Analízis 1. (BSc) **Az 1. zárthelyi** **2010. március 26.**

Programtervező informatikus szak

1. feladat. *Bizonyítsa be, hogy az*

$$A := \left\{ \frac{x^2-2}{3x^2+2} \;\Big|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz korlátos. Van-e a halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme? Határozza meg $\sup A$*-t és* $\inf A$*-t.*

Megoldás. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\frac{x^2-2}{3x^2+2} = \frac{\frac{1}{3}(3x^2+2) - \frac{2}{3} - 2}{3x^2+2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2},$$

ezért

$$(*) \qquad -1 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 0 + 2} \le \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2} < \frac{1}{3}.$$

A halmaz tehát valóban **korlátos**: -1 egy alsó és $\frac{1}{3}$ egy felső korlát.

A halmaznak **van legkisebb eleme**, ez az $x = 0$ értékhez tartozó -1 szám, tehát

$$\min A = \inf A = -1.$$

A-nak **nincs legnagyobb eleme**, mert A bármelyik eleménél van nagyobb A-beli elem. Valóban, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$A \ni \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2} < \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3(x+1)^2+2} \in A.$$

Mivel A nem üres, felülről korlátos halmaz, ezért van szuprémuma. A $(*)$-ból „sejthető”, hogy

$$\sup A = \frac{1}{3}.$$

Bizonyítás:

(i) Azt már láttuk, hogy $\frac{1}{3}$ egy felső korlát.

(ii) Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{3}$ a legkisebb felső korlát, azaz

$$(**) \qquad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, x \in \mathbb{R}: \quad \frac{x^2-2}{3x^2+2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2} > \frac{1}{3} - \varepsilon.$$

Valóban, ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2} > \frac{1}{3} - \varepsilon \iff \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2+2} < \varepsilon \iff x^2 > \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3\varepsilon} - 2\right),$$

ezért $(**)$ például az $x := \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{\varepsilon}}$ választással teljesül, tehát $\sup A = \frac{1}{3}$. ■

2. feladat. *Határozza meg a* $D := [0,2]$ *halmaznak az* $f(x) := \sqrt{|2x-1|}$ $(x \in \mathbb{R})$ *függvény által létesített ősképét.*

Megoldás. Halmaz függvény által létesített ősképének a definíciója alapján

$$f^{-1}[D] = \left\{ x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \le \sqrt{|2x-1|} \le 2 \right\},$$

és ez azt jelenti, hogy az $f^{-1}[D]$ halmaz a

$$\sqrt{|2x-1|} \le 2$$

egyenlőtlenség megoldáshalmaza.

Mivel

$$\sqrt{|2x-1|} \le 2 \iff |2x-1| \le 4 \iff -4 \le 2x-1 \le 4 \iff -\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2},$$

ezért

$$f^{-1}[D] = \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]. \quad \blacksquare$$

3. feladat. *Invertálható-e az*

$$\text{(a)} \quad f(x) := |2x+1| \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{(b)} \quad f(x) := \begin{cases} 2x+1, & \textit{ha } 0 \le x \le 1 \\ 10-3x, & \textit{ha } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

függvény? Ha igen, akkor határozza meg az f^{-1} függvényt.

Megoldás.

(a) A függvény *nem invertálható*, ui. $0, -1 \in \mathcal{D}_f$ és $f(0) = 1 = f(-1)$.

(b) Invertálhatóság.

(i) Ha $0 \le x, t \le 1$, akkor

$$f(x) = f(t) \implies 2x+1 = 2t+1 \implies x = t.$$

(ii) Ha $1 < x, t \le 2$, akkor

$$f(x) = f(t) \implies 10-3x = 10-3t \implies x = t.$$

(iii) Ha $0 \le x \le 1$, akkor $1 \le 2x+1 \le 3$, ezért $f(x) \in [1,3]$. Ha $1 < t \le 2$, akkor $4 \le 10-3t < 7$, azaz $f(t) \in [4,7)$. Most tehát $x \ne t$, és mivel a $[1,3] \cap [4,7) = \emptyset$, ezért $f(x) \ne f(t)$.

Az (i), (ii) és (iii) alapján az f **függvény invertálható**.

Az inverz előállításához először az f^{-1} függvény értelmezési tartományát, vagyis f értékkészletét kell meghatározni. A (c)-ben leírtakból következik, hogy

$$\mathcal{R}_f \subset [1,3] \cup [4,7).$$

A fordított tartalmazás is igaz, ui.

$$\text{ha } \ y \in [1,3], \quad \text{akkor } \ y = 2x+1 \implies x = \frac{y-1}{2} \in [0,1],$$

$$\text{ha } \ y \in [4,7), \quad \text{akkor } \ y = 10-3x \implies x = \frac{10-y}{3} \in (1,2].$$

Ez azt jelenti, hogy minden $y \in [1,3] \cup [4,7)$ számhoz létezik olyan $x \in \mathcal{D}_f$, amelyre $f(x) = y$ teljesül, azaz $[1,3] \cup [4,7) \subset \mathcal{R}_f$. Megmutattuk tehát azt, hogy

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [1,3] \cup [4,7),$$

és **az inverz függvény**:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y-1}{2}, & \text{ha } y \in [1,3] \\ \dfrac{10-y}{3}, & \text{ha } y \in [4,7). \end{cases} \quad \blacksquare$$

4. feladat. *Sejtse meg az*

$$a_n := \frac{n^3 - 2n\sqrt{n} + 1}{2n^3 + 3n^2 + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését.

Megoldás. Az

$$a_n = \frac{n^3 - 2n\sqrt{n} + 1}{2n^3 + 3n^2 + 1} = \frac{1 - \dfrac{2}{n\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^3}}{2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^3}}$$

átalakítás alapján

a sejtés: $\lim(a_n) = \dfrac{1}{2}$.

A bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}\text{-re} : \quad \left| \frac{n^3 - 2n\sqrt{n} + 1}{2n^3 + 3n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

A „szokásos” módon járunk el:

$$\left| \frac{n^3 - 2n\sqrt{n} + 1}{2n^3 + 3n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|-4n\sqrt{n} - 3n^2 + 1|}{2(2n^3 + 3n^2 + 1)} \leq \frac{|-4n\sqrt{n} - 3n^2 + 1|}{4n^3} \leq$$

$$\leq \frac{4n^2 + 3n^2 + n^2}{4n^3} = \frac{8n^2}{4n^3} = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$\left| \frac{n^3 - 2n\sqrt{n} + 1}{2n^3 + 3n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség tehát valóban fennáll, ha $n \geq n_0 := \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] + 1$. (Az $\varepsilon > 0$ számhoz tehát $\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ egy „jó” küszöbindex). ■

5. feladat. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $a_n := \dfrac{n + \sqrt{2n^4 + 1}}{3n^2 + \sqrt{n + 1}} \quad (n = 1, 2, \ldots);$

(b) $a_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - 1} \quad (n = 1, 2, \ldots);$

(c) $a_n := \dfrac{(-2)^{n-3} + 9^{n+2}}{3^{2n-1} + 2^{n-3}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$

Megoldás. (a) A számlálót és a nevezőt leosztjuk n^2-tel:

$$a_n = \frac{n + \sqrt{2n^4 + 1}}{3n^2 + \sqrt{n + 1}} = \frac{\dfrac{1}{n} + \sqrt{2 + \dfrac{1}{n^4}}}{3 + \sqrt{\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}}}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}, \text{ ha } \lim(a_n) = A,$$

ezért a számlálóban levő sorozat $\sqrt{2}$-höz, a nevezőben levő sorozat 3-hoz tart. A hányadosuk határértéke tehát $\sqrt{2}/3$, azaz

$$\lim(a_n) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(b) Most gyöktelenítéssel alakítjuk át a sorozat tagjait megadó kifejezést:

$$a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-1} = \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-1}} = \frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}.$$

A számlálóban levő sorozat 1-hez, a nevezőben levő sorozat pedig 2-höz tart, ezért a hányadosuk határértéke 1/2, tehát

$$\lim(a_n) = \frac{1}{2}.$$

(c) A következő átalakításokat végezzük el:

$$a_n = \frac{(-2)^{n-3} + 9^{n+2}}{3^{2n-1} + 2^{n-3}} = \frac{-\dfrac{1}{8} \cdot (-2)^n + 81 \cdot 9^n}{\dfrac{1}{3} \cdot 9^n + \dfrac{1}{8} \cdot 2^n} = \frac{\left(-\dfrac{1}{8}\right) \cdot \left(-\dfrac{2}{9}\right)^n + 81}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right)^n}.$$

Mivel $\lim(q^n) = 0$, ha $|q| < 1$, ezért a számlálóban levő sorozat 81-hez, a nevezőben levő pedig 1/3-hoz tart, ezért a hányadosuk határértéke 243, azaz

$$\lim(a_n) = 243. \quad \blacksquare$$