Analízis 1. (BSc) vizsgakérdések
Programtervező informatikus szak
2009-2010. tanév 2. félév

• Valós számok

1. Mondja ki a háromszög-egyenlőtlenségeket.

Válasz. Minden a és b valós számra

(a) $|\,a+b\,| \le |\,a\,| + |\,b\,|$,

(b) $\big|\,|a| - |b|\,\big| \le |\,a-b\,|$.

2. Hogyan szól a Bernoulli-egyenlőtlenség?

Válasz. Minden $h \ge -1$ valós számra és minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$(1+h)^n \ge 1 + nh.$$

Ezekre a h és n értékekre egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $h = 0$ vagy $n = 1$.

3. Fogalmazza meg a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

Válasz. Legyen $n \ge 2$ tetszőleges természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszés szerinti *nem-negatív* valós szám. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

4. Írja le a valós számok közötti rendezés és a műveletek kapcsolatára vonatkozó axiómákat.

Válasz. Ha $x, y, z \in \mathbb{R}$, akkor

(i) $x \le y \quad \Rightarrow \quad x + z \le y + z$
(ii) $x \le y$ és $0 \le z \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \le y \cdot z$.

5. Mit mond ki a *teljességi axióma*?

Válasz. Ha $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset, B \ne \emptyset$ és $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$ esetén $a \le b$, akkor

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R} \quad \forall\, a \in A \ \ \forall\, b \in B: \qquad a \le \xi \le b.$$

6. Fogalmazza meg a szuprémum elvet.

Válasz. Ha $H \subset \mathbb{R}$, $H \ne \emptyset$ és H felülről korlátos, akkor H felső korlátjai között van legkisebb.

7. Mit jelent az, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz induktív?

Válasz. $H \subset \mathbb{R}$ induktív, ha $0 \in H$, továbbá, ha $x \in H$ esetén $x + 1 \in H$.

8. Hogyan értelmezi a természetes számok halmazát?

Válasz. $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív részhalmaza $\mathbb{R}$-nek.

9. Fogalmazza meg a teljes indukció elvét!

Válasz. Legyen $A(n)$ egy állítás minden $n \in \mathbb{N}$-re. Tegyük fel, hogy $A(0)$ igaz és ha $A(n)$ igaz akkor $A(n+1)$ is igaz $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor $A(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$-re.

10. Mikor van egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak maximuma?

Válasz. Ha létezik $\alpha \in A$, minden $x \in A$-ra $x \leq \alpha$.

11. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak **nincs** minimuma.

Válasz. Minden $\alpha \in A$-ra létezik $x \in A$, hogy $x < \alpha$.

12. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak **nincs** maximuma.

Válasz. Minden $\alpha \in A$-ra létezik $x \in A$, hogy $x > \alpha$.

13. Mikor felülről korlátos egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz?

Válasz. Ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $a \in A$-ra $a \leq K$.

14. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről **nem** korlátos!

Válasz. Minden $K \in \mathbb{R}$-re létezik $a \in A$, hogy $a > K$.

15. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent az A elemeire nézve az, hogy $\xi = \sup A$?

Válasz. Minden $x \in A$-ra $x \leq \xi$ és minden $K < \xi$-re $\exists\, x \in A$, hogy $x > K$.

16. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent az A elemeire nézve az, hogy $\xi = \inf A$?

Válasz. Minden $x \in A$-ra $x \geq \xi$ és minden $K > \xi$-re $\exists\, x \in A$, hogy $x < K$.

17. Mit jelent az, hogy a valós számok halmaza rendelkezik az archimédeszi tulajdonsággal?

Válasz. $\forall\, a > 0 \ \ \forall\, b \in \mathbb{R} \ \ \exists\, n \in \mathbb{N}: \quad b < na.$

18. Mit jelent az, hogy a valós számok halmaza rendelkezik a Cantor-tulajdonsággal?

Válasz. Ha $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \ \ (\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n, b_n \in \mathbb{R})$, akkor

