1. A szuprénum elv. $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}$ felülről körlátos $\Rightarrow H$ felső korlátai között van legkisebb, azaz

$$\exists min\{K \in \mathbb{R} | K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}$$

Bizonyítás:

$$\left.\begin{array}{l} A \neq \emptyset \text{ és } B \neq \emptyset \\ \forall a \in A \text{ és } \forall K \in B : a \leq K \end{array}\right\} \underset{\text{axióma}}{\overset{\text{teljességi}}{\Longrightarrow}} \exists \xi \in \mathbb{R} : a \leq \xi \leq K \ (\forall a \in A, \forall K \in B)$$

Ekkor ξ-re:

- $\forall a \in A : a \leq \xi : \xi$ felső korlát
- A legkisebb felső korlát is:

$$\forall K \in B \Rightarrow \xi \leq K$$

2. Archimédeszi tulajdonság.

$$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : b < n \cdot a$$

Bizonyítás: (Indirekt)

$$\exists a > 0, \exists b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : b \geq n \cdot a$$

Legyen $H = \{n \cdot a | n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor H felülről korlátos $\Rightarrow \exists \sup H =: \xi$
ξ a legkisebb felső korlátja H-nak $\Rightarrow \xi - a$ már nem felső korlát $\Rightarrow$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \xi - a < n_0 \cdot a \leq \xi \Rightarrow \xi < (n_0 + 1) \cdot a$$

Ellentmondás, mert ξ felső korlát, azaz $(n_0 + 1) \cdot a \leq \xi$.

3. Cantor-tulajdonság. $\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ akkor

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Bizonyítás:
Legyen $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ és $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$.
Ekkor $a_n \leq b_m$ $(\forall n, m \in \mathbb{N})$
Két eset lehetséges:

- ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$
- ha $m < n$, akkor $a_n \leq b_m \leq b_m$

A teljességi axióma miatt:

$$\xi \in \mathbb{R} : a_n \leq \xi \leq b_m \ (\forall n, m \in \mathbb{N}) \overset{n=m}{\Rightarrow}$$

$$a_n \leq b_n \ (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \xi \in [a_n, b_n] \Rightarrow$$

$$\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

4. Konvergens sorozat határértéke egyértelmű. Az (a_n) sorozat konvergens, ha

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| \leq \varepsilon \tag{1}$$

Ha az (a_n) sorozat konvergens $\Rightarrow$ a definícióbeli A szám egyértelmű. Ezt az A számot az (a_n) sorozat határértékének nevezzük.

Bizonyítás: (indirekt)
Tegyük fel, hogy $A_1 \neq A_2$ és teljesül rájuk (1) feltétel.

$$0 < \varepsilon < \frac{|A_1 - A_2|}{2}$$

$\varepsilon > 0$-hoz:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \varepsilon$$

Legyen $n_0 := max\{n_1, n_2\}, \forall n \geq n_0$

$$0 < |A_1 - A_2| = |(A_1 - a_n) + (a_n - A_2)| \leq |a_n - A_1| + |a_n - A_2| < 2 \cdot \varepsilon < |A_1 - A_2| \;\lightning$$

5. Közrefogási elv. Tegyük fel, hogy (a_n), (b_n) és (c_n) valós sorozatok úgy, hogy

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n$$

Továbbá

$$\exists \lim(a_n) = \lim(c_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor $\exists \lim(b_n)$ is és $\lim(b_n) = A$

Bizonyítás:

$A \in \mathbb{R}$ **(véges a határérték)**

$$(a_n) : \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

$$(c_n) : \forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

Legyen $n_0 := max\{a_1, a_2\} \Rightarrow$

$$\forall n \geq n_0\text{-ra} : A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

azaz

$$b_n \in k_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim(b_n) = A$$

$A = +\infty$, tekintsük (a_n)-et

$$\lim(a_n) = +\infty \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : a_n > P$$

Legyen $n_0 := max\{n_1, N\}$, ekkor:

$$\forall n \geq n_0\text{-ra} : b_n \geq a_n > P \Rightarrow \lim(b_n) = +\infty$$

$A = -\infty$, tekintsük (c_n)-et

$$\lim(c_n) = -\infty \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : c_n < P$$

Legyen $n_0 := max\{n_1, N\}$, ekkor:

$$\forall n \geq n_0\text{-ra} : b_n \leq c_n < P \Rightarrow \lim(b_n) = -\infty$$

6. Műveletek nullsorozatokkal. Tegyük fel, hogy $\lim(a_n) = 0$ és $\lim(b_n) = 0$, ekkor:

1. $(a_n + b_n)$ is nullsorozat
2. ha (c_n) korlátos sorozat, akkor $(a_n \cdot c_n)$ nullsorozat
3. $(a_n \cdot b_n)$ is nullsorozat

Bizonyítás

1.
$$(a_n) : \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 (n \in \mathbb{N}) : |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$(b_n) : \forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 (n \in \mathbb{N}) : |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 := max\{n_1, n_2\}, \forall n \geq n_0 :$

$$|(a_n + b_n) - 0| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim(a_n + b_n) = 0$$

2.
$$(a_n) \text{ korlátos } \Rightarrow \exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |c_n| < K$$
$$\lim(b_n) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 |a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_1, \forall n \geq n_0 :$

$$|(a_n \cdot c_n) - 0| = |a_n \cdot c_n| \leq |a_n| \cdot |c_n| = \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon \Rightarrow \lim(a_n \cdot c_n) = 0$$

3. $\lim(b_n) = 0 \Rightarrow (b_n)$ korlátos $\Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = 0$

7. A konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel. Legyen (a_n), (b_n) konvergens sorozatok és $\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}$, $\lim(b_n) =: B \in \mathbb{R}$, akkor $(a_n \cdot b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.

Bizonyítás: Igazoljuk, hogy $(a_n \cdot b_n - A \cdot B)$ nullsorozat.

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| = |b_n(a_n - A) + b_n(b_n - B)| \leq$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{|b_n|}_{\text{korlátos}} \underbrace{|a_n - A|}_{\text{nullsorozat}} + \underbrace{|A|}_{\text{korlátos}} \underbrace{|b_n - B|}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}} \Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

8. Monoton sorozatok határértékére vonatkozó tétel.

1. Ha az (a_n) sorozat monoton növekedő és felülről korlátos [monoton csökkenő és alulról korlátos], akkor konvergens és

$$\lim(a_n) = sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\ [\lim(a_n) = inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}]$$

2. Ha az (a_n) sorozat monoton növekvő és felülről nem korlátos [monoton csökkenő és alulról nem korlátos], akkor

$$\lim(a_n) = +\infty\ [\lim(a_n) = -\infty]$$

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy (a_n) felülről korlátos $\Rightarrow$

$$\exists sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} =: A \in \mathbb{R}$$

Mivel A a sorozat legkisebb felső korlátja, ezért:

- $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq A$
- $\forall \varepsilon, n_0 \in \mathbb{N} : A - \varepsilon < a_{n_0} \leq A$

De az $(a_n) \nearrow \Rightarrow$

$$\forall n \geq n_0 : A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq A \Rightarrow \lim(a_n) = A$$

[fogyás esetén hasonló]

2. Tegyük fel, hogy (a_n) felülről nem korlátos $\Rightarrow$

$$\forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > P$$

De az $(a_n) \nearrow \Rightarrow$

$$\forall n \geq n_0 : a_n \geq a_n 0 > P \Rightarrow \lim(a_n) = +\infty$$

[$\lim(a_n) = -\infty$ hasonló]

9. A geometriai sorozat határértékére vonatkozó tétel.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} = 0 & \text{ha } |q| < 1 \\ = 1 & \text{ha } q = 1 \\ = +\infty & \text{ha } q > 1 \\ = \nexists \text{ határérték} & \text{ha } q \le -1 \end{cases} \qquad q \in \mathbb{R}$$

Bizonyítás:

$|q| < 1:$ Ha $q = 0$, akkor az állítás nyílvánvaló. Ha $0 < |q| < 1$, akkor az $\frac{1}{|q|} > 1$ számot írjuk fel $\frac{1}{|q|} = 1+h$ $(h > 0)$ alakban. A Bernoulli-egyenlőtlenséget alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{0}_{\to 0} < |q|^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n} = \frac{1}{(1+h)^n} \le \frac{1}{1+h\cdot n} \le \underbrace{\frac{1}{h\cdot n}}_{\to 0} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Közrefogási elv alapján $\lim(q^n) = 0$.

$q = 1:$ triviális

$q > 1:$ Legyen $q = 1 + h$ $(h > 0)$

$$q^n = (a+h)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\ge} 1 + n\cdot h > n \cdot h \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Ekkor:

$$\forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0 : q^n \ge n \cdot h > P$$

Ha $n \ge n_0 = \left[\frac{P}{h}\right] + 1 \Rightarrow \lim(q^n) = +\infty$

$q \le -1:$ Ekkor a páros indexű részsorozatok $\to +\infty$ $(n \to +\infty)$ és a páratlan indexű részsorozatok $\to -\infty$ $(n \to +\infty) \Rightarrow \nexists$ határértéke (q^n) sorozatnak az intervallumban.

10. Az e szám bevezetése az $(1 + \frac{1}{n})^n$ $(n = 1, 2, \dots)$ sorozattal.

$$\text{Az } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \dots) \text{ sorozat}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{monoton növő} \\ \text{felülről korlátos}\end{array}\right\} \Rightarrow (a_n) \text{ konvergens}$$

Jelölés:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bizonyítás:

Az (a_n) sorozat monoton növő

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1 + n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

Az (a_n) sorozat korlátos

$$\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{\text{mértani}}{\overset{\text{számtani}}{<}} \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}\right)^{n+2} = 1$$

$\Rightarrow a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \ (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (a_n)$ kovergens.

11. A teleszkópikus sor konvergenciája és összege. A $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciája.

1. A $\sum \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ sor konvergens és $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$
2. A $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás

1.

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Ötlet: $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$s_n = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \lim(s_n) = 1$$

2.

$$s_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1+1-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n}$$

$\Rightarrow s_n \le 2 \ (\forall n = 1, 2, \dots) \Rightarrow (s_n)$ korlátos és $(s_n) \searrow \Rightarrow (s_n)$ konvergens
$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ konvergens.

12. A Cauchy-féle gyökkritérium. Tekintsük $\sum a_n$ sort és tegyük fel, hogy létezik az $A := \lim(\sqrt[n]{|a|}) \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték, ekkor

1. $0 \le A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;
2. $A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens;
3. $A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens és divergens is.

Bizonyítás:

$0 \leq A < 1:$ Vegyünk egy $q \in (A, 1)$ számot, ekkor q-hoz

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow |a_n| \leq q^n \qquad (\forall n \geq n_0)$$

Mivel $0 \leq q < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum q^n \text{ konvergens} \underset{\text{krit. miatt}}{\overset{\text{majoráns}}{\Longrightarrow}} \sum |a_n| \text{ konvergens } \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergens}$$

$A > 1:$ Vegyünk egy $q \in (1, A)$ számot, ekkor q-hoz

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \geq q \Rightarrow |a_n| \geq q^n \qquad (\forall n \geq n_0)$$

Mivel $q > 1 \Rightarrow q^n \to +\infty \Rightarrow (|a_n|)$ nem nullsorozat $\Rightarrow (a_n)$ nem nullsorozat $\Rightarrow \sum a_n$ divergens.

$A = 1:$ Például:

- A $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens és $\lim \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right) = \lim \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) = 1$
- A $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens és $\lim \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \right) = \lim \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^2 = 1$

13. A D'Alembert féle hányadoskritérium. Tekintsük a $\sum a_n$ sort, és tegyük fel, hogy $(a_n) \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, továbbá létezik az $A := \lim \left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right) \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor

1. $0 \leq A < 1$, akkor $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;
2. $A > 1$, akkor $\sum a_n$ sor divergens;
3. $A = 1$, akkor $\sum a_n$ sor lehet konvergens és divergens is.

Bizonyítás:

$0 \leq A < 1:$ Vegyünk egy $q \in (1, A)$ számot, ekkor q-hoz

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$$

Legyen $n \geq n_0$ tetszőleges

$$|a_{n+1} < q \cdot |a_n| \leq q^2 \cdot |a_{n-1}| \leq \cdots \leq q^{n+1-n_0} \cdot |a_{n_0}| = \underbrace{\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0-1}}}_{c} \cdot q^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a_{n+1}| \leq c \cdot q^n \ (\forall n \geq n_0) \Rightarrow \text{Mivel } q < 1 \Rightarrow \sum q^n \text{ konvergens}$$

$A > 1:$ Vegyünk egy $q \in (1, A)$ számot, ekkor q-hoz:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq q$$

Legyen $n \geq n_0$ tetszőleges

$$|a_{n+1}| > q \cdot |a_n| \geq q^2 \cdot |a_{n-1}| \geq \cdots \geq q^{n+1-n_0} \cdot |a_{n_0}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim(|a_{n+1}|) = +\infty \text{ ugyanis } q \geq 1 \Rightarrow \lim(a_n) \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergens}$$

$A = 1:$ Például:

- A $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens és $\lim\left(\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$
- A $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens és $\lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right) = \lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$

14. Függvény határértékére vonatkozó átviteli elv. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathcal{D'}_f$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor

$$\lim_a f = A \Leftrightarrow \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D'}_f \backslash \{a\}, \lim(x_n) = a \text{ esetén } \lim_{n \to +\infty} (f(x_n)) = A \tag{2}$$

Bizonyítás:

$\Rightarrow$: $\lim_a f = A \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D'}_f \cap (k_\delta(a) \backslash \{a\}) : f(x) \in k_\varepsilon(A) \tag{3}$$

Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D'}_f \backslash \{a\}$, $\lim(x_n) = a$ tetszőleges sorozat. Igazolni kell, hogy $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges rögzített szám, ekkor $\Rightarrow \exists \delta$ amire (3) teljesül. De $\lim(x_n) = 0 \Rightarrow$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : x_n \in k_\delta(a) \overset{(3)}{\Longrightarrow} \forall n \geq n_0 : f(x_n) \in k_\varepsilon(A)$$

$$\Rightarrow f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} A$$

$\Leftarrow$: **(indirekt)** Tegyük fel, hogy (2) teljesül, de $\lim_a f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathcal{D'}_f \cap (k_\delta(a) \backslash \{a\}) : f(x) \neq k_\varepsilon(A)$$

Legyen $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\exists x_n : k_{\frac{1}{n}}(a)$ $\big(\Rightarrow x_n \to a \ (n \to +\infty)\big)$, amire $f(x_n) \notin k_\varepsilon(A) \Rightarrow f(x_n) \nrightarrow A \lightning$ (2)