'A'

1. Igaz-hamis állítások (1p; -1p, ha rossz; +1p, ha $\forall$ jó)
   - A konkatenáció kommutatív művelet **H**
   - $(L - \varepsilon)^* = L^* - \varepsilon$ **H**
   - $\forall$ determinisztikus automata nemdeterminisztikus is **H**
2. Rövid definícók (2p; 1p; 1p)
   - *Formális nyelvtan*
     Formális nyelvtan alatt a következő négyest értjük: $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S\rangle$, ahol
     - T a terminális jelek,
     - N a nyelvtani jelek halmaza (mindkettő véges és $T \cap N = \emptyset$),
     - $\mathcal{P}$ véges szabályhalmaz,
     - $S \in N$ a kezdőszimnbólum.

     $P \in \mathcal{P} : p \to q$, ahol $p, q \in (T \cup N)^*$, p tartalmaz nyelvtani jelet.
   - *Közvetlen levezetés*
     Az α mondatformából közvetlenül levezethető a β mondatforma, ha $\exists\, \gamma_1 \wedge \gamma_2$ mondatformák és $p \to q \in \mathcal{P}$, hogy $\alpha = \gamma_1 p \gamma_2$ és $\beta = \gamma_1 q \gamma_2$.
     Jelölése: $\alpha \underset{G}{\to} \beta$
   - *Generált nyelv*
     A G nyelvtan által generált nyelv: $L(G) = \{u \in T^* | S \overset{*}{\underset{G}{\to}} u\}$
3. Hosszú definícó (5p)
   - *Knuth-Morris-Pratt automata célja és konstrukciója*
     A KMP automata egy un. mintafelismerő (mintaillesztő) VDA:

     $$\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$$

     Általánosan: Legyen w a felismeredő minta, az állapotok halmaza legyen $Q := \{q_u | u \in Pre(w)\}$, a kezdőállapot $q_0 = q_\varepsilon$, az egyetlen elfogadó állapot $F := \{q_w\}$. Egy tetszőleges $t \in T$ betűire pedig $\delta(q_u, t)$ legyen q_v, ahol v a $Suf(ut) \cap Pre(w)$ halmaz leghosszabb szava.
4. Hányas típusú nyelvtan? (2p; -1p, ha rossz)
   - Helyes zárójelezések nyelve **2**
   - 4-el osztható decimális számok nyelve **3**
   - Tetszőleges rekurzívan felsorolható nyelv **0**
   - $\{b^m a^n b^n; n, m \geqslant 0\}$ **2**

5. Milyen nyelvet generál? (5p; 3p)

- $S \to BCJ$, $C \to XCY|YX$, $XY \to YaX$, $aY \to Ya$, $Xa \to aX$, $BY \to aB$, $XJ \to Ja$, $B \to a$, $J \to a$
  $L_1 = \{a^{(n^2)} | n \geqslant 2\}$
- $S \to SAa$, $S \to X$, $XA \to bX|b$, $aA \to Aa$
  $L_2 = \{b^n a^n | n \geqslant 1\}$

6. Bizonyítás (4p kimondás + 0-7p bizonyítás)

- *nagy Bar-Hillel lemma*

  Tétel:
  $\forall L \in \mathcal{L}_2$ nyelvhez $\exists\, p = p(L) \wedge q = q(L) \in \mathbb{N}$ nyelvfüggő konstansok, hogy $\forall u \in L$, $\ell(u) \geqslant p$ szó esetén $\exists\, u$-nak olyan $u = xyzvw$ felbontása $(x, y, z, v, w \in T(L)^*)$, melyre
  - $\ell(yzv) \leqslant q$,
  - $\ell(yv) > 0$,
  - $\forall i \in \mathbb{N}$ esetén $xy^i zv^i w \in L$.

  Bizonyítás:
  Mivel $L \in \mathcal{L}_2$, ezért $\exists\, G$ Chomsky-NF nyelvtan, melyre $L(G) = L$
  Legyen $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S \rangle$, $p := 2^{|N|-1}$ és $q := 2^{|N|}$ konstansok.
  Legyen $u \in L$ olyan, hogy $\ell(u) > p$.
  Tudjuk, hogy u-hoz $\exists$ olyan G feletti t szintaxisfa, melyre $gy(t) = S$ és $front(t) = u$. A levelek elhagyásával keletkezett maradékfa $red(t)$, és t bináris fa, hiszen G Chomsky NF.
  Becsüljük meg t magasságát $front(t)$ hossza segítségével: $h(t) = 1 + h(red(t)) \geqslant 1 + \log_2 \ell(front(red(t))) = 1 + \log_2 \ell(front(t)) = 1 + \log_2 \ell(u)$. De $\log_2 \ell(u) > \log_2 2^{|N|-1} = |N| - 1 \Rightarrow h(t) > |N|$
  A leghosszabb úton t-ben $|N| + 2$ pont van, közülük az egyik terminális $\Rightarrow \exists$ ismétlődő nyelvtani jel. Válasszuk ki a leghosszabb úton alulról az először ismétlődő nyelvtani jel párt. Legyen ez A és vegyük azt a két részfát, melyben A a gyökér (legyenek t_1 és t_2). Ezek $front(t)$-t, tehát u-t öt részre osztják, melyeket x, y, z, v, w-vel jelöltünk, ekkor:
  (a) $S \xrightarrow[G]{*} xAw$, $t - t_1$-ből
  (b) $A \xrightarrow[G]{*} yAv$, $t_1 - t_2$-ből ($\Rightarrow \ell(yv) > 0$, egyébként $\neg$ Chomsky NF)
  (c) $A \xrightarrow[G]{*} z$, t_2-ből
  Az első és a harmadik levezetést egyszer, a másodikat i-szer alkalmazva: $xy^i zv^i w \in L(G)$.
  Bizonyítani kell még, hogy $\ell(yzv) \leqslant q$, amihez megbecsüljük t_1 magasságát ($sz(t)$ a fa szintjeinek száma):

  $$sz(t_1) \leqslant |N| + 1 + 1 \Rightarrow h(t_1) \leqslant |N| + 1$$

  Ebből következik, hogy $|N| \geqslant h(t_1) - 1 = h(red(t_1)) \geqslant \log_2 \ell(front(red(t_1))) = \log_2 \ell(front(t_1)) = \log_2 \ell(yzv)$.
  Azaz: $q = 2^{|N|} \geqslant \ell(yzv)$

'B'

1. Igaz-hamis állítások (1p; -1p, ha rossz; +1p, ha $\forall$ jó)
   - A konkatenáció asszociatív művelet **I**
   - $(L - \varepsilon)^+ = L^* - \varepsilon$ **I**
   - $\forall$ nemdeterminisztikus automata determinisztikus is **H**
2. Rövid definícók (2p; 1p; 1p)
   - *Formális nyelvtan*
     Formális nyelvtan alatt a következő négyest értjük: $G = \langle T, N, \mathcal{P}, S \rangle$, ahol
     - T a terminális jelek,
     - N a nyelvtani jelek halmaza (mindkettő véges és $T \cap N = \emptyset$),
     - $\mathcal{P}$ véges szabályhalmaz,
     - $S \in N$ a kezdőszimnbólum.

     $P \in \mathcal{P} : p \rightarrow q$, ahol $p, q \in (T \cup N)^*$, p tartalmaz nyelvtani jelet.
   - *Közvetett levezetés*
     Az α mondatformából közvetetten levezethető a β mondatforma, ha $\exists\ k \in \mathbb{N}$ és $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ mondatformák, hogy $\alpha = \gamma_0, \beta = \gamma_k$ és $\forall i \in [0, k-1]$ esetén $\gamma_i \underset{G}{\rightarrow} \gamma_{i+1}$. Jelölése: $\alpha \overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}} \beta, (\alpha \overset{k}{\underset{G}{\rightarrow}} \beta)$.
   - *Generált nyelv*
     A G nyelvtan által generált nyelv: $L(G) = \{u \in T^* | S \overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}} u\}$
3. Hosszú definícó (5p)
   - *T ábécé feletti véges L nyelvet felismerő VDA konstrukciója*
     VDA alatt a következő ötöst értjük: $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, ahol
     - Q az állapotok véges halmaza,
     - T egy ábécé, a bemenő ábécé,
     - $\delta : Q \times T \rightarrow Q$ az állapotátmeneti függvény,
     - $q_0 \in Q$ kezdőállapot,
     - $F \subseteq Q$ a végállapotok halmaza.

     L véges nyelv esetén:
     - $Q = \{q_u | u \in Pre(L)\} \cup \{q_{zs}\}$,
     - $T = T(L)$,
     - $\delta(q_u, t) = q_{ut}$, ha $ut \in Pre(L)$, $\wedge$ q_{zs}, ha $ut \notin Pre(L)$
     - $q_0 = q_\varepsilon$
     - $F = \{q_u | u \in L\}$
4. Hányas típusú nyelvtan? (2p; -1p, ha rossz)
   - Tetszőleges parciálisan rekurzív nyelv **0**
   - $\{b^n a^m b^m ; n, m \geqslant 0\}$ **2**
   - 2 zárójelpár feletti helyes zárójelezések nyelve **2**
   - 5-el osztható decimális számok nyelve **3**

5. Milyen nyelvet generál? (5p; 3p)

   - $S \to LX$, $X \to aAX|aA|bBX|bB$, $aA \to Aa$, $aB \to Ba$, $bA \to Ab$, $bB \to Bb$, $LA \to aL|a$, $LB \to bL|b$
     $L_1 = \{v|v = uu, u \in T^+\}$ (dadogós nyelv)
   - $S \to Aa|Bb$, $A \to Bb|b$, $B \to Aa|a$
     $L_2 = L\left(\left((ab)^*(a \cup \varepsilon)\right) \cup \left((ba)^*(b \cup \varepsilon)\right)\right)$
     (talán lehetne rövidíteni, de fölösleges)

6. Bizonyítás (4p kimondás + 0-7p bizonyítás)

   - *Myhill-Nerode tétel*

     Tétel:
     $L \in \mathcal{L}_3 \Leftrightarrow |\{L_p\}_{p\in T^*}| < \infty$, ahol $T = T(L)$ az L nyelv ábécéje

     Bizonyítás:
     „$\Longleftarrow$"

     Konstruáljunk egy VDA-t, melynek állapothalmaza $\{L_p\}_{p\in T^*}$:
     $\mathcal{A}_*^L = \langle \{L_p\}_{p\in T^*}, T, \delta, L_\varepsilon, F\rangle$,
     ahol $F := \{L_p|\varepsilon \in L_p\}$ és $\delta(L_p, t) := L_{pt}$
     Ekkor $\mathcal{A}_*^L$ tulajdonságai:

     (a) δ jól definiált, azaz $L_p = L_q$ esetén $\delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.
     Ugyanis $L_p = L_q \Longrightarrow (L_p)_t = (L_q)_t \Longrightarrow L_{pt} = L_{qt} \Longrightarrow \delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.

     (b) $\forall u \in T^*$ esetén $\delta(L_p, u) = L_{pu}$.
     A δ definíciója segítségével az u hosszára vonatkozó teljes indukcióval belátható.

     (c) $L_p \in F \Leftrightarrow p \in L$.

     Már csak azt kell belátni, hogy $L(\mathcal{A}_*^L) = L$. Ez könnyen igazolható:

     $$L(\mathcal{A}_*^L) \Leftrightarrow \delta(L_\varepsilon, u) \in F \Leftrightarrow L_{\varepsilon u} = L_u \in F \Leftrightarrow u \in L$$

     „$\Longrightarrow$"

     Legyen $L \in \mathcal{L}_3$, így $\exists \mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$ VDA, melyre $L = L(\mathcal{A})$.
     Ekkor biztosan $|\{L_q^{\mathcal{A}}\}_{q\in Q}| \leqslant |Q| < \infty$, mert $\mathcal{A}$ véges.
     Vegyük tetszőleges $u \in T^*$-re az L_u maradéknyelvet.
     Ekkor $L_u = (L_{q_0}^{\mathcal{A}})_u = L_{\delta(q_0,u)}^{\mathcal{A}}$. Így fennáll, hogy

     $$\{L_u\}_{u\in T^*} \subseteq \{L_q^{\mathcal{A}}\}_{q\in Q},$$

     amivel a tételt beláttuk.

'C'

1. Igaz-hamis állítások (1p; -1p, ha rossz; +1p, ha $\forall$ jó)
   - $\forall$ nyelvtannal leírható nyelv rekurzívan felsorolható **I**
   - $\forall$ rekurzív nyelv Chomsky 2. típusú **H**
   - $\forall$ környezetfüggő nyelvtannal leírt nyelv rekurzív **H**
2. Rövid definícók (2p; 1p; 1p)
   - *Véges determinisztikus automata*
     VDA alatt a következő ötöst értjük: $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, ahol
     - Q az állapotok véges halmaza,
     - T egy ábécé, a bemenő ábécé,
     - $\delta : Q \times T \to Q$ az állapotátmeneti függvény,
     - $q_0 \in Q$ kezdőállapot,
     - $F \subseteq Q$ a végállapotok halmaza.
   - *Az átmeneti függvény rekurzív kiterjesztése*
     Általánosított állapotátmeneti függvény:
     $$\delta : Q \times T^* \to Q$$
     (az állapotátmeneti függvény egyértelműen meghatározza, annak kiterjesztése; rekurzív definíció)
     (a) Ha $\ell(u) = 0$, akkor $\delta(q, u) = q$,
     (b) Ha $\ell(u) = 1$, akkor $\delta(q, u)$ mint az eddigiekben.
     (c) Ha $u = tv$, $t \in T$, $v \in T^+$, akkor legyen $\delta(q, u) = \delta(\delta(q, t), v)$.
   - *A VDA által felismert nyelv*
     $\mathcal{A}$ felismer egy u szót, ha $\delta(q_0, u) \in F$
3. Hosszú definícó (5p)
   - *Adja meg a 3. típusú nyelvek osztályának a metszet műveletre való zártságát bizonyító konstrukciót!*
     Legyenek $\mathcal{A}_i = \left\langle Q_i, T, \delta_i, q_0^{(i)}, F_i \right\rangle$ VDA-k, ahol $i = 1, 2$
     (az input ábécék azonosak, hiszen különben mindketten kiterjeszthetőek lennének az unió ábécére)
     Innen konstruálni kell egy $\mathcal{A}_\cap$ automatát, melyre fennáll, hogy
     $$L(\mathcal{A}_\cap) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$$
     Legyen $\mathcal{A}_\cap = \left\langle Q_1 \times Q_2, T, \delta_1 \times \delta_2, (q_0^{(1)}, q_0^{(2)}), F_\cap \right\rangle$ ún. direkt szorzat automata.
     Működés: $(\delta_1 \times \delta_2)((q_1, q_2), t) = (\delta_1(q_1, t), \delta_2(q_2, t))$
     Végállapotok halmaza: $F_\cap := F_1 \times F_2$
4. Hányas típusú nyelvtan? (2p; -1p, ha rossz)
   - A legfeljebb 30 hosszúságú helyes zárójelzések nyelve **3**
   - Tetszőleges parciálisan rekurzív nyelv **0**
   - Általánosított szekvenciális automatával felismert nyelv **3**
   - $\{a^n b^n c^n; n \geqslant 1\}$ **1**

5. Milyen nyelvet generál? (3p; 5p)

   - $S \to Ac|Bd$, $A \to Bd|d$, $B \to Ac|c$
     $L_1 = L\left(\left((cd)^*(c \cup \varepsilon)\right) \cup \left((dc)^*(d \cup \varepsilon)\right)\right)$
     (talán lehetne rövidíteni, de fölösleges)
   - $S \to BDaJ$, $Da \to aaaD$, $DJ \to EJ$, $aE \to Eaaa$, $BE \to BD$, $BD \to \varepsilon$, $EJ \to \varepsilon$, $B \to \varepsilon$, $J \to \varepsilon$
     $L_2 = \{\left(a^3\right)^n | n \geqslant 0\}$

6. Bizonyítás (4p kimondás + 0-7p bizonyítás)

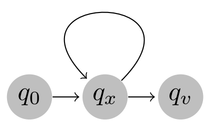
   - *kis Bar-Hillel lemma*

     Tétel:
     $\forall L \in \mathcal{L}_3$ nyelvhez $\exists n = n(L) \in \mathbb{N}$ nyelvfüggő konstans, hogy $\forall u \in L$, $\ell(u) \geqslant n$ szó esetén $\exists$ u-nak olyan $u = xyz$ felbontása ($x, y, z \in T(L)^*$), melyre
     - $\ell(xy) \leqslant n$,
     - $\ell(y) > 0$,
     - $\forall i \in \mathbb{N}$ esetén $xy^iz \in L$.

     Bizonyítás:
     Mivel $L \in \mathcal{L}_3$, ezért $\exists$ hozzá VDA, melyre $L(\mathcal{A}) = L$.
     Legyen $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, és $n := |Q| (= n(L) > 0)$.
     (Itt $\ell(xy) \leqslant n = |Q|$) Legyen $u \in L = L(\mathcal{A})$ és $\ell(u) \geqslant n$.
     Tegyük fel, hogy $u = t_1 \dots t_m$, ahol $t_i \in T$ ($i \in [1, m]$) és $m \geqslant n$. Innét a átmenet (leegyszerűsítve):

     $$a_0 \xrightarrow{t_1} a_1 \dots \xrightarrow{t_m} a_m \ (a_m \in F)$$

     Innét az $(a_0, a_1, a_2 \dots a_{m-1}, a_m)$ sorozatot $m + 1 \geqslant n + 1$ elemű.
     A skatulyaelv alapján $\exists j \wedge k : 0 \leqslant j < k \leqslant n \wedge a_j = a_k \Leftarrow n = |Q|$.
     Legyenek $x = a_1 \dots a_j$, $y = a_{j+1} \dots a_k$ és $z = a_{k+1} \dots a_m$.
     (Ha $j = 0 \Rightarrow x = \varepsilon$; ha $j = m \Rightarrow z = \varepsilon$. $j \wedge k$ választása miatt: $0 < \ell(y)$)
     Innét $\forall i \in \mathbb{N}$ esetén $\delta(q, xy^iz) = a_m \in F \Rightarrow xy^iz \in L$ (ahol q_0 a kezdőállapot, $q_x (= q_j = q_k)$ az az állapot, mely i-szer ismétlődhet és $q_v (= q_m)$ a végállapot):



     $\ell(xy) = k - j > 0$

'D'

1. Igaz-hamis állítások (1p; -1p, ha rossz; +1p, ha $\forall$ jó)
   - $\forall$ reguláris nyelv 3. típusú **I**
   - $\forall$ rekurzív nyelv Chomsky 2. típusú **H**
   - $\forall$ környezetfüggő nyelvtannal leírt nyelv rekurzív **I**

2. Rövid definícók (2p; 1p; 1p)
   - *Veremautomata (1 veremmel)*
     Veremautomata alatt a következő hetest értjük: $\mathcal{V} = \langle Q, T, \Sigma, \delta, q_0, \sigma_0, F \rangle$, ahol
     - Q az állapotok véges halmaza
     - T egy ábécé, a bemenő ábécé
     - Σ a verem ábécéje
     - δ állapotátmeneti függvény, $\delta : Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \to 2^{Q \times \Sigma^*}$
     - $q_0 \in Q$ kezdőállapot
     - $\sigma_0 \in \Sigma$ a verem kezdőszimbóluma
     - $F \subseteq Q$ a végállapotok halmaza
   - *Üres veremmel elfogadó konfiguráció*
     $\mathcal{V}$ üres veremmel elfogad egy u szót: $\exists q \in Q : (q, \varepsilon) \in \Delta(q_0, u, \sigma_0)$.
   - *Veremautomatában végállapottal felismert nyelv*
     $\mathcal{V}$ végállapottal elfogad egy u szót, ha

     $$\{q \in Q | \exists \beta \in \Sigma^*, (q, \beta) \in \Delta(q_0, u, \sigma_0)\} \cap F \neq \emptyset$$

3. Hosszú definícó (5p)
   - *Adja meg a 3. típusú nyelvek osztályának a különbség műveletre való zártságát bizonyító konstrukciót!*
     Legyenek $\mathcal{A}_i = \left\langle Q_i, T, \delta_i, q_0^{(i)}, F_i \right\rangle$ VDA-k, ahol $i = 1, 2$
     (az input ábécék azonosak, hiszen különben mindketten kiterjeszthetőek lennének az unió ábécére)
     Innen konstruálni kell egy $\mathcal{A}_/$ automatát, melyre fennáll, hogy

     $$L(\mathcal{A}_/) = L(\mathcal{A}_1)/L(\mathcal{A}_2)$$

     Legyen $\mathcal{A}_/ = \left\langle Q_1 \times Q_2, T, \delta_1 \times \delta_2, (q_0^{(1)}, q_0^{(2)}), F_/ \right\rangle$ ún. direkt szorzat automata.
     Működés: $(\delta_1 \times \delta_2)((q_1, q_2), t) = (\delta_1(q_1, t), \delta_2(q_2, t))$
     Végállapotok halmaza: $F_/ := F_1 \times (Q_2/F_2)$

4. Hányas típusú nyelvtan? (2p; -1p, ha rossz)
   - $\{uu; u \in \{a, b\}^*$ és $\ell(u) \leqslant 100\}$ **3**
   - $\{uu^{-1}; u \in \{a, b\}^*$ és $\ell(u) > 0\}$ **2**
   - Tetszőleges parciálisan rekurzív nyelv **0**
   - $\{c^m a^m b^m; m \geqslant 0\}$ **1**

5. Milyen nyelvet generál? (5p; 3p)

   - $S \rightarrow aSA|bSB|M$, $MA \rightarrow Ma|a$, $MB \rightarrow Mb|b$, $aA \rightarrow Aa$, $aB \rightarrow Ba$, $bA \rightarrow Ab$, $bB \rightarrow Bb$
     $L_1 = \{v|v = uu, u \in T^+\}$ (dadogós nyelv)
   - $S \rightarrow aC|bD$, $C \rightarrow bD|b$, $D \rightarrow aC|a$
     $L_2 = L\left(\left((ab)^*(a \cup \varepsilon)\right) \cup \left((ba)^*(b \cup \varepsilon)\right)\right)$
     (talán lehetne rövidíteni, de fölösleges)

6. Bizonyítás (0-11p bizonyítás)

   - *Nem $\forall$ nyelv írható le nyelvtannal ($\mathcal{L}_\Sigma \supset \mathcal{L}_0$)*

     Bizonyítás:

     Ehhez elég belátnunk, hogy tetszőleges T ábécé esetén $\mathcal{L}_0^T \subset 2^{T^*}$. Mivel T^* megszámlálható számosságú, ezért hatványhalmaza, 2^{T^*} biztosan megszámlálhatónál nagyobb számosságú. Emiatt elég belátni, hogy $\mathcal{L}_0^T$ legfeljebb megszámlálható számosságú.

     Legyen $\hat{N}$ a potenciális nyelvtani jelek megszámlálható halmaza, melyre $\hat{N} \cap T = \emptyset$. Legyen $\mathcal{N}y := \{G|G$ nyelvtani jelei $\hat{N}$-ből, terminális jelei pedig T-ből valók$\}$.

     Megállapítás: $\forall L \in \mathcal{L}_0$, $\exists G \in \mathcal{N}y : L(G) = L$.
     Köv.: $|\mathcal{N}y| \geqslant |\mathcal{L}_0^T| \Rightarrow$ csak azt kell belátni, hogy $\mathcal{N}y$ megszámlálható.

     Egy $G \in \mathcal{N}y$ nyelvtan a következőképpen írhatunk fel:

     $$G = \langle \{t_1, \ldots, t_k\}, \{A_1, \ldots, A_n\}, \{x_1 \ldots x_l \longrightarrow y_1 \ldots y_s \ldots\}, S \rangle\,,$$

     ezért G-t tekinthetjük az $X := \hat{N} \cup T \cup \{\langle ; \rangle\, ; , ; \{ ; \} ; \rightarrow\}$ megszámlálható halmazból vett véges jelek sorozatának. Tehát $\mathcal{N}y \subseteq X^*$, amiből következik, hogy $|\mathcal{N}y| \leqslant |X^*|$.
     X^*-ről viszont tudjuk, hogy maga is megszámlálható számosságú.

'++'

1. Bizonyítás (4p kimondás + 0-7p bizonyítás)

   - *Kleene tétel*

     Tétel:
     $\mathcal{L}_{REG} = \mathcal{L}_3$

     Bizonyítás:
     A kétirányú tartalmazást látjuk be.

     „$\subseteq$"

     Be kell látni, hogy $\mathcal{L}_3$ rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

     (a) Tudunk adni 3-as típusú nyelvtant az elemi nyelvekhez:
       - $\mathcal{P} = \{S \to t\}$, ha $L = \{t\}$
       - $\mathcal{P} = \{S \to \varepsilon\}$, ha $L = \{\varepsilon\}$
       - $\mathcal{P} = \emptyset$, ha $L = \emptyset$

     (b) $\mathcal{L}_3$ zárt a reguláris műveletekre. (külön tételként)

     „$\supseteq$"

     Tudjuk, hogy $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{DA} \Rightarrow$ elegendő tetszőleges $\mathcal{A}$ VDA esetén belátni, hogy $L(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{REG}$.
     Számozzuk meg az automata állapotait a következőképpen:

     $$\mathcal{A} = \left\langle \{q_1, \ldots, q_n\}, T, \delta, q_1, \{a_{i_j}\}_{j=1}^{s} \right\rangle$$

     Vezessük be a következő jelölölést, ahol $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$ és $k \geqslant 0$:
     $L_{i,j}^{k} := \{u \in T^* : \delta(q_i, u) = q_j$, és közben az érintett állapotok indexe $\leqslant k\}$. A definíció alapján: $L_{i,j}^{n} = L_{i,j}^{n+1}$. A végállapotokta nézve az uniót:

     $$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{j=1}^{s} L_{1,i_j}^{n}$$

     Ha $\forall i \wedge j \wedge k$: igaz a regularitás $\Rightarrow L(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_{REG}$, hiszen $\mathcal{L}_{REG}$ zárt az unió műveletre. Az $L_{i,j}^{k}$-k regularitása külön bizonyítható.