik legyenek az alappontok, hogy $\|\omega_n(x)\|_\infty$ minimális legyen!
6. (12.8) abban az esetben szolgáltatja a hiba becslését, amikor $x\in[-1,1]$. Vezessük le a hibabecslést arra az esetre, ha $x\in[a,b]$!
7. A $\sin x$ függvényt az $[0,\pi/2]$ intervallumban milyen sűrűn kell egyenletesen tabellázni, hogy lineáris interpolációt használva 10^{-4} hibával tudjuk mindenütt a függvény értékét számítani?
8. Az előző feladatnál hogy módosul az eredmény, ha másodfokú polinommal interpolálunk? Ekkor $\omega_2(x)$ maximális abszolút értékű helyét pontosan meg tudjuk határozni?
9. Mutassuk meg, hogy a (12.1) becslés továbbírható: $\left|\omega_n(x)\right|\le n!(K_n(b-a))^{n+1}/(4n^{n+1})$, ahol $1\le K_n=hn/(b-a)$ állandó. Mikor lesz $K_n=1$?
10. A Stirling-formula szerint $n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\dots\right)$. Az előző feladat segítségével mutassuk meg, hogy egyenletes felosztás mellett $|b-a|\le e$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(x)\to 0$.
11. Igazoljuk, hogy a Csebisev polinomok ortogonálisak a $(T_i,T_j)=\int_{-1}^{1}\alpha(x)T_i(x)T_j(x)dx$ skaláris szorzat szerint, ahol a súlyfüggvény $\alpha(x)=(1-x^2)^{-1/2}$.
12. Adjuk meg (T_n,T_n) értékét!

13. Iterált interpoláció (Neville, Aitken, Newton)

13.1. A Neville- és Aitken-interpoláció.

A Lagrange-interpoláció hátránya, hogy újabb osztópontok felvételekor az alappolinomokat újra kell számolni. És van, amikor nem is az interpolációs polinom, hanem közvetlenül annak helyettesítési értéke kéne. Ilyenkor előnyös az iterált interpoláció.

Legyenek az interpoláció tartópontjai $\{(x_i, f_i = f(x_i)\}_{i=0}^{n}$, és jelöljük $p_{0,1,\ldots,k}(x)$-szel azt a k-adfokú polinomot, amelyre

$$p_{0,1,\ldots,k}(x_j) = f(x_j),\ \ j = 0,1,\ldots,k, \tag{13.1}$$

azaz interpolációs polinom a megjelölt pontokra. Megmutatjuk, hogy e polinomok rekurzióval is felépíthetők. Tekintsük a következő determinánst:

$$p_{0,1,\ldots,k,k+1}(x) = \frac{1}{x_{k+1} - x_0}\begin{vmatrix} x - x_0 & p_{0,1,\ldots,k}(x) \\ x - x_{k+1} & p_{1,\ldots,k+1}(x) \end{vmatrix} \tag{13.2}$$

Közvetlen ellenőrzéssel kapjuk, hogy az új polinom jól interpolál az $x = x_0$ és $x = x_{k+1}$ pontokban. A közbülső pontokban pedig, ahol $0 < j < k+1$,

$$p_{0,1,\ldots,k,k+1}(x_j) = \frac{1}{x_{k+1} - x_0}\begin{vmatrix} x_j - x_0 & p_{0,1,\ldots,k}(x_j) \\ x_j - x_{k+1} & p_{1,\ldots,k+1}(x_j) \end{vmatrix} = f(x_j)\frac{x_j - x_0 - (x_j - x_{k+1})}{x_{k+1} - x_0} = f(x_j).$$

E rekurzió alapján a Neville-interpolációhoz a következő számtáblázatot készítjük:

	$k=0$	1	2	3
$x - x_0$	$f_0 = p_0(x)$			
$x - x_1$	$f_1 = p_1(x)$	$p_{01}(x)$		
$x - x_2$	$f_2 = p_2(x)$	$p_{12}(x)$	$p_{012}(x)$	
$x - x_3$	$f_3 = p_3(x)$	$p_{23}(x)$	$p_{123}(x)$	$p_{0123}(x)$

Vegyük észre, hogy most egy újabb pont (x_4, f_4) hozzávételével elegendő az x_3-ig kész táblázathoz egy újabb sort kiszámolni. Ha az $x - x_j$-k számok, akkor a bal oszlop számainál a felsőből vonjuk ki az alsót a rekurziós formula nevezőjének előállításához, pl. $x - x_0 - (x - x_j)$. Például határozzuk meg a táblázat értékeit $x = 2$-re, ha a tartópontok:

x_i	0	1	3
f_i	1	3	2

A számolás menete:

	$k=0$	1	2
$2-0=2$	1		
$2-1=1$	3	$\frac{1}{2-1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5$	
$2-3=-1$	2	$\frac{1}{1-(-1)}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5/2$	$\frac{1}{2-(-1)}\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 5/2\end{vmatrix}=10/3$

Az Aitken-interpoláció filozófiája hasonló, csak más köztes polinomokat állít elő. A sorrendet az Aitken-interpoláció táblázatával szemléltetjük:

	$k=0$	1	2	3
$x-x_0$	$f_0=p_0(x)$			
$x-x_1$	$f_1=p_1(x)$	$p_{01}(x)$		
$x-x_2$	$f_2=p_2(x)$	$p_{02}(x)$	$p_{012}(x)$	
$x-x_3$	$f_3=p_3(x)$	$p_{03}(x)$	$p_{013}(x)$	$p_{0123}(x)$

13.2. Osztott differenciák

Mielőtt rátérnénk a Newton-interpolációra, bevezetjük az osztott differenciákat. Legyenek most is a tartópontok $\{(x_i, f_i = f(x_i))\}_{i=0}^{n}$, ekkor *elsőrendű osztott differenciák:*

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},\quad f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}, \tag{13.3}$$

másodrendű oszott differenciák:

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}, \tag{13.4}$$

és általában a k *-adrendű osztott differenciák:*

$$f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2}\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}, \tag{13.5}$$

ahol a k -adrendű osztott differencia $k+1$ pontra támaszkodik. Az osztott differenciáknak a következő táblázatát készíthetjük:

	$k=0$	1	2	3
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

Példa. Készítsük el az osztott differenciák táblázatát, ha a tartópontok:

x_i	1/2	1	2	3
f_i	2	1	1/2	1/3

Az alábbi táblázatban az oszlopok feletti szám az osztott differencia rendjét mutatja.

		1	2	3
1/2	2			
1	1	$\frac{1-2}{1-1/2}=-2$		
2	1/2	$\frac{1/2-1}{2-1}=-\frac{1}{2}$	$\frac{-1/2-(-2)}{2-1/2}=1$	
3	1/3	$\frac{1/3-1/2}{3-2}=-\frac{1}{6}$	$\frac{-1/6-(-1/2)}{3-1}=\frac{1}{6}$	$\frac{1/6-1}{3-1/2}=\frac{-1}{3}$

13.2.1 Lemma

Fennáll az összefüggés:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega_k'(x_j)}, \tag{13.6}$$

itt $\omega_k(x)$ az (11.5)-ben megismert szorzatfüggvény.

<u>Bizonyítás.</u> Teljes indukcióval végezhető. $k=1$-re az állítás igaz. A k-ról $k+1$-re való áttérésnél az

$$f[x_0,x_1,\dots,x_{k+1}]=\frac{f[x_1,\dots,x_{k+1}]-f[x_0,\dots,x_k]}{x_{k+1}-x_0}$$

összefüggés alapján az 1-gyel kisebb rendű osztott differenciákba írjuk be a tétel állítását:

$$f[x_1,\dots,x_{k+1}]=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{f(x_j)(x_j-x_0)}{\omega_{k+1}'(x_j)},\qquad f[x_0,\dots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)(x_j-x_{k+1})}{\omega_{k+1}'(x_j)},$$

majd rendezéssel nyerjük az eredményt. ■

Látható, az osztott differencia az alappontok szimmetrikus függvénye. Értéke független attól, hogy az alappontok milyen sorrendben vannak megadva.

13.3. A rekurzív Newton-interpoláció

Jelölje $N_n(x)$ az $x_0,x_1,\dots,x_n$ alappontokra épített interpolációs polinomot (Newton- polinom). Ekkor ezen polinomok a következő rekurzióval számíthatók:

$$N_n(x)=N_{n-1}(x)+b_n\omega_{n-1}(x), \tag{13.7}$$

ahol a b_n együttható abból a feltételből határozható meg, hogy $N_n(x)$ interpolál az x_n pontban:

$$b_n=\frac{f_n-N_{n-1}(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}.$$

Azonban a b_n-ek számítására van egy ennél sokkal egyszerűbb módszer.

13.3.1 Tétel

$$b_n=f[x_0,x_1,\dots,x_n]. \tag{13.8}$$

Bizonyítás. Az $N_n(x)-N_{n-1}(x)$ kifejezés eltűnik az $x_0,\dots,x_{n-1}$ pontokban a definició szerint, így $\omega_{n-1}(x)$ szerepeltetése jogos, aminek az együtthatóját abból a feltételből határozzuk meg, hogy $N_n(x_n)=f(x_n)$. A levezetésben $N_{n-1}(x)$ helyére a megfelelő Lagrange-polinomot írjuk:

$$b_n=\frac{N_n(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}-\frac{N_{n-1}(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}=\frac{f(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)\omega_{n-1}(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)(x_n-x_j)\omega'_{n-1}(x_j)}=$$

$$=\frac{f(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_n)\omega'_{n-1}(x_j)}=f[x_0,x_1,\dots,x_n],$$

ahol az utolsó sorban figyelembe vettük (13.6)-ot. Eszerint az osztott differenciák táblázatában a jobb szélső elemek adják a kifejtéshez szükséges b_n együtthatókat. ■

A *rekurzív* jelző nélkül egyszerűen Newton-interpolációról beszélünk akkor, ha a felépítésben a b_n együtthatók helyén az osztott differencákat használjuk. A rekurzív Newton interpoláció használata szokatlan helyzetekben előnyös, például, ha többváltozós interpolációs formulát akarunk készíteni, vagy magasabb deriváltakat is interpolálunk úgy, hogy egyes alacsonyabb rendűek hiányoznak.

13.4. Feladatok

1. Részletesen ellenőrízzük a 3.3 Lemma bizonyításának lépéseit!
2. Neville-interpolációval a függvényt az x helyen kivánjuk közelíteni. A táblázat minden sorában az utolsó szám egy interpoláló polinom helyettesítési értékét adja. Milyen sorrendben írjuk fel az interpoláció alappontjait, hogy a táblázatban az utolsó elemek egyre jobb, növekvő pontosságú sorrendet adjanak?
3. Neville-interpolációval határozzuk meg azt a másodfokú polinomot, amely átmegy a (-1,0),(1,1), (2,6) pontokon! (Most x paraméterként bennmarad a formulákban.)
4. Mutassuk meg, a Neville-interpoláció akkor is ugyanazt az eredményt adja, ha az első oszlopba $x-x_i$ helyett az x_i-x értékeket írjuk!
5. Ugyanezt a polinomot állítsuk elő Newton interpolációval!
6. Milyen algoritmust javasoljunk a Newton-polinom helyettesítési értékeinek számítására, ha az osztott differenciák adottak?
7. Készítsünk Matlab programot, amely a Neville-interpoláció függvényérték közelítéseit adja egy vektorban!
8. Készítsünk Matlab programot, amely az osztott differenciák táblázatát készíti el!
9. Készítsünk Matlab programot, amely az osztott differenciák értékeit felhasználva a Newton-polinom helyettesítési értékét adja!
10. Állapítsuk meg a Newton-interpoláció bázisfüggvényeit és ezek segítségével írjuk fel az interpolációs feltétel lineáris egyenletrendszerét!
11. Oldjuk meg az előző feladatban kapott egyenletrendszert úgy, hogy az osztott differencia-séma lépéseit követjük! Mit tapasztalunk?
12. Írjuk fel azt a mátrixot, ami az $[f_0,f_1,\dots,f_n]^T$ függvényértékek vektorát az elsőrendű osztott differenciák $[f[x_0,x_1],\dots,f[x_{n-1},x_n]]^T$ vektorába viszi!

14. Newton- és Hermite-interpoláció

14.1. Tétel, osztott differenciával az interpoláció hibája

Legyen $x \in [a,b],\ x \neq x_i,\ i = 0,1,\ldots,n,$ ekkor

$$f(x) - L_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]\omega_n(x), \tag{14.1}$$

ahol $[a,b]$ az alappontok által kifeszített intervallum.

Bizonyítás. Legyen N_{n+1} olyan, hogy az x helyen felveszi $f(x)$ értékét. Felhasználva, hogy $N_n(x) = L_n(x)$, a Newton interpoláció szerint írhatjuk:

$$f(x) - L_n(x) = N_{n+1}(x) - N_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]\omega_n(x),$$

és ezzel kész is vagyunk, mert minden x-re N_{n+1}-et újraválaszthatjuk úgy, hogy $N_{n+1}(x) = f(x)$ teljesüljön. ■

14.1.1 Következmény

Legyen $f(x) \in C^{n+1}[a,b],\ x \in [a,b],\ x \neq x_i$, ekkor létezik $\xi_x \in [a,b]$, melyre

$$f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \tag{14.2}$$

fennáll.

Ennek belátásához elegendő, ha összehasonlítjuk az 11.3.1 Tétel (11.9) formuláját (14.1)-gyel. Speciálisan $n = 0$-ra $f[x, x_0] = f'(\xi_x)$, és ez kiírva a Lagrange középérték-tétel. Így (14.2) nem más, mint a középérték-tétel általánosítása magasabbrendű osztott differenciákra. Figyeljük meg: (14.2) – ben x is formális változóként szerepel, $n+2$ alapponthoz tartozik $n+1$-edrendű osztott differencia, és az ehhez tartozó derivált $n+1$-edrendű.

14.1.2 További következmény

A (14.2) összefüggés alkalmas arra, hogy az osztott differenciák táblázatát arra az esetre is értelmezzük, amikor egy alappont többször szerepel. Az alappontok ξ_x-szel együtt az $[a,b]$ intervallumban helyezkednek el. Ha most $[a,b]$ az x_0 pontra zsugorodik össze, akkor határátmenettel kapjuk, hogy

$$f[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{n+1 \text{ db. alappont}}] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{14.3}$$

14.2. Hermite-interpoláció

Ha előírjuk, hogy az interpoláló polinom a függvény deriváltjaira is illeszkedjen a megadott pontokban, akkor Hermite-interpolációról beszélünk. Ilyenkor a tartópontok közé a deriváltakat is felvesszük:

$$(x_k, f^{(i)}(x_k),\ i = 0,1,\ldots,m_k - 1),\ m_k \in \mathbb{N}_+ .$$

Például, ha $m_k = 2$, akkor a nulladik és az első derivált illeszkedik x_k-ban. Általában a feltételek száma:

$$\sum_{k=0}^{n} m_k = m+1, \tag{14.4}$$

tehát m-edfokú polinom lehetséges: $H_m(x) = \mathcal{P}_m$, és az illeszkedési feltételek:

$$H_m^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k), \quad i = 0,1,\dots,m_k-1; \quad k = 0,1,\dots,n. \tag{14.5}$$

14.2.1 Tétel

Ha az alappontok különbözőek, a (14.5) illeszkedési feltételeknek eleget tevő $H_m(x)$ polinom létezik és egyértelmű.

Bizonyítás. Legyen a polinom $H_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ alakú és írjuk fel az együtthatókat meghatározó lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 0 & 1 & 2x_0 & \dots & mx_0^{m-1} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

ami most egy $(m+1)\times(m+1)$-es rendszer. Ennek van megoldása, ha a determinánsa $\det(A) \neq 0$. Indirekt módon tegyük fel, hogy mégis $\det(A) = 0$. Következik, hogy a homogén egyenletnek $(b = 0)$ van nemzérus megoldása, ami ekkor m-edfokú polinom. Vegyük észre, a zérus jobb oldal most azt jelenti, hogy x_k m_k-szoros gyöke a polinomnak. De akkor ennek a polinomnak $m+1$ gyöke kéne, hogy legyen, ami ellentmondás. Ezért az egyenletrendszer mátrixa invertálható, és a megoldás egyértelmű. ■

Megjegyzés. Ha a deriváltak hiányosan vannak megadva, akkor a hiányos (idegen szóval: *lakunáris*) Hermite-interpoláció feladata nem mindig oldható meg.

