1	2	3	Σ_1	4	Σ	J:

NÉV: ______________________ ELTE AZON.: __________

Prog. inf. I. (BSc.) **1. vizsgadolgozat** *2010. január 8.*

I. rész (75 perc): *Az I. rész összpontszáma 32. A válaszokat itt (az I. részben) nem kell indokolni!*

1. Állapítsuk meg, igazak-e az alábbi állítások, és tegyünk X-et a megfelelő kockába. (A választ nem kell indokolni!) (8 *pont*)

	Igen	Nem
a) Ha az $U \leq \mathbb{R}^n$ altér egy bázisához hozzáveszünk egy $\mathbb{R}^n$-beli vektort, akkor a vektorhalmaz lineárisan összefüggővé válik.	☐	☐
b) $\mathbb{R}^5$-nek egy 3 dimenziós alterében van 4 elemű generátorrendszer.	☐	☐
c) Egy 3 egyenletből álló 6 ismeretlenes valós lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.	☐	☐
d) Ha egy $k \times n$-es mátrixnak létezik kétoldali inverze, akkor a mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.	☐	☐
e) n elem permutációjánál az inverziók száma nem lehet nagyobb $n/2$-nél.	☐	☐
f) Egy négyzetes mátrix determinánsa pontosan akkor nem nulla, ha a mátrixban nincsen nulla sor.	☐	☐
g) Egy 2×2-es valós mátrixnak legföljebb két jobb oldali sajátértéke lehet.	☐	☐
h) Egy lineáris transzformáció magterének nem nulla elemei sajátvektorai a transzformációnak.	☐	☐

2. Az alábbi feladat minden részében karikázzuk be a sor végén az egyetlen helyes válasz betűjelét. (8 *pont*)

a) Egy $\mathcal{H} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmaz lineáris függetlensége következik abból, hogy: (A) $\dim \operatorname{Span} \mathcal{H} = k$; (B) $\mathbf{v}_i$-k között nincs két egyforma; (C) $k = n$; (D) $k < n$. (A) (B) (C) (D)

b) Legyen $\mathcal{F} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ lineárisan független rendszer, $\mathcal{G} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ generátorrendszer egy $U \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Ekkor: (A) van olyan i, hogy $\mathcal{F} \cup \{\mathbf{b}_i\}$ lineárisan független; (B) van olyan i, hogy $\mathcal{G} \setminus \{\mathbf{b}_i\}$ generátorrendszer U-ban; (C) van olyan i, hogy $\{\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ lineárisan független; (D) van olyan i, hogy $\{\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ generátorrendszer U-ban. (A) (B) (C) (D)

c) $\mathbb{R}^3$ altereinek száma: (A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) végtelen. (A) (B) (C) (D)

d) Ha egy $k \times n$-es mátrixnak létezik jobb oldali inverze, akkor: (A) $k \leq n$; (B) $k = n$; (C) $k \geq n$; (D) a mátrix sorai lineárisan összefüggők. (A) (B) (C) (D)

e) A geometriai vektorok kifejtési tétele szerint az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ szorzat egyenlő az alábbi kifejezéssel: (A) $\mathbf{ab} - \mathbf{bc}$; (B) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$; (C) $(\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$; (D) $(\mathbf{ab})\mathbf{c} - (\mathbf{cb})\mathbf{a}$. (A) (B) (C) (D)

f) Ha az $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok hasonlók $\mathbb{R}$ fölött, akkor A-nak és B-nek: (A) ugyanazok a sajátvekoraik; (B) ugyanaz a karakterisztikus polinomjuk; (C) ugyanaz a bal oldali inverzük; (D) ugyanazok a sajátaltereik. (A) (B) (C) (D)

g) Ha V valós euklideszi tér, akkor tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ vektorokra: (A) $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \geq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$; (B) $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \geq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$; (C) $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$; (D) $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. (A) (B) (C) (D)

h) Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix akkor és csak akkor szimmetrikus, ha: (A) $\det A$ valós; (B) A-nak minden sajátértéke valós; (C) az A-hoz tartozó Q kvadratikus alak pozitív definit; (D) $\mathbb{R}^n$-nek létezik A sajátvektoraiból álló ortogonális bázisa. (A) (B) (C) (D)

FORDÍTS!

