1	2	3	Σ_1	4	Σ	**J:**

NÉV: ______________________ ELTE AZON.: __________

Prog. inf. I. (BSc.) **3. vizsgadolgozat** *2009. június 24.*

I. rész (75 perc): *Az I. rész összpontszáma 32. A válaszokat itt (az I. részben) nem kell indokolni.*

1. Állapítsuk meg, igazak-e az alábbi állítások, és tegyünk X-et a megfelelő kockába. (A választ nem kell indokolni.) (8 *pont*)

	Igen	Nem
a) Ha **a** és **b** tetszőleges térvektorok, akkor az **ab** skaláris szorzat megegyezik az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzat hosszával.	☐	☐
b) Tetszőleges $\mathbb{R}$ fölötti nem nulla vektortérben van két különböző vektor, melyek lineárisan összefüggők.	☐	☐
c) Egy $\mathcal{B}$ vektorhalmaz pontosan akkor bázisa egy V vektortérnek, ha bármely V-beli vektor kifejezhető $\mathcal{B}$-beli vektorok lineáris kombinációjaként.	☐	☐
d) Egy $k \times n$-es mátrix rangja nem lehet nagyobb n-nél.	☐	☐
e) Ha egy 10×10-es mátrix sorait fordított sorrendben írjuk föl (azaz az utolsó sort hozzuk az első sorba, az utolsó előttit a másodikba, stb.), akkor a mátrix determinánsa (-1)-szeresére változik.	☐	☐
f) Egy négyzetes mátrix determinánsa pontosan akkor nem nulla, ha a mátrixnak van bal oldali inverze.	☐	☐
g) Ha egy $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés injektív, akkor szürjektív is.	☐	☐
h) Egy $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés magterének és képterének dimenzióját összeadva W dimenzióját kapjuk.	☐	☐

2. Az alábbi feladat minden részében karikázzuk be a sor végén az egyetlen helyes válasz betűjelét. (8 *pont*)

a) A térvektorok terében igaz, hogy: (A) két térvektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy síkban vannak; (B) három térvektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy síkban vannak; (C) két térvektor skaláris szorzata merőleges mindkét vektorra; (D) három térvektor vektoriális szorzata mindkét zárójelezés esetén ugyanaz. (A) (B) (C) (D)

b) Ha egy $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ valamely $\mathbf{v}$ vektorra és λ skalárra, akkor: (A) $\lambda = 0$; (B) $\mathbf{v} = 0$; (C) $\lambda = 0$, vagy $\mathbf{v} = 0$; (D) $\lambda = 0$, és $\mathbf{v} = 0$. (A) (B) (C) (D)

c) Egy $\mathbb{R}$ fölötti háromdimenziós vektortérben az alterek száma: (A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) több, mint 4. (A) (B) (C) (D)

d) Ha egy 3×4-es A mátrixnak létezik jobb oldali inverze, akkor: (A) A-nak létezik kétoldali inverze is; (B) A-nak létezik bal oldali inverze is; (C) A rangja 4; (D) A rangja 3. (A) (B) (C) (D)

e) Legyen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, melyre $\det A = 0$. Ekkor: (A) van olyan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, melyre az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rendszernek nincs megoldása; (B) tetszőleges $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorra az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rendszernek nincs megoldása; (C) az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ rendszernek nincs megoldása; (D) A oszlopai lineárisan függetlenek. (A) (B) (C) (D)

f) Ha egy $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés mátrixában az első oszlop csupa nullából áll, akkor: (A) φ nem lehet invertálható; (B) φ nem lehet szürjektív; (C) φ^2 a nulla leképezés; (D) $\dim V < \dim W$. (A) (B) (C) (D)

g) Egy V valós euklideszi térben tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokra: (A) $|(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$; (B) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$; (C) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$; (D) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$. (A) (B) (C) (D)

h) Tegyük föl, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ jobb oldali sajátértéke, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ pedig jobb oldali sajátvektora. Ekkor: (A) λ_0 bal oldali sajátértéke A-nak; (B) $\mathbf{v}$ bal oldali sajátvektora A-nak; (C) $\mathbf{v}^\top$ bal oldali sajátvektora A-nak; (D) az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nem triviális megoldása. (A) (B) (C) (D)

FORDÍTS!

3. Az alábbi feladat minden részében írjuk be a megfelelő választ a sor végén lévő keretbe. Csak az eredményt pontozzuk. (16 *pont*)

a) Egy 3 egyenletből álló 4 ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszerben az első egyenlet $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Mennyi lehet a megoldásban a szabad változók száma?

b) Legyen $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ Számítsuk ki az $AA^\top$ mátrixot.

c) Az $1,2,3,4,5,6,7$ számok $7,2,3,4,5,6,1$ permutációjában az inverziók száma

d) Az $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$ determináns értéke

e) A síkon az $y=-x$ egyenletű egyenesre való tükrözés mátrixa egy alkalmas (tetszés szerint választott) bázisban

f) A síkon az $y=-x$ egyenletű egyenesre való tükrözés sajátértékei

g) Az $\mathbb{R}^4$ vektortér $V=\{\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 \mid a+b=c+d\}$ alterének egy bázisa

h) Az $[1 \quad 2 \quad 4 \quad 10]^\top\in\mathbb{R}^4$ vektor euklideszi normája a szokásos $\mathbf{x}^\top\mathbf{y}$ skaláris szorzásra nézve

---

Az I. részből alapértelmezésben legalább 18 pontot kell szerezni az átmenő osztályzathoz. Az elégséges megszerzésének további feltétele, hogy az I. és II. részből megszerzett pontszám elérje a 21-et. Akinek az első részből csak 15, 16 vagy 17 pontot sikerült megszereznie, annál az elégséges további feltétele, hogy összesen legalább 24, 23, illetve 22 pontot érjen el. 15 pont alatti első rész esetén a vizsga mindenképpen elégtelen.

NÉV: ______________________ ELTE AZON.: ____________

Prog. inf. I. (BSc.) **3. vizsgadolgozat/3** *2009. június 24.*

II. rész (45 perc): *A II. rész összpontszáma* 16. *Ügyeljünk a precíz fogalmazásra!*

4. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Mit értünk az A mátrix egy jobb oldali sajátvektora, illetve sajátértéke alatt? (3 *pont*)

b) Mit értünk azon, hogy az A mátrix $\mathbb{R}$ fölött hasonló B-hez? (1 *pont*)

c) Definiáljuk az A mátrix $k_A(\lambda)$ karakterisztikus polinomját, majd igazoljuk, hogy a λ_0 valós szám pontosan akkor jobb oldali sajátértéke A-nak, ha $k_A(\lambda_0) = 0$. (8 *pont*)

d) Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix $\mathbb{R}$ fölött hasonló B-hez, akkor $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)$. (4 *pont*)

Ha az I. részből megszerzett pontszám eléri a 18-at, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0 - 20:$	1
$21 - 26:$	2
$27 - 32:$	3
$33 - 38:$	4
$39 - 48:$	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: Ma délután 17:00 és 18:30 között a Déli tömb 3–711/a szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay Tanár Úrtól vehetők át a szóbeli vizsganapokon.