14.2.2 Hibatétel a nem-hiányos Hermite-interpolációra

Legyen $f(x) \in C^{m+1}[a,b],\ x \in [a,b]$, ekkor létezik $\xi_x \in [a,b]$, amelyre

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!}\omega_m(x), \tag{14.6}$$

ahol most $\omega_m(x) = (x-x_0)^{m_0}(x-x_1)^{m_1}\dots(x-x_n)^{m_n}$.

Bizonyítás. Az 11.3.1 Tételhez hasonlóan tesszük. Ha $x = x_k$, $k = 0,1,\dots,n$, akkor az állítás igaz, így a továbbiakban legyen $x \neq x_k$ minden k-ra. Vezessük be most is a

$$g_x(z) = f(z) - H_m(z) - \frac{\omega_m(z)}{\omega_m(x)}(f(x) - H_m(x)), \quad z \in [a,b] \tag{14.7}$$

függvényt, amelynek $z = x$-szel együtt $m+2$ gyöke van. A tétel állításához a Rolle-tétel $(m+1)$-szeri alkalmazása után jutunk. ■

Abban a speciális esetben, ha minden alappontban a függvényérték és az első derivált adott, *Hermite-Fejér interpolációról* beszélünk.

Érdemes még szót ejteni arról, hogy a Newton-interpolációt hogyan alkalmazhatjuk az Hermite-interpolációnál. Az osztott differenciák értelmezését többszörös ugyanazon alappont esetére már (14.3)-ban megadtuk. Eszerint például kétszer adjuk meg az x_0 pontot, ha $f(x_0)$ és $f'(x_0)$ adottak. Az $\omega(x)$ szorzatfüggvénybe minden korábban alappontként figyelembe vett x_j pont $x-x_j$ tényezőt ad, az éppen interpolált pont csak a következő lépésben ad tényezőt. A pontok sorrendje tetszőleges, de a többször megadott pontok legyenek egymás mellett a deriváltak miatt. Ne feledjük, a deriváltak megadása nem lehet hiányos, például nem hiányozhat az első, ha adott a második derivált.

14.2.3 Példa

Newton interpolációval készítsük el azt a polinomot, amely az x_0, x_1 pontokra az Hermite-Fejér interpolációt valósítja meg!

Megoldás. A osztott differenciák táblázata:

	$k=0$	1	2	3
x_0	f_0			
x_0	f_0	f_0'		
x_1	f_1	$f[x_0,x_1]$	$(f[x_0,x_1]-f_0')/(x_1-x_0)$	
x_1	f_1	f_1'	$(f_1'-f[x_0,x_1])/(x_1-x_0)$	$(f_1'-2f[x_0,x_1]+f_0')/(x_1-x_0)^2$

A keresett polinom:

$$N_3(x)=f_0+f_0'(x-x_0)+\frac{f[x_0,x_1]-f_0'}{x_1-x_0}(x-x_0)^2+\frac{f_1'-2f[x_0,x_1]+f_0'}{(x_1-x_0)^2}(x-x_0)^2(x-x_1)\,.$$

14.3. Hermite-interpolációs alappolinomok

A Lagrange-alappolinomokhoz hasonló tulajdonságú polinomok mindig megszerkeszthetők, ha nem hiányos a deriváltak megadása. Az x_k pontban az $f_k^{(i)}$, $i=0,1,\ldots,m_k-1$-edik deriváltak adottak. Vezessük be az x_k helyhez tartozó

$$h_k(x)=\prod_{j=0,\,j\neq k}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)^{m_j},\quad h_k(x_k)=1$$

függvényt. Ennek a $0,1,\ldots,m_j-1$-edik deriváltja eltűnik az $x_j(\neq x_k)$ pontokban, még akkor is, ha meg volna szorozva egy másik polinommal. Így $h_k(x)$ az $x_j(\neq x_k)$ pontokban már teljesíti az alappolinomtól elvárt tulajdonságokat. Az x_k ponthoz tartozó alappolinomokat keressük a következő alakban:

$$l_{k,i}(x)=p_{k,i}(x)h_k(x),\quad p_{k,i}(x)\in\mathcal{P}_{m_k-1},$$

ahol $p_{k,i}(x)$ m_k-1-edfokú polinom, $i=0,1,\ldots,m_k-1$, és az i-edik polinom együtthatóit abból a feltételből kapjuk, hogy $(d/dx)^j l_{k,i}(x_k)=\delta_{ij}$, $j=0,1,\ldots,m_k-1$.

A könnyebb érthetőség kedvéért tekintsük azt a példát, amikor x_k-ban a második deriváltig adottak az értékek, azaz $i=0,1,2$ lehet. A polinomokat $x-x_k$ hatványai szerint célszerű felírni. Ha $i=0$, akkor

$p_{k,0}(x)=1+\alpha_1(x-x_k)+\alpha_2(x-x_k)^2$ alakú, mert $h_k(x_k)=1$ és $l_{k,0}(x_k)=1$ miatt $p_{k,0}(x_k)=1$. α_1-et abból a feltételből határozzuk meg, hogy az első derivált zérus az x_k helyen:

$$[\alpha_1+2\alpha_2(x-x_k)]h_k(x)+p_{k,0}(x)h_k'(x)\Big|_{x=x_k}=0,$$

innen $\alpha_1=-h_k'(x_k)$. Ha a második deriváltat is zérussá tesszük:

$$2\alpha_2 h_k(x_k)+2\alpha_1 h_k'(x_k)+h_k''(x_k)=0,$$

α_1 értékét beírva $\alpha_2=\left(h_k'(x_k)\right)^2-h_k''(x_k)/2$ az eredmény.

A $p_{k,2}(x)$ polinom nulladfokú tagja zérus, mert $p_{k,2}(x_k)h_k(x_k)=0$. Hasonló ok miatt az elsőfokú tag együtthatója is zérus lesz, mert $p_{k,2}'(x_k)h_k(x_k)+p_{k,2}(x_k)h_k'(x_k)=0$. Végül $l_{k,2}''(x_k)=1$-ből $p_{k,2}(x)=(x-x_k)^2/2$ adódik. Gyakorlásképp igazoljuk, hogy a fenti példában $p_{k,1}(x)=(x-x_k)+\alpha_1(x-x_k)^2$!

Így a nem-hiányos Hermite-interpolációt a következő formula állítja elő:

$$H_m(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m_k-1} f_k^{(i)} l_{k,i}(x).$$

Vegyük észre, a kapott előállítás egy újabb igazolását adja annak, hogy a nem-hiányos Hermite-interpoláció feladata egyértelműen megoldható.

14.4. Inverz interpoláció

Erről beszélünk, ha a függő és független változókat felcseréljük: Így $x=x(y)$ típusú polinomot kapunk. A technikát akkor alkalmazzuk, ha arra vagyunk kiváncsiak, hogy a függvény egy adott értéket mely helyen vesz fel, például, ha a függvény gyökét keressük. Ekkor a közelítő polinomba $y=0$-t helyettesítve a gyök helyére kapunk egy közelítést.

14.5. Feladatok

1. Származtasssunk interpolációs formulát, amikor a tartópontok: (x_0,f_0), (x_1,f_1,f_1',f_1'').
2. A szinusz függvény egyenletes tabellázásakor a deriváltja is ismert a koszinusz függvénnyel való ismert összefüggés miatt, így Hermite-Fejér interpolációt alkalmazhatunk két alappont között. Milyen sűrűn kell egyenletesen tabellázni a függvényt $[0,\pi/2]$-ben, ha mindenütt 10^{-4} hibával szeretnénk a függvény értékeit megkapni?
3. Írjuk fel az Hermite-Fejér interpolációhoz tartozó hibaformulát, ha az interpoláció a Csebisev alappontokon történik.
4. Mutassuk meg, hogy Hermite-Fejér interpolációnál $h_k(x)=\left(l_k(x)\right)^2$, $p_{k,0}(x)=1-2l_k'(x_k)(x-x_k)$ és $p_{k,1}(x)=x-x_k$.
5. Melyek az Hermite-interpolációs bázispolinomok, ha a tartópontok: (x_0,f_0,f_0'), és (x_1,f_1,f_1')?
6. Készítsük el az Hermite-interpoláció bázispolinomjait, ha a tartópontok: (x_0,f_0,f_0''), és (x_1,f_1,f_1''). Bár hiányos a deriváltak megadása, a bázispolinomok mégis léteznek.
7. Egy függvényhez tartozó négy pont: $(1,-1)$, $(2,1)$, $(3,2)$, $(5,3)$. Inverz interpolációt választva határozzuk meg a gyök közelítését Neville-interpolációval!

8. Általánosítsuk a Neville-interpolációt Hermite-interpoláció esetére!

9. Legyen $f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ n-edfokú polinom. $f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=?$

10. Igazoljuk: $\exists\ \xi\in[x_0,x_1]$: $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} x_0^j x_1^{n-j}=\xi^n$, ahol $n=1$-re ξ a számtani közép.

15. Interpoláció spline (donga-) függvényekkel

15.1. Spline- vagy dongafüggvények

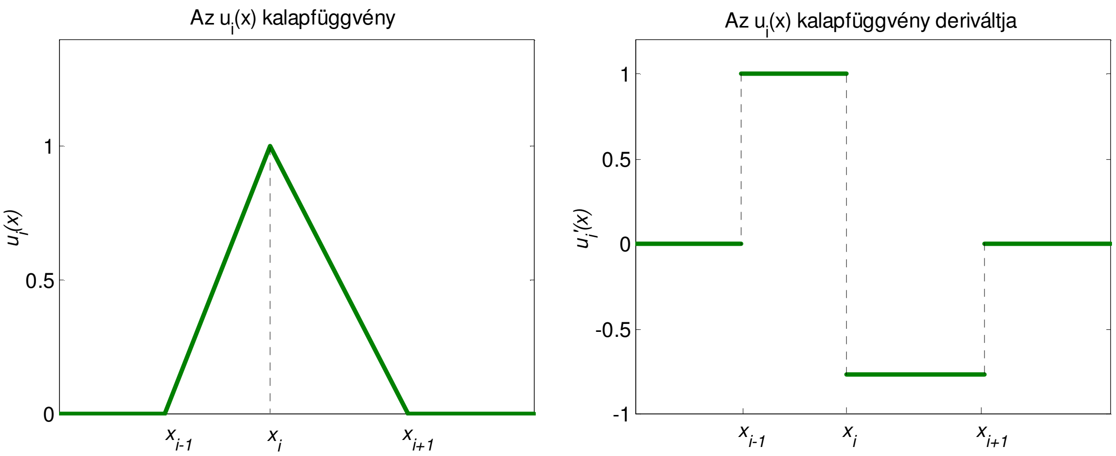
Ha az interpoláló polinomok fokszámát növeljük, gyakran tapasztalhatjuk, hogy a magasabb fokszámú polinomok erőteljes hullámzást mutatnak az alappontok környezetében. Olyannyira, hogy ránézésre sem hihető, hogy a függvényt jól közelítik.

A *spline* függvényekkel történő interpolációnál az ötlet az, hogy az egyes részintervallumokban csak alacsony fokszámú polinomokat engedünk meg, az intervallum-határokon pedig a polinomokat folytonosan illesztjük. Lehetőség szerint a folytonosságot a deriváltakra is előírjuk.

Spline [ejtsd: 'szplájn'] angolul dongát jelent, ami azokat a fabordákat jelenti, amikkel a kádár kirakja a hordó alakját. Spline-oknak hívják angol nyelvterületen azokat a hajlítható, görbíthető 'vonalzókat' is, amelyekkel görbe vonal rajzolható.

Itt most matematikailag hasonló dolog történik: az egyes részintervallumokban függvényíveket polinomokból készítünk, amelyeket „összevarrunk" az intervallum-határokon valamilyen folytonossági követelmény szerint. Szemléletesen szólva: *dongafüggvényeket* alkalmazunk.

A továbbiakban legyenek $\Theta_n = \{x_i, f_i = f(x_i)\}_{i=0}^{n}$ a tartópontok, az abszcisszák legyenek nagyság szerint rendezettek: $x_{i-1} < x_i,\ \ 0 < i$ és $S_l(\Theta_n)$ jelölje az l-edfokú spline-ok halmazát. Ez azt jelenti, hogy $S_l(\Theta_n)$ elemei minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumon l-edfokú polinomok. A spline interpoláció egyszerűen tárgyalható az $u_i(x)$ *kalapfüggvények* segítségével:



1. ábra. A kalapfüggvény és deriváltja

$$u_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{ha } x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{ha } x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \qquad u_i'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_i - x_{i-1}}, & \text{ha } x_{i-1} < x < x_i \\ \dfrac{-1}{x_{i+1} - x_i}, & \text{ha } x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & \text{ha } x < x_{i-1},\ \ x_{i+1} < x \end{cases}$$

Az első derivált az alappontokban nem létezik, csak az alsó és felső határértékük. Később ennyi számunkra elég lesz. A kalapfüggvény magasabbrendű deriváltjai mind eltűnnek.

15.2. Elsőfokú spline-ok: $s(x) \in S_1(\Theta_n)$

$$s(x) = f_{i-1}\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{15.1}$$

Az eredmény egy törtvonal. A számítógép nagyon gyakran így rajzolja ki a Θ_n halmazzal adott függvényt. Ha a felbontás elég sűrű, akkor nem annyira szembetűnő a vonalak törése. A kalapfüggvények segítségével ez az $s(x)$ függvény Lagrange-alappolinom stílusban így írható:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i u_i(x) \tag{15.2}$$

15.3. Másodfokú spline-ok: $s(x) \in S_2(\Theta_n)$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a kezdőpontban adott $f(a)$ és $f'(a)$. Ekkor az

$x_0 = a$	x_0	x_1
$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f(x_1)$

pontokra készíthetünk Hermite-interpolációval egy másodfokú polinomot, amely az első intervallumhoz tartozik. E polinom x_1-ben felvett deriváltjával és $f(x_1)$-gyel folytassuk az eljárást ugyanígy az $[x_1, x_2]$ intervallumra. Általánosan $[x_i, x_{i+1}]$-ben a Newton interpoláció segítségével készített polinom táblázata:

$$\begin{array}{llll}
x_i & f(x_i) & & \\
x_i & f(x_i) & f'(x_i) & \\
x_{i+1} & f(x_{i+1}) & f[x_i, x_{i+1}] & \dfrac{f[x_i, x_{i+1}] - f'(x_i)}{x_{i+1} - x_i},
\end{array}$$

és

$$s(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + f[x_i, x_i, x_{i+1}](x - x_i)^2, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

ahol a függvény deriváltját mindig az előző intervallumban készített polinomból kapjuk.

Ha az induló derivált nem ismert, az első intervallum polinomját vehetjük lineárisnak. Egy másik lehetőség az első három ponton átvetett parabolával kezdeni, majd az eljárást a megismert módon folytatni.

15.4. Harmadfokú spline-ok: $s(x) \in S_3(\Theta_n)$

Most az interpolációt egy az $[x_0, x_1]$ intervallumban készítendő hiányos Hermite-interpolációval kezdjük.

Az $\{x_0, f_0, f_0''\}$, $\{x_1, f_1, f_1''\}$ tartópontokhoz tartozó harmadfokú Hermite-interpolációs alappolinomokat jelölje $l_{ki}(x)$. Az első index az abszcissza indexére utal, a második pedig a derivált rendjére. Az első polinomra teljesül: $l_{00}(x_0) = 1$, $l_{00}(x_1) = 0$, $l_{00}''(x_0) = 0$ és $l_{00}''(x_1) = 0$. A második derivált első vagy alacsonyabb fokú és mindkét pontban eltűnik, emiatt csak az azonosan 0 függvény lehet. Következésképp $l_{00}(x)$ elsőfokú és az x_0 és x_1 helyen felvett értékei teljesen meghatározzák:

$$l_{00}(x) = (x_1 - x)/(x_1 - x_0) = u_0(x), \quad x \in [x_0, x_1]. \tag{15.3}$$

Az $l_{02}(x)$ polinomot meghatározó összefüggések: $l_{02}(x_0)=0,\ \ l_{02}(x_1)=0,\ \ l''_{02}(x_0)=1$ és $l''_{02}(x_1)=0$. A második derivált elsőfokú és a felvett értékei alapján $l''_{02}(x)=u_0(x),\ x\in[x_0,x_1]$. Ezt kétszer integrálva

$$l'_{02}(x)=\frac{u_0^2(x)}{2u'_0(x)}+\beta,$$
$$l_{02}(x)=\frac{u_0^3(x)}{6u_0'^2(x)}+\beta\frac{u_0(x)}{u'_0(x)}+\gamma,\quad x\in[x_0,x_1]$$

ahol kihasználtuk, hogy $u'_0(x)$ az intervallumban konstans. Mivel $u_0(x_1)=0$, emiatt $l_{02}(x_1)=0$ -ból $\gamma=0$ következik. Az $l_{02}(x_0)=0$ feltételből pedig $\beta=-1/\left(6u'_0(x)\right)$ adódik, így

$$l_{02}(x)=\frac{u_0^3(x)-u_0(x)}{6u_0'^2(x)}. \tag{15.4}$$

Az $l_{10}(x)$ és $l_{12}(x)$ polinomok meghatározása teljesen hasonlóan történik, az eredmény:

$$l_{10}(x)=u_1(x),\quad l_{12}(x)=\frac{u_1^3(x)-u_1(x)}{6u_1'^2(x)},\quad x\in[x_0,x_1]. \tag{15.5}$$

Ezekkel az $[x_0,x_1]$ intervallumban interpoláló harmadfokú polinom:

$$p_{0,3}(x)=f_0l_{00}(x)+f''_0l_{02}(x)+f_1l_{10}(x)+f''_1l_{12}(x)=$$
$$=f_0u_0(x)+f''_0\frac{u_0^3(x)-u_0(x)}{6u_0'^2(x)}+f_1u_1(x)+f''_1\frac{u_1^3(x)-u_1(x)}{6u_1'^2(x)}.$$

Most tegyük fel, a függvényérték és a második derivált az $x_0,x_1,\dots,x_n$ alappontokban adott. Akkor e formula mintájára minden intervallumban fel tudunk írni egy harmadfokú interpoláló polinomot:

$$p_{i,3}(x)=f_iu_i(x)+f''_i\frac{u_i^3(x)-u_i(x)}{6u_i'^2(x)}+f_{i+1}u_{i+1}(x)+f''_{i+1}\frac{u_{i+1}^3(x)-u_{i+1}(x)}{6u_{i+1}'^2(x)},\quad x\in[x_i,x_{i+1}]$$

de a kalapfüggvények definícióját szem előtt tartva ezt a polinom-sereget egy szummával is megadhatjuk a teljes intervallumra:

$$p_{[a,b],3}(x)=\sum_{i=0}^{n}f_iu_i(x)+f''_i\frac{u_i^3(x)-u_i(x)}{6u_i'^2(x)},\quad x\in[a,b]. \tag{15.6}$$

Így olyan függvényünk van, amely minden részintervallumban harmadfokú polinom, és az alappontokban folytonos a függvény és a második deriváltja.

A látottak alapján a Θ_n tartópontokra a harmadfokú dongafüggvényt a következőképp vesszük fel:

$$s_3(x)=\sum_{i=0}^{n}f_iu_i(x)+s_i\frac{u_i^3(x)-u_i(x)}{6u_i'^2(x)},\quad x\in[a,b],\quad s_i=s''_3(x_i). \tag{15.7}$$

Az s_i második deriváltakat abból a feltételből határozzuk meg, hogy az első deriváltak is legyenek folytonosak az alappontokban. Az első derivált

$$s'_3(x)=\sum_{i=0}^{n}f_iu'_i(x)+s_i\frac{3u_i^2(x)-1}{6u'_i(x)},\quad x\in[a,b] \tag{15.8}$$

csak akkor lesz folytonos, ha minden alappontban az alsó és felső határérték megegyezik. Jelölje $s'_3(x_i-)$ az alsó, $s'_3(x_i+)$ a felső határértéket az x_i helyen. Ekkor csak két kalapfüggvény ad nemzérus járulékot a határértékekhez:

$$s_3'(x_i-) = f_{i-1}u_{i-1}'(x_i-) + f_i u_i'(x_i-) + s_{i-1}\frac{3u_{i-1}^2(x_i)-1}{6u_{i-1}'(x_i-)} + s_i\frac{3u_i^2(x_i)-1}{6u_i'(x_i-)} =$$

$$= \frac{-f_{i-1}+f_i}{h_{i-1}} + \frac{s_{i-1}+2s_i}{6}h_{i-1}, \quad \text{ahol } h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$$

és

$$s_3'(x_i+) = \sum_{j=i}^{i+1} f_j u_j'(x_i+) + s_j\frac{3u_j^2(x_i)-1}{6u_j'(x_i+)} = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{s_{i+1}+2s_i}{6}h_i.$$

A kettőt egyenlővé téve az x_i pontban:

$$f[x_{i-1},x_i] + \frac{2s_i + s_{i-1}}{6}h_{i-1} = f[x_i,x_{i+1}] - \frac{2s_i + s_{i+1}}{6}h_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Ez tovább rendezve

$$\frac{s_{i-1}h_{i-1}}{6} + \frac{s_i(h_{i-1}+h_i)}{3} + \frac{s_{i+1}h_i}{6} = f[x_i,x_{i+1}] - f[x_{i-1},x_i],$$

majd a $\sigma_{i-1} = h_{i-1}/(h_{i-1}+h_i)$ jelölés bevezetésével az

$$s_{i-1}\sigma_{i-1} + 2s_i + s_{i+1}(1-\sigma_{i-1}) = 6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}], \quad i = 1,2,\ldots,n-1. \tag{15.9}$$

alakra egyszerűsödik.

A kapott háromátlójú lineáris egyenletrendszer mátrixa diagonáldomináns, ami a megoldás szempontjából kedvező. Azonban az egyenletrendszer nem határozza meg s_0 és s_n értékét, így a kezdő- és végpontban még feltételeket kell előírnunk. A gyakorlatban az alábbi három megoldás valamelyikét szokták választani:

1. Hermite-peremfeltétel: az első deriváltak $f'(a)$ és $f'(b)$ adottak.
2. A második derivált értékéről rendelkezünk a kezdő és végpontban. Ha nem ismerjük, $s_0 = s_n = 0$ egy lehetséges választás. Hagyományosan ezt nevezik természetes spline-nak. Ennél azonban jobb megoldás, ha a szélső két intervallumban a harmadik deriváltat konstansnak vesszük: az így kapott s_0 és s_n-et tartalmazó kifejezéseket hozzávéve az (15.9) rendszerhez kapjuk azt a spline-interpolációt, amely harmadfokú polinomig pontos.
3. Periodikus határfeltétel. Ha a függvény periodikus, és a teljes periódusban történik az interpoláció, akkor a függvényt és deriváltjait a két végpontban egyenlővé tesszük.

15.5. Példa

Az Hermite-féle peremfeltétel mellett hogy fog kinézni a megoldandó (15.9) egyenletrendszer első és utolsó sora?

Megoldás. (15.9)-ben vegyünk $i = 0$-t és az x_{-1} formálisan felvett alapponttal tartsunk x_0-hoz. Ekkor $\sigma_{-1} \to 0$ és így

$$2s_0 + s_1 = 6f[x_0,x_0,x_1] = 6\left(f[x_0,x_1] - f_0'\right)/h_0. \tag{15.10}$$

Az utolsó egyenlethez helyettesítsük (15.9)-be $i = n$-et és x_{n+1} tartson x_n-hez:

$$s_{n-1} + 2s_n = 6f[x_{n-1},x_n,x_n], \tag{15.11}$$

E két egyenlettel kiegészítve (15.9)-et már annyi egyenletünk van, mint az ismeretlenek száma.

15.6. Feladatok

1. Hogy egyszerűsödik (15.9), ha az alappontok egyenlő távolságra vannak egymástól?
2. Hogy módosul (15.9) első és utolsó sora, ha a szélső két intervallumban a harmadik deriváltat tesszük állandóvá? (Útmutatás: pl. az x_0, x_1 és x_1, x_2 pontok között képezzük differencia-hányadossal a harmadik deriváltakat és tegyük őket egyenlővé: $(s_2 - s_1)/h_1 = (s_1 - s_0)/h_0$. Az utolsó három pontnál járjunk el hasonlóan. A kapott eredményt helyettesítsük a megfelelő egyenletbe.)
3. Mutassuk meg, hogy legalább négy tartópontnál az előbbi módon készített spline harmadfokú polinomra pontos, azaz annak pontjaiból visszakapjuk magát a polinomot.
4. A harmadfokú dongafüggvényt úgy is reprezentálhatjuk, hogy egy intervallumon belül a polinomot az intervallum határain felvett függvényértékkel és az első deriválttal adjuk meg. Az Hermite-interpolációs alappolinomokkal készítsük el az interpoláló formulát az (x_0, x_1) intervallumra, ld. 14.5.5 példa. Igazoljuk, hogy (15.6)-hoz hasonlóan a következő formula nyerhető:
$$\tilde{p}_{[a,b],3}(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \left(-2u_i^3(x) + 3u_i^2(x)\right) + f_i' \frac{u_i^3(x) - u_i^2(x)}{u_i'(x)}, \quad x \in [a,b].$$
5. Ha a harmadfokú dongafüggvényt a részintervallumok határain felvett függvényértékkel és az első deriválttal reprezentáljuk, akkor az előző feladat alapján a következő kifejezést kapjuk:
$$s_3(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \left(-2u_i^3(x) + 3u_i^2(x)\right) + t_i \frac{u_i^3(x) - u_i^2(x)}{u_i'(x)}, \quad x \in [a,b],$$
ahol $f_i = s_i(x_i)$, $t_i = s_i'(x_i)$ és $u_i(x)$ az i-edik kalapfüggvény. A részintervallumok határain a második derivált egyeztetésével származtassunk egyenletrendszert a t_i paraméterek meghatározására!
6. Szeretnénk harmadfokú spline függvénnyel közelíteni a következő differenciálegyenlet megoldását: $-v''(x) = g(x)$, $x \in [0,1]$, $v(0) = v(1) = 0$, ahol $g(x)$ megadott függvény. Osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot n egyenlő részre és írjuk fel (15.9) felhasználásával a közelítést meghatározó egyenleteket. A differenciálegyenletből nyerhető információ alapján alakítsuk át az egyenletrendszert, hogy megoldásul a $v(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$ értékek közelítéseit kapjuk!
7. Az interpolációnál tanultak alapján adjunk felső becslést az elsőfokú spline közelítés hibájára!