3. Az alábbi feladat minden részében írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. (16 *pont*)

a) Tekintsük a következő geometriai vektorokat:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

Mely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén lesznek az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineárisan összefüggőek?

$\lambda =$

b) Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixban hány előjelezett aldeterminánsértéke lesz negatív, és hányé nulla?

Negatív:
Nulla:

c) Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$\rho(A) =$

d) Legyen U az alábbi altér $\mathbb{R}^{10}$-ben:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{10} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10} \middle| a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \cdots = a_9 - a_{10} \right\}.$$

Határozzuk meg U dimenzióját.

$\dim U =$

e) A $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektora az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 2 & 3 & c \\ * & * & * \end{bmatrix}$ mátrixnak. (Itt a c ugyanazt a számot, $*$ pedig tetszőleges értékeket jelent.) Mi a c paraméter értéke, és mi a $\mathbf{v}$-hez tartozó sajátérték?

$c \quad =$
Sajátérték:

f) Milyen egész értékeket vehet föl az $a \in \mathbb{Z}$ paraméter, ha tudjuk, hogy az $\begin{bmatrix} a & a \\ a & 3 \end{bmatrix}$ mátrix által meghatározott kvadratikus alak pozitív definit?

$a \in \{ \qquad \}$

g) A háromdimenziós térben legyen φ az x-y-síkra való merőleges vetítés, ρ pedig a z tengely körüli $+90°$-os forgatás. Hány dimenziós a $\rho\varphi$ transzformáció magtere?

$\dim \operatorname{Ker}(\rho\varphi) =$

h) Határozzuk meg az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$ és a $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektorok γ-val jelölt hajlásszögét $\mathbb{R}^4$-ben (az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ skaláris szorzatra nézve).

$\gamma =$

Az I. részből alapértelmezésben legalább 18 pontot kell szerezni az átmenő osztályzathoz. Az elégséges megszerzésének további feltétele, hogy az I. és II. részből megszerzett pontszám elérje a 21-et. Akinek az első részből csak 15, 16 vagy 17 pontja van, annál az elégséges további feltétele, hogy összesen legalább 24, 23, illetve 22 pontot érjen el. 15 pont alatti első rész esetén a vizsga mindenképpen elégtelen.

NÉV: ______________________________ ELTE AZON.: ______________

Prog. inf. I. (BSc.) **1. vizsgadolgozat/3** *2010. január 8.*

II. rész (45 perc): *A II. rész összpontszáma* 16. *Ügyeljünk a precíz fogalmazásra!*

4. a) Definiáljuk egy $k \times n$-es mátrix oszlop-, illetve sorrangját. (2 *pont*)

b) Adjunk meg egy olyan $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mátrixot, melynek rangja 1, pontosan 2 nem nulla oszlopa és 3 nem nulla sora van, továbbá nincs két egyforma nem nulla eleme. (2 *pont*)

c) Mondjuk ki a mátrix rangja és a négyzetes részmátrixai determinánsa közötti összefüggést. (2 *pont*)

c Hogyan olvashatjuk le egy diagonális alakban levő mátrixról a rangját? (2 *pont*)

e) Definiáljuk a Vandermonde-determináns fogalmát, majd mondjuk ki és bizonyítsuk be a Vandermonde-determináns értékére vonatkozó állítást. (8 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. részből megszerzett pontszám eléri a 18-at, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0-20$:	1
$21-25$:	2
$26-30$:	3
$31-35$:	4
$36-48$:	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: január 8-án, pénteken, 17.30 és 18.30 között a Déli tömb 3-708 szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay Tanár Úrtól vehetők át a szóbeli vizsganapokon.