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

• Relációk és függvények

19. Definiálja a következő fogalmakat: *reláció*, *reláció értelmezési tartománya* és *értékkészlete*.

Válasz. Legyen A és B nemüres halmaz. Az $A \times B$ Descartes-szorzat nemüres r részhalmazait az A és a B halmaz elemei közötti *relációnak* hívjuk. Ha $(a, b) \in r \subset A \times B$, akkor azt mondjuk, hogy az *a elem az r relációban van b-vel.* A

$$\mathcal{D}_r := \{a \in A \mid \exists\, b \in B \text{ úgy, hogy } (a, b) \in r\}$$

halmazt az r reláció *értelmezési tartományának*, az

$$\mathcal{R}_r := \{b \in B \mid \exists\, a \in A \text{ úgy, hogy } (a, b) \in r\}$$

halmazt az r reláció *értékkészletének* nevezzük.

20. Adja meg a *függvény* definícióját.

Válasz. Legyenek A és B nemüres halmazok. A nemüres $f \subset A \times B$ reláció függvény, ha

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f\text{-hez} \quad \text{egyértelműen } \exists\, y \in B, \quad \text{hogy} \quad (x, y) \in f.$$

21. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített *képét*?

Válasz. Legyen $f : A \to B$ függvény. A $C \subset A$ halmaz f által létesített képe az

$$f[C] := \{f(x) \in B \mid x \in C\}$$

halmaz.

22. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített *ősképét*?

Válasz. Legyen $f : A \to B$ függvény. A $D \subset B$ halmaz f által létesített ősképe az

$$f^{-1}[D] := \{x \in A \mid f(x) \in D\} \subset A$$

halmaz.

23. Mikor nevezünk egy függvényt *invertálhatónak*?

Válasz. Az $f : A \to B$ függvény invertálható, ha különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző helyettesítési értékeket rendel.

24. Definiálja az inverz függvényt.

Válasz. Legyen $f : A \to B$ invertálható függvény. f inverz függvénye az

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre } f(x) = y$$

függvény.

25. Mi a *bijekció* definíciója?

Válasz. Az $f : A \to B$ függvény az A és a B halmaz közötti bijekció (vagy az A és B halmaz elemi közötti *kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés*), ha f invertálható és $\mathcal{R}_f = B$.

26. Írja le az *összetett függvény* fogalmát.

Válasz. Legyen $f : A \to B$, $g : C \to D$ és tegyük fel, hogy $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Ekkor f és g összetett függvénye az

$$f \circ g \,:\, \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \to B, \quad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$

függvény.

• Sorozatok

27. Definiálja a következő fogalmakat: *valós sorozat*; sorozat n-edik *tagja*, *index*.

Válasz. Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt *(valós) sorozatnak* nevezünk. Ennek a függvénynek az $n \in \mathbb{N}$ helyen felvett $a(n)$ helyettesítési értékét az a sorozat *n-edik tagjának* mondjuk és az a_n szimbólummal jelöljük. Az n szám az a_n tag *indexe*.

28. Mit jelent az, hogy egy $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat korlátos?

Válasz. Létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $|a_n| \le K$.

29. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy az (a_n) sorozat *nem* korlátos.

Válasz. $\forall\, L \in \mathbb{R}$-hez $\exists\, n \in \mathbb{N} : \ |a_n| > L$.

30. Definiálja az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem $\varepsilon > 0$ *sugarú környezetét*.

Válasz. Az $A \in \mathbb{R}$ valós szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezetén a

$$k_\varepsilon(A) := (A - \varepsilon,\, A + \varepsilon)$$

intervallumot értjük. Az $A = +\infty$ elem $\varepsilon > 0$ sugarú környezete a

$$k_\varepsilon(+\infty) := (\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty),$$

az $A = -\infty$ elemé pedig a

$$k_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon})$$

intervallum.

31. Mikor nevezünk egy (a_n) valós sorozatot *konvergensnek*?

Válasz. Ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 : \qquad |a_n - A| < \varepsilon.$$

32. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozat *divergens*?

Válasz. (a_n) divergens, ha nem konvergens, azaz

$$\forall\, A \in \mathbb{R} \quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 : \qquad |a_n - A| \ge \varepsilon.$$

33. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}$ szám minden környezete az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza. Következik-e ebből az, hogy az (a_n) sorozat konvergens?

Válasz. Nem. A $\big((-1)^n\big)$ sorozat divergens, de pl. az $A = 1$ szám minden környezetébe a sorozatnak végtelen sok tagja esik.

34. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozat $(+\infty)$-hez tart?

Válasz. $\lim(a_n) = +\infty \iff \forall\, P \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 \quad a_n > P.$

35. Mi a definíciója annak, hogy az (a_n) sorozatnak $-\infty$ a határértéke?

Válasz. $\lim(a_n) = -\infty \iff \forall\, P \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 \quad a_n < P.$

36. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozatnak *van határértéke*?

Válasz. Azt, hogy a sorozat *konvergens*, vagy *plusz végtelenhez*, vagy pedig *mínusz végtelenhez* tart. Ez azzal egyenértékű, hogy

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 : \qquad a_n \in k_\varepsilon(A).$$

37. Adott $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén mi a definíciója a $\lim(a_n) = A$ egyenlőségnek?

Válasz. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 : \qquad a_n \in k_\varepsilon(A).$

38. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó közrefogási elvet.

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) valós sorozatokra teljesülnek a következők:

(a) $\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N$-re $\; a_n \leq b_n \leq c_n$;

(b) $\exists\, \lim(a_n)$, $\exists\, \lim(c_n)$ és $\lim(a_n) = \lim(c_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor a közrefogott (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

39. Milyen állításokat ismer a határérték és a rendezés között?

Válasz. Tegyük fel, hogy az $(a_n), (b_n)$ sorozatoknak van határértékük és

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1^o Ha $A > B$, akkor $\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N, n \in \mathbb{N}$-re $\; a_n > b_n$.

2^o Ha $\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N, n \in \mathbb{N}$-re $\; a_n \geq b_n$, akkor $A \geq B$.

40. Igaz-e az, hogy ha az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke és $a_n > b_n$ minden n-re, akkor $\lim(a_n) > \lim(b_n)$?

Válasz. Nem, pl. $a_n := \frac{1}{n}$, $\; b_n := 0$ esetén $a_n > b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, de $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$.

41. Mondja ki a monoton sorozatok konvergenciájára és határértékére vonatkozó állításokat.

Válasz. 1^o Ha az (a_n) sorozat *monoton növekedő* és *felülről korlátos* [monoton csökkenő és alulról korlátos], akkor konvergens, és

$$\lim(a_n) = \sup\big\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\big\} \in \mathbb{R} \quad [\lim(a_n) = \inf\big\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\big\} \in \mathbb{R}].$$

2^o Ha az (a_n) sorozat *monoton növekedő* és *felülről nem korlátos* [monoton csökkenő és alulról nem korlátos], akkor

$$\lim(a_n) = +\infty \qquad [\lim(a_n) = -\infty].$$

42. Milyen műveleti tételeket ismer konvergens sorozatokra?

Válasz. Ha az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergensek és $\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}$, $\lim(b_n) =: B \in \mathbb{R}$, akkor

1^o az $(a_n + b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim(a_n + b_n) = A + B$;

2^o az $(a_n b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim(a_n b_n) = A \cdot B$;

3^o ha még $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és $B \neq 0$ is teljesül, akkor az $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat is konvergens és $\lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{A}{B}$.

43. Igaz-e az, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ is divergens.

Válasz. Igen, mert ha $(a_n + b_n)$ konvergens lenne, akkor $(a_n + b_n - a_n) = (b_n)$ is konvergens lenne.

44. Fogalmazza meg sorozatok összegének határértékére vonatkozó állítást.

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak *van határértéke*, és

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor az $(a_n + b_n)$ sorozatnak is van határértéke, és $\lim(a_n + b_n) = A + B$, feltéve hogy $A + B$ értelmezve van.

45. Táblázattal szemléltesse a sorozatok szorzatának a határértékére vonatkozó állítást.

Válasz.

<table>
<tr><th>szorzat</th><th>$A>0$</th><th>$A=0$</th><th>$A<0$</th><th>$A=+\infty$</th><th>$A=-\infty$</th></tr>
<tr><td>$B>0$</td><td colspan="3" rowspan="3">$A\cdot B$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$B=0$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>$B<0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$B=+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td rowspan="2"></td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$B=-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

46. Fogalmazza meg a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt.

Válasz. Minden korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.

47. Definiálja a Cauchy-sorozatot.

Válasz. Az (a_n) sorozatot Cauchy-sorozat, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\, m, n \geq n_0 : \qquad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

48. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot.

Válasz. Egy valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

49. Hogyan értelmeztük az e számot?

Válasz. Az $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, tehát konvergens. e-vel jelöljük ennek a sorozatnak a határértékét:

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

50. Milyen állítást ismer a (q^n) mértani sorozat határértékével kapcsolatosan?

Válasz.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n \begin{cases} = 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ = 1, & \text{ha } q = 1 \\ = +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ \text{nem létezik,} & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

51. Milyen nevezetes sorozatokat tekintettünk a nagyságrendi kérdésekkel kapcsolatosan?

Válasz. **1°** Ha $k \in \mathbb{N}$ és $a > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

2° Ha $k \in \mathbb{N}$ és $|q| < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot q^n = 0$.

3° Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

4° $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

52. Fogalmazza meg egy valós szám m-edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt.

Válasz. Ha $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, akkor $\forall\ A \geq 0\ \ \exists!\ \ \alpha \geq 0 :\ \ \alpha^m = A$.

53. Legyen $A > 0, 1 < m \in \mathbb{N}$. Melyik az a sorozat, amelynek határértéke $\sqrt[m]{A}$?

Válasz.

$$\begin{cases} x_0 > 0, \\ x_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{x_n^{m-1}} + (m-1)x_n\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

• Végtelen sorok

54. Mi a végtelen sor definíciója?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot nevezzük az (a_n) által generált végtelen sornak.

55. Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, és hogyan értelmezzük az *összegét*?

Válasz. A $\sum a_n$ sor konvergens, ha a részletösszegeinek az $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozata konvergens. A $\lim(s_n)$ számot nevezzük a sor összegének.

56. Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor konvergenciájáról?

Válasz. A $\sum\limits_{n=0} q^n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor $\frac{1}{1-q}$ az összege.

57. Mi a *teleszkópikus sor* és mi az összege?

Válasz. A $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ sor és az összege $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

58. Igaz-e az, hogy ha $\lim(a_n) = 0$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens?

Válasz. Nem, a $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens és $\lim(\frac{1}{n}) = 0$.

59. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *összehasonlító kritériumokat.*

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) sorozatokra

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq N: \qquad 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor, ha

1. a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens;
2. a $\sum a_n$ sor divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens.

60. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *gyökkritériumot.*

Válasz. Tekintsük a $\sum a_n$ sort, és tegyük fel, hogy létezik az $A := \lim\big(\sqrt[n]{|a_n|}\big) \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. ekkor

1^o $0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;

2^o $A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens;

3^o $A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is és divergens is.

61. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *hányadoskritériumot.*

Válasz. Tekintsük a $\sum a_n$ sort, és tegyük fel, hogy $a_n \neq 0 \;\; (n \in \mathbb{N})$, továbbá létezik az $A := \lim\big(\frac{a_{n+1}}{a_n}\big) \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. Ekkor

1^o $0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;

2^o $A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens;

3^o $A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is és divergens is.

62. Mik a Leibniz-típusú sorok és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?

Válasz. Ha $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \;\; (n \in \mathbb{N})$, akkor a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ sort nevezzük Leibniz-típusú sornak. Ezek akkor és csak akkor konvergensek, ha $\lim(a_n) = 0$. Ha $A := \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$, akkor

$$\Big|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\Big| \leq a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

63. Adjon meg egy olyan végtelen sort, amelyik konvergens, de nem abszolút konvergens.

Válasz. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

64. Adjon meg egy olyan végtelen sort, amelyiknek az összege az e szám.

Válasz. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$

65. Fogalmazza meg a *feltételesen konvergens* sorok átrendezésére vonatkozó Riemann-tételt.

Válasz. Ha $\sum a_n$ feltételesen konvergens, akkor

1^o $\forall\ A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén $\exists\ \sum a_{p(n)}$ átrendezés, hogy $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{p(n)} = A$;

2^o $\exists\ \sum a_{p(n)}$ átrendezés, ami divergens.

66. Milyen állítást ismer *abszolút konvergens* sorok átrendezésével kapcsolatban?

Válasz. Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor minden $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció esetén a $\sum a_{p(n)}$ sor is konvergens és $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{p(n)}$.

67. Definiálja a $\sum_{n=0} a_n$, $\sum_{n=0} b_n$ sorok *téglányszorzatát.*

Válasz. A $\sum_{n=0} t_n$, $\quad t_n := \sum_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j \ (n \in \mathbb{N})$ sor.

68. Definiálja a $\sum_{n=0} a_n$, $\sum_{n=0} b_n$ sorok *Cauchy-szorzatát.*

Válasz. A $\sum_{n=0} c_n$, $\quad c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j \ (n \in \mathbb{N})$ sor.

69. Adjon meg olyan végtelen sorokat, amelyek Cauchy-szorzata divergens.

Válasz. A $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergens sor önmagával vett Cauchy-szorzata divergens.

70. Fogalmazza meg az *abszolút konvergens* sorok szorzatára vonatkozó *Cauchy-tételt.*

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0} a_n$ és a $\sum_{n=0} b_n$ sorok mindegyike *abszolút konvergens.* Ekkor

(a) a $\sum_{n=0} t_n$ téglányszorzatuk is abszolút konvergens,

(b) a $\sum_{n=0} c_n$ Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens,

(c) az összes $a_i b_j$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ szorzatból *tetszés szerinti* sorrendben képzett $\sum_{n=0} d_n$ végtelen sor is abszolút konvergens, és az összeg mindegyik esetben a tényezők összegének a szorzata:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

71. Fogalmazza meg a *Mertens-tételt.*

Válasz. Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum c_n$ Cauchy-szorzatuk konvergens és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

• Hatványsorok, elemi függvények

72. Írja le a *hatványsor* definícióját.

Válasz. Az $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénysort a középpontú, α_n együtthatójú ***hatványsornak*** nevezzük.

73. Fogalmazza meg a *Cauchy–Hadamard-tételt.*

Válasz. Tetszőlegesen megadott (α_n) sorozattal és $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmazára a következő három egymást kizáró esetek egyike érvényes:

(a) $\exists\, R > 0$ valós szám, hogy a sor $|x-a| < R$ esetén abszolút konvergens, $|x-a| > R$ esetén pedig divergens;

(b) a sor csak az $x = a$ pontban konvergens (legyen ekkor $R := 0$);

(c) a sor $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens (ekkor $R := +\infty$).

Az R számot a hatványsor ***konvergenciasugarának*** nevezzük.

74. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum.

Válasz. $\sum x^n$.

75. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum.

Válasz. $\sum \frac{(-1)^n}{n}\, x^n$.

76. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1)$ intervallum.

Válasz. $\sum \frac{x^n}{n}$.

77. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum.

Válasz. $\sum \frac{x^n}{n^2}$.

78. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyik csak az $a = 2$ pontban konvergens.

Válasz. $\sum n^n (x-2)^n$.

79. Definiálja az exp függvényt.

Válasz. $\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$.

80. Írja fel az exp függvény *függvényegyenletét*.

Válasz. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \ (x, y \in \mathbb{R})$.

81. Definiálja a sin függvényt.

Válasz. $\sin x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$.

82. Definiálja a cos függvényt.

Válasz. $\cos x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})$.

83. Írja fel $\sin(x+y)$-t $\sin x, \cos x$, $\sin y, \cos y$ segítségével.

Válasz. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \ \ (x, y \in \mathbb{R})$.

• Függvény határértéke

84. Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?

Válasz. Az a bármely környezetében végtelen sok H-beli elem van.

85. Mivel egyenlő az $\mathbb{R}'$, a $\mathbb{Q}'$ és az $\left(\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)'$ halmaz?

Válasz. $\mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$ és $\left(\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)' = \{0\}$.

86. Adott $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathcal{D}_f'$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén mi a definíciója a $\lim_a f = A$ egyenlőségnek?

Válasz. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in k_\varepsilon(A)$.

87. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x-a| < \delta : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

88. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f \cap \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = +\infty \iff \forall\, P > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\, 0 < |x-a| < \delta : \quad f(x) > P.$$

89. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f \cap \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = -\infty \iff \forall\, P < 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\, 0 < |x-a| < \delta : \quad f(x) < P.$$

90. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, +\infty \in \mathcal{D}'_f, A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 > 0 \;\; \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

91. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, -\infty \in \mathcal{D}'_f, A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_{-\infty} f = A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 < 0 \;\; \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

92. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, +\infty \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \iff \forall\, P > 0 \;\; \exists\, x_0 > 0 \;\; \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : \quad f(x) > P.$$

93. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, +\infty \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = -\infty \iff \forall\, P < 0 \;\; \exists\, x_0 > 0 \;\; \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : \quad f(x) < P.$$

94. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, -\infty \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor:

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \iff \forall\, P > 0 \;\; \exists\, x_0 < 0 \;\; \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 : \quad f(x) > P.$$

95. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, -\infty \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor:

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \iff \forall\, P < 0 \;\; \exists\, x_0 < 0 \;\; \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 : \quad f(x) < P.$$

96. Írja le a függvény határértékére vonatkozó átviteli elvet.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor

$$\lim_a f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim(x_n) = a \text{ esetén } \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = A.$$

97. Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \quad \big(x \in k_R(a)\big)$$

az összegfüggvény. Ekkor bármely $b \in k_R(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_b f$ határérték és $\lim\limits_b f = f(b)$.

98. Mit lehet mondani monoton *növekedő* függvény határértékéről?

Válasz. Legyen (α, β) tetszőleges intervallum, $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény. Ekkor f-nek minden $a \in (\alpha, \beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke, és

$$\lim_{a+0} f = \inf\big\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f,\ x > a\big\},$$
$$\lim_{a-0} f = \sup\big\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f,\ x < a\big\}.$$

99. Mit lehet mondani monoton *csökkenő* függvény határértékéről?

Válasz. Legyen (α, β) tetszőleges intervallum, $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ egy monoton csökkenő függvény. Ekkor f-nek minden $a \in (\alpha, \beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke is és

$$\lim_{a+0} f = \sup\big\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f,\ x > a\big\},$$
$$\lim_{a-0} f = \inf\big\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f,\ x < a\big\}.$$

• Függvények folytonossága

100. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát.

Válasz. Egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ \forall\ x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

101. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

Válasz. Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor $f \in C\{a\} \iff \exists\ \lim\limits_a f$ és $\lim\limits_a f = f(a)$.

102. Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

Válasz. Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden belső pontjában folytonos.

103. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

Válasz. $f \in C\{a\} \iff \forall\,(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ esetén $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

104. Fogalmazza meg a hányadosfüggvény pontbeli folytonosságára vonatkozó tételt.

Válasz. Ha $f, g \in C\{a\}$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C\{a\}$.

105. Milyen tételt ismer az összetett függvény pontbeli folytonosságáról?

Válasz. $g \in C\{a\},\ f \in C\{g(a)\} \implies f \circ g \in C\{a\}$.

106. Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n, akkor f korlátos $[a, b]$-n.

107. Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

Válasz. Tegyük fel, hogy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f-nek létezik abszolút maximuma és abszolút minimuma.

108. Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ($a < b, a, b \in \mathbb{R}$). Ha f a két végpontban különböző előjelű értéket vesz fel, vagyis $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = 0$.

109. Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *megszüntethető szakadási helye* van, ha

$$\exists \lim_a f \quad \text{és ez véges, de} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

110. Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.

Válasz. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *elsőfajú szakadási helye* (vagy *ugráshelye*) van, ha

$$\exists \lim_{a+0} f \text{ és } \exists \lim_{a-0} f, \quad \text{mindkettő véges, de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

111. Mit tud mondani *monoton* függvény szakadási helyeiről?

Válasz. Tetszőleges $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton függvénynek legfeljebb elsőfajú szakadási helyei lehetnek; azaz tetszőleges $a \in (\alpha, \beta)$ pontban az f függvény vagy folytonos vagy pedig elsőfajú szakadási helye (vagy ugráshelye) van.