1	2	3	Σ_1	4	Σ	**J:**

NÉV: _____ ELTE AZON.: _____

Prog. inf. I. (BSc.) **2. vizsgadolgozat** *2009. június 10.*

I. rész (75 perc): *Az I. rész összpontszáma* 32. *A válaszokat itt (az I. részben) nem kell indokolni.*

1. Állapítsuk meg, igazak-e az alábbi állítások, és tegyünk X-et a megfelelő kockába. (A választ nem kell indokolni.) (8 *pont*)

	Igen	Nem
a) Két térvektor skaláris szorzata pontosan akkor 0, ha valamelyik vektor $\mathbf{0}$.	☐	☐
b) Ha egy lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával, és az egyenletrendszernek létezik megoldása, akkor a megoldás egyértelmű.	☐	☐
c) Ha egy négyzetes mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor oszlopai is azok.	☐	☐
d) Ha egy mátrixnak van 3 lineárisan független sora, akkor van 3 lineárisan független oszlopa is.	☐	☐
e) Egy $\mathbb{R}$ fölötti V vektortérben tetszőleges $\mathbf{v} \in V$ esetén $2\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v}$.	☐	☐
f) Minden 5 dimenziós vektortérben található 4 dimenziós altér.	☐	☐
g) Ha két lineáris transzformáció képtere és magtere is megegyezik, akkor a két transzformáció ugyanaz.	☐	☐
h) Egy véges dimenziós euklideszi térben minden nemnulla vektor euklideszi normája pozitív valós szám.	☐	☐

2. Az alábbi feladat minden részében karikázzuk be a sor végén az **egyetlen helyes válasz** betűjelét. (8 *pont*)

a) A **kji** vegyesszorzat értéke (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 3 (A) (B) (C) (D)

b) Tetszőleges $X, Y \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertálható mátrixokra (A) $(X+Y)^{-1} = X^{-1} + Y^{-1}$ (B) $(XY)^{-1} = X^{-1}Y^{-1}$ (C) $(X+Y)^\top = X^\top + Y^\top$ (D) $(XY)^\top = X^\top Y^\top$ (A) (B) (C) (D)

c) Egy $\mathbb{R}$ fölötti V vektortérben (A) nincs olyan $\alpha \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\mathbf{v} \in V$ vektorra $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{v}$ (B) nincs olyan $\mathbf{v} \in V$ vektor, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ számra $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{v}$ (C) van olyan $\mathbf{v} \in V$ vektor, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ számra $\alpha\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ (D) van olyan $\mathbf{v} \in V$ vektor, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ számra $\alpha\mathbf{v} \neq -\mathbf{v}$ (A) (B) (C) (D)

d) Tetszőleges X négyzetes valós mátrixra (A) $\det 2X = 2\det X$ (B) $\det 2X = (\det X)^2$ (C) $\det X^2 = 2\det X$ (D) $\det X^2 = (\det X)^2$ (A) (B) (C) (D)

e) Legyen $X = A^{(g)}$ az $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mátrix egy általánosított inverze. Ekkor (A) $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (B) $X \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ (C) $X \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ (D) $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ (A) (B) (C) (D)

f) Ha egy $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra $X^{-1} = X$, akkor (A) $\det X = 1$ (B) X minden sajátértéke 1 vagy -1 (C) $n \leq 2$ (D) n páros (A) (B) (C) (D)

g) Ha egy 3×3-as diagonalizálható valós mátrixnak az 1 kétszeres, a 2 pedig egyszeres sajátértéke, akkor a mátrix minimálpolinomja (A) $(x-1)(x-2)$ (B) $(x-1)^2(x-2)$ (C) $(x-1)(x-2)^2$ (D) $(x-1)^2(x-2)^2$ (A) (B) (C) (D)

h) Egy V komplex euklideszi térben minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén $(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y})$ egyenlő a következő kifejezéssel: (A) $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (B) $\overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (C) $\lambda^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (D) $|\lambda|^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (A) (B) (C) (D)

FORDÍTS!

3. Az alábbi feladat minden részében írjuk be a megfelelő választ a sor végén lévő keretbe. Csak az eredményt pontozzuk. (16 *pont*)

a) Egy 3 egyenletből álló 5 ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszerben az első egyenlet $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Mennyi lehet a megoldásban a szabad változók száma?

b) Az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ mátrix inverze

c) Az $1,2,3,4,5,6$ számok $6,2,3,4,5,1$ permutációjában az inverziók száma

d) Az $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ determináns értéke

e) A $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei

f) A síkon az $y=x$ egyenesre való merőleges vetítés sajátértékei

g) Az $\mathbb{R}^4$ vektortér $V = \{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid a+b=c+d=0 \}$ alterének egy bázisa

h) A $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4$ vektor euklideszi normája a szokásos $\mathbf{x}^\top\mathbf{y}$ skaláris szorzásra nézve

---

Az I. részből alapértelmezésben legalább 18 pontot kell szerezni az átmenő osztályzathoz. Az elégséges megszerzésének további feltétele, hogy az I. és II. részből megszerzett pontszám elérje a 21-et. Akinek az első részből csak 15, 16 vagy 17 pontot sikerült megszereznie, annál az elégséges további feltétele, hogy összesen legalább 24, 23, illetve 22 pontot érjen el. 15 pont alatti első rész esetén a vizsga mindenképpen elégtelen.

NÉV: _____ ELTE AZON.: _____

Prog. inf. I. (BSc.) **2. vizsgadolgozat/3** *2009. június 10.*

II. rész (45 perc): *A II. rész összpontszáma* 16. *Ügyeljünk a precíz fogalmazásra!*

4. Ebben a feladatban V egy $\mathbb{R}$ fölötti vektorteret, A„$\subseteq$”V pedig ebben egy tetszőleges vektorrendszert jelöl.

a) Mint jelent az, hogy egy $\mathbf{v} \in V$ vektor lineárisan függ A-tól? (2 *pont*)

b) Mit jelent az, hogy V-nek egy W részhalmaza altér V-ben? (2 *pont*)

c) Igazoljuk, hogy az A-tól lineárisan függő vektorok $W(A)$ halmaza altér V-ben. (5 *pont*)

A hátlapra!

d) Definiáljuk az A által generált $\langle A \rangle$ alteret, és igazoljuk, hogy az megegyezik $W(A)$-val. (5 *pont*)

A hátlapra!

e) Mint jelent az, hogy A generátorrendszer V-ben? (1 *pont*)

f) Definiáljuk az A vektorrendszer rangját. (1 *pont*)

Ha az I. részből megszerzett pontszám eléri a 18-at, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0 - 20$:	1
$21 - 26$:	2
$27 - 32$:	3
$33 - 38$:	4
$39 - 48$:	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: Ma délután 17:00 és 18:30 között a Déli tömb 3–711 szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay Tanár Úrtól vehetők át a szóbeli vizsganapokon.