Analízis 1. (BSc) **Az 1. zh témakörei** **2010. március**

Programtervező informatikus szak

1. feladat. *Igazolja, hogy az*

$$A := \left\{ \frac{2-3x}{5x+1} \;\Big|\; x \in \mathbb{R} \textit{ és } x \geq 0 \right\}$$

halmaz korlátos. Van-e a halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme? Határozza meg $\sup A$*-t és* $\inf A$*-t.*

Megoldás. Először átalakítjuk a halmaz elemeit megadó kifejezést:

$$(*) \qquad \frac{2-3x}{5x+1} = \frac{-\frac{3}{5}(5x+1)+\frac{3}{5}+2}{5x+1} = -\frac{3}{5} + \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5x+1}.$$

Ebből az alakból már rögtön következik, hogy minden $x \geq 0$ valós számra teljesül a

$$-\frac{3}{5} < -\frac{3}{5} + \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5x+1} \leq -\frac{3}{5} + \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5 \cdot 0 + 1} = 2$$

egyenlőtlenség. A halmaz tehát valóban **korlátos**: $-\frac{3}{2}$ egy alsó és 2 egy felső korlát.

A halmaznak **van legnagyobb eleme**, ez az $x = 0$ értékhez tartozó 2 szám, tehát

$$\max A = \sup A = 2.$$

A-nak **nincs legkisebb eleme**, mert A bármelyik eleménél van kisebb A-beli elem. Valóban, tetszőleges $x \geq 0$ esetén

$$A \ni -\frac{3}{5} + \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5x+1} > -\frac{3}{5} + \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5(x+1)+1} \in A.$$

Mivel A nem üres, alulról korlátos halmaz, ezért van infimuma. A $(*)$ átalakításból „sejthető”, hogy

$$\inf A = -\frac{3}{5},$$

és ezt az állítást így bizonyítjuk be:

(i) Azt már láttuk, hogy $-\frac{3}{5}$ egy alsó korlát.

(ii) Megmutatjuk, hogy $-\frac{3}{5}$ a legnagyobb alsó korlát, azaz

$$(**) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists x \geq 0 : \ \frac{2-3x}{5x+1} = -\frac{3}{5} + \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5x+1} < -\frac{3}{5} + \varepsilon.$$

Mivel

$$-\frac{3}{5} + \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5x+1} < -\frac{3}{5} + \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5x+1} < \varepsilon \Longleftrightarrow x > \frac{1}{5}\left(\frac{13}{5\varepsilon} - 1\right),$$

ezért $(**)$ pl. az $x := \frac{13}{25\varepsilon} (> 0)$ választással teljesül. ■

2. feladat. *Határozza meg a* $C := [0,1]$ *halmaznak az* $f(x) := 3x^2 - 2$ $(x \in \mathbb{R})$ *függvény által létesített képét.*

Megoldás. Halmaz függvény által létesített képének a definíciója szerint

$$f[C] = f\big[[0,1]\big] = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [0,1]\} = \{3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

Mivel minden $x \in [0,1]$ számra

$$-2 = 3 \cdot 0 - 2 \leq 3x^2 - 2 \leq 3 \cdot 1 - 2 = 1,$$

ezért

$$(1) \qquad f[C] \subset [-2,1].$$

Most megvizsgáljuk igaz-e a fordított irányú tartalmazás, vagyis igaz-e a

$$[-2,1] \subset f[C]$$

reláció; azaz tetszőleges $y \in [-2,1]$ esetén van-e olyan $x \in C = [0,1]$, amelyre

$$f(x) = 3x^2 - 2 = y.$$

Ebből az egyenlőségből $x = \pm\sqrt{(y+2)/3}$ adódik. Ha $y \in [-2,1]$, akkor

$$x = \sqrt{\frac{y+2}{3}} \in [0,1],$$

és f ezen az x helyen éppen y-t vesz fel, ezért $y \in f[C]$ is fennáll. Megmutattuk tehát azt, hogy

$$(2) \qquad [-2,1] \subset f[C].$$

Az (1) és a (2) relációkból következik, hogy

$$f[C] = [-2,1]. \quad \blacksquare$$

3. feladat. *Határozza meg a $D := [1,3]$ halmaznak az $f(x) := 1 + 2x - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény által létesített ősképét.*

Megoldás. Halmaz függvény által létesített ősképének a definíciója alapján

$$f^{-1}[D] = \big\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le 1 + 2x - x^2 \le 3\big\},$$

és ez azt jelenti, hogy az $f^{-1}[D]$ halmaz az

$$1 \le 1 + 2x - x^2 \le 3$$

egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza.

Jelölje M_1 az $1 \le 1 + 2x - x^2$, M_2 pedig az $1 + 2x - x^2 \le 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát. Ekkor tehát $f^{-1}[D] = M_1 \cap M_2$.

Mivel $1 \le 1 + 2x - x^2 \iff 0 \le 2x - x^2 = x(2-x) \iff 0 \le x \le 2$, ezért $M_1 = [0,2]$.

Másrészt $1 + 2x - x^2 \le 3 \iff x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \ge 0$. Mivel ez az egyenlőtlenség minden x valós számra teljesül, ezért $M_2 = \mathbb{R}$.

A fentieket összefoglalva kapjuk, hogy

$$f^{-1}[D] = M_1 \cap M_2 = [0,2] \cap \mathbb{R} = [0,2]. \quad \blacksquare$$

4. feladat. *Invertálható-e az*

$$\text{(a)} \quad f(x) := \sqrt{9 - x^2} \quad (x \in (-3,3)), \qquad\qquad \text{(b)} \quad f(x) := \begin{cases} x + 2, & \textit{ha } 0 \le x < 1 \\ 5 - x, & \textit{ha } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

függvény? Ha igen, akkor határozza meg az f^{-1} függvényt.

Megoldás.

Az f függvény pontosan akkor **invertálható**, ha különböző értelmezési tartománybeli pontokban különböző helyettesítési értékeket vesz fel, azaz

$$\forall\, x, t \in \mathcal{D}_f, \quad x \ne t \quad \Longrightarrow \quad f(x) \ne f(t).$$

Ez azzal ekvivalens, hogy

$$\forall\, x, t \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = f(t) \quad \Longrightarrow \quad x = t.$$

Az f függvény pontosan akkor **nem invertálható**, ha

$$\exists\, x, t \in \mathcal{D}_f, \quad x \ne t, \text{ amelyekre } f(x) = f(t).$$

(a) A függvény *nem invertálható*, ui. $-1, 1 \in \mathcal{D}_f$ és $f(1) = \sqrt{8} = f(-1)$.

(b) Invertálhatóság. Mivel a függvény esetszétválasztással van értelmezve, ezért a fenti tulajdonságot is esetszétválasztással ellenőrizzük.

(i) Ha $0 \le x, t < 1$, akkor

$$f(x) = f(t) \quad \Longrightarrow \quad x + 2 = t + 2 \quad \Longrightarrow \quad x = t.$$

(ii) Ha $1 \le x, t \le 2$, akkor

$$f(x) = f(t) \quad \Longrightarrow \quad 5 - x = 5 - t \quad \Longrightarrow \quad x = t.$$

(iii) Ha $0 \le x < 1$, akkor $0 \le x+2 < 3$, ezért $f(x) \in [0, 3)$. Ha $1 \le t \le 2$, akkor $3 \le 5-t \le 4$, azaz $f(t) \in [3, 4]$. Most tehát $x \ne t$, és mivel a $[0, 3) \cap [3, 4] = \emptyset$, ezért $f(x) \ne f(t)$.

Az (i), (ii) és (iii) alapján az f **függvény invertálható**.

Az inverz előállításához először az f^{-1} függvény értelmezési tartományát, vagyis f értékkészletét kell meghatározni. A (c)-ben leírtakból következik, hogy

$$\mathcal{R}_f \subset [0, 3) \cup [3, 4] = [0, 4].$$

A fordított tartalmazás is igaz, ui.

$$\begin{aligned} &\text{ha } \ y \in [0, 3), \ \ \text{akkor } \ y = x + 2 \ \Longrightarrow \ x = y - 2 \in [0, 1), \\ &\text{ha } \ y \in [3, 4], \ \ \text{akkor } \ y = 5 - x \ \Longrightarrow \ x = 5 - y \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy minden $y \in [0, 4]$ számhoz létezik olyan $x \in \mathcal{D}_f$, amelyre $f(x) = y$ teljesül, azaz $[0, 4] \subset \mathcal{R}_f$. Megmutattuk tehát azt, hogy

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [0, 4],$$

és **az inverz függvény**:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 2, & \text{ha } y \in [0, 3) \\ 5 - y, & \text{ha } y \in [3, 4]. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

5. feladat. *Legyen* $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R}^+)$, $g(x) := x + 1$ $(x \in \mathbb{R}^+)$. *Invertálható-e az* $f \circ g$ *függvény? Ha igen, adja meg az inverzét.*

6. feladat. *Sejtse meg az*

$$a_n := \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését.

Megoldás. Az

$$a_n := \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} = \frac{1 - \dfrac{2}{\sqrt{n^3}} - \dfrac{3}{n}}{2 + \dfrac{1}{n^2}}$$

átalakítás alapján

a sejtés: $\lim(a_n) = \frac{1}{2}$.

A bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \ge n_0, \, n \in \mathbb{N}\text{-re}: \quad \left| \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

A „szokásos” módon járunk el:

$$\left| \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| \le \left| \frac{-4\sqrt{n} - 6n - 1}{2(2n^2 + 1)} \right| = \frac{6n + 4\sqrt{n} + 1}{2(2n^2 + 1)} \le \frac{6n + 4n + n}{4n^2} \le \frac{12n}{4n^2} = \frac{3}{n} < \varepsilon.$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \dfrac{3}{\varepsilon}$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$\left| \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség tehát valóban fennáll, ha $n \geq n_0 := \left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right] + 1$. (Az $\varepsilon > 0$ számhoz tehát $\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right] + 1$ egy „jó" küszöbindex). ■

7. feladat. *Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:*

(a) $a_n := \dfrac{\sqrt{n^4 - n + 1}}{n^2 - \sqrt{n+2}} \quad (n = 1, 2, \ldots);$

(b) $a_n := n + 3 - \sqrt{n^2 - 2} \quad (n = 2, 3, \ldots);$

(c) $a_n := \dfrac{2^{1-n} + (-3)^{n+2}}{2^{2n} + 3^{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$

Megoldás. (a) A számlálót és a nevezőt leosztjuk n^2-tel:

$$a_n := \frac{\sqrt{n^4 - n + 1}}{n^2 - \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}}}{1 - \sqrt{\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{2}{n^4}}}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}, \text{ ha } \lim(a_n) = A,$$

ezért a számlálóban levő sorozat 1-hez, a nevezőben levő sorozat 1-hez tart. A hányadosuk határértéke tehát 1, azaz

$$\lim(a_n) = 1.$$

(b) Most gyöktelenítéssel alakítjuk át a sorozat tagjait megadó kifejezést:

$$a_n = n + 3 - \sqrt{n^2 - 2} = \left(n + 3 - \sqrt{n^2 - 2}\right) \cdot \frac{n + 3 + \sqrt{n^2 - 2}}{n + 3 + \sqrt{n^2 - 2}} =$$

$$= \frac{(n+3)^2 - (n^2 - 2)}{n + 3 + \sqrt{n^2 - 2}} = \frac{6n + 11}{n + 3 + \sqrt{n^2 - 2}} = \frac{6 + \dfrac{11}{n}}{1 + \dfrac{3}{n} + \sqrt{1 - \dfrac{2}{n^2}}}.$$

Mivel $\lim(1/n) = 0$ és $\lim\left(\sqrt{1 - \frac{2}{n^2}}\right) = 1$, ezért a konvergens sorozatok összegére és szorzatára vonatkozó tételünk alapján a számlálóban levő sorozat 6-hoz, a nevezőben levő sorozat pedig 2-höz tart. A hányadosuk határértéke 3, ezért

$$\lim(a_n) = 3.$$

(c) A következő átalakításokat végezzük el:

$$\frac{2^{1-n}+(-3)^{n+2}}{2^{2n}+3^{n-1}} = \frac{\dfrac{2}{2^n}+(-3)^2(-3)^n}{4^n+\dfrac{3^n}{3}} = \frac{2\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^n+9\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n}{1+\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}.$$

Mivel $\lim(q^n)=0$, ha $|q|<1$, ezért a számlálóban levő sorozat 0-hoz, a nevezőben levő pedig 1-hez tart, ezért a hányadosuk határértéke 0, azaz

$$\lim(a_n)=0. \quad \blacksquare$$