1. Vektorok

1.1. Alapfogalmak, alapműveletek

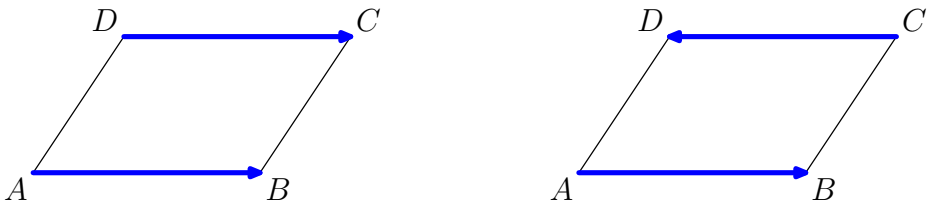
1.1.1. Elméleti összefoglaló

Definíció: A tér irányított szakaszait vektoroknak nevezzük. Egy vektort akkor tekintünk adottnak, ha ismerjük a nagyságát és az irányát.

Jelölés: Felírhatjuk a vektort a kezdő és végpontja segítségével: $\overrightarrow{PQ}$ vagy jelölhetjük egy kisbetűvel is. Az utóbbi esetben a vektort jelölő betűt írásban aláhúzzuk, nyomtatásban vastagon szedjük: $\underline{v}$ vagy $\mathbf{v}$.

Definíció: Két vektor egyenlő, ha nagyságuk (hosszuk) is és irányuk is megegyezik.

Példa: Az $ABCD$ paralelogramma $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ oldalvektorai megegyeznek, mert nagyságuk és irányuk is egyenlő. Írhatjuk tehát, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok azonban nem egyeznek meg, mert irányuk nem egyezik meg (hanem ellentétes). Tehát $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$



Tétel: A vektorok egyenlősége ekvivalenciareláció, azaz

- reflexív ($\forall \mathbf{a}\colon \mathbf{a} = \mathbf{a}$)
- szimmetrikus ($\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}\colon$ ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{b} = \mathbf{a}$)
- tranzitív ($\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\colon$ ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{c}$).

Definíció: A vektor hosszát a vektor abszolút értékének is nevezzük.

Jelölés: $|\overrightarrow{PQ}|$, $\underline{p}$, $|\mathbf{r}|$

A vektor abszolút értéke csak nemnegatív (valós) szám lehet.

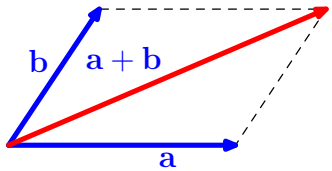
Definíció: Azt a vektort, amelynek abszolút értéke 0, nullvektornak nevezzük. Ennek iránya tetszőleges, ezét pl. minden más vektorral párhuzamos, de minden más vektorra merőleges is.

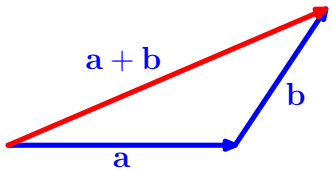
Jelölés: $\underline{0}$, illetve $\mathbf{0}$. (Különbözik a 0 számtól!).

Definíció: Ha egy vektor abszolút értéke 1, akor egységvektornak nevezzük.

Megjegyzés: Míg $\mathbf{0}$ vektor csak egy van, addig egységvektor végtelen sok.

Definíció: Két vektor összegén egy harmadik vektort értünk, amelyet meghatározhatunk paralelogramma-módszer, vagy összefűzés (háromszög-módszer, sokszög-módszer) segítségével.





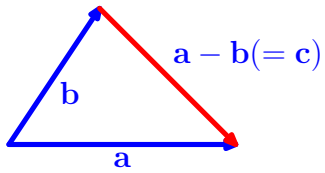
Megjegyzés: Párhuzamos vektorok összegzése esetén csak az összefűzés módszerét alkalmazhatjuk.

Tétel: A vektorösszeadás kommutatív és asszociatív (a számok összeadásához hasonlóan), azaz

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ esetén } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ esetén } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

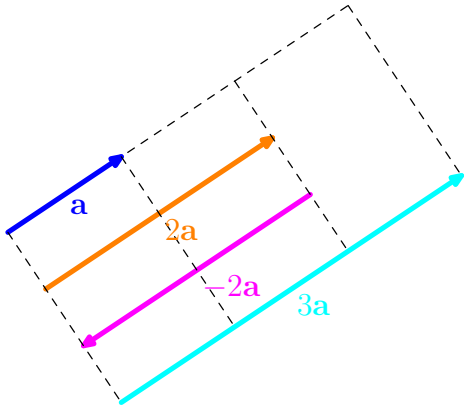
Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ különbségén azt a $\mathbf{c}$ vektort értjük, amelyre $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$.



Megjegyzések:

- Két vektor különbségét megkaphatjuk úgy, hogy közös kezdőpontba toljuk őket, mert ekkor a különbségvektor a végpontjaikat összekötő vektor lesz, a kisebbítendő felé irányítva.
- A vektorok összeadása, illetve kivonása során az eredmény esetleg a $\mathbf{0}$ is lehet.
- Bármely $\mathbf{a}$ vektor esetén $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

Definíció: Egy $\mathbf{a}$ vektor és egy λ szám szorzata egy vektor, amelynek hossza $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, párhuzamos $\mathbf{a}$-val és $\lambda > 0$ esetén egyirányú, $\lambda < 0$ esetén ellentétes irányú $\mathbf{a}$-val.



Tétel: A Vektorok számmal való szorzására érvényesek a következő műveleti szabályok:

$$\forall\lambda, \mu\ \forall\mathbf{a} \text{ esetén } \lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} \quad \text{(kvázi asszociativ)}$$
$$\forall\lambda\ \forall\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ esetén } \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \quad \text{(disztributív)}$$
$$\forall\lambda, \mu\ \forall\mathbf{a} \text{ esetén } (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} \quad \text{(kvázi disztributív)}$$

Példák:

$$2 \cdot (3\mathbf{a}) = 6\mathbf{a}$$
$$5 \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 5\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$$
$$(2 + 7)\,\mathbf{w} = 9\mathbf{w}$$

Definíció: Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ tetszőleges vektorok a térben, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pedig valós számok.
Az $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n$ kifejezést az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

Példa: Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok, akkor $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 5\mathbf{c}$ egy lineáris kombinációjuk.

Megjegyzés: Ha megadunk néhány vektort, akkor ezeknek végtelen sok lineáris kombinációja létezik, hiszen az együtthatók tetszőleges valós számok lehetnek.

Tétel: Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az S síkkal párhuzamos vektorok. Ha $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$, akkor minden S síkkal párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen előállítható $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként.

Megjegyzések:

- A tétel tehát kimondja, hogy minden S síkkal párhuzamos $\mathbf{v}$ vektorhoz található olyan α és β valós szám, amelyre $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.
- Az, hogy $\mathbf{v}$ *egyértelműen* áll elő $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként azt jelenti, hogy $\mathbf{a}$-nak és $\mathbf{b}$-nek *csak egy* lineáris kombinációja egyenlő $\mathbf{v}$-vel.

Tétel: Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a tér vektorai. Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nincsenek egy síkban, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előállítható $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként.

Megjegyzések:

- Ez a tétel az előző tétel térbeli megfelelője.
- Ebben az esetben nem lenne elég azt feltenni, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok nem párhuzamosak, mert pl. ha egy háromszög három oldalvektoráról van szó, akkor sem állíthatnak pl. egy a háromszög síkjára merőleges vektort. (Csak a háromszög síkjával párhuzamos vektor lehet a lineáris kombinációjuk.)
- Az, hogy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nincsenek egy síkban, valójában azt jelenti, hogy nincs olyan sík, amellyel, mindhárom vektor párhuzamos. Mivel a vektorok szabadon eltolhatók, mindig megtehető, hogy közös kezdőpontba toljuk őket, s ekkor kell megnézni, hogy egy síkban vannak-e vagy sem.

Definíció: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok triviális lineáris kombinációján a $0 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_n$ kifejezést értjük.

Megjegyzés: Tehát akkor beszélünk triviális lineáris kombinációról, ha minden együttható 0. Természetesen az eredmény csak a **0** vektor lehet.

Definíció: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk **0**. Ellenkező esetben a vektorokat lineárisan összefüggőnek nevezzük.

Megjegyzés:Ha a megadott vektorok között a **0** is szerepel, akkor biztos, hogy lineárisan összefüggők, hiszen a többi vektor együtthatóját 0-nak, a **0** együtthatóját pl. 1-nek választva a lineáris kombináció **0**, de az együtthatók között 0-tól különböző is előfordul.

Tétel: Két vektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha párhuzamosak egymással.

Tétel: A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy síkban vannak.

Megjegyzés: A tér négy vektora már mindenképpen lineárisan összefüggő.

Definíció: A térbeli vektorok egy lineárisan független vektorhármasát bázisnak nevezzük.

Definíció: Ha $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a tér egy bázisa és

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3,$$

akkor az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ számokat a $\mathbf{v}$ vektor ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisra vonatkozó) koordinátáinak nevezzük.

Megjegyzések:

- A fentiekből következik, hogy egy vektornak a koordinátái a bázistól függenek – tehát más bázisban ugyanannak a vektornak más koordinátái vannak – de adott bázisra vonatkozóan a koordináták egyértelműen meghatározottak.

- A számolások egyszerűsítése érdekében általában speciális bázist használnak a tér vektorainak koordinátázásához. A bázisvektorok (szokásos jelük $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$)
  - egységnyi hosszúságúak ($|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$).
  - páronként merőlegesek egymásra. (Azaz közülük bármely kettő merőleges egymásra.)
  - $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sorrendben jobbrendszert alkotnak. (Vagyis ha $\mathbf{k}$ végpontja felől nézünk a másik két bázisvektor síkjára, akkor $\mathbf{i}$-t a $\mathbf{j}$-be pozitív irányú (azaz óramutató járásával ellentétes) 180°-osnál kisebb szögű forgás viszi.)

Példa: Ha $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, akkor $\mathbf{v}\,(2, -3, 1)$, azaz – az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisban – $\mathbf{v}$ első koordinátája 2, második koordinátája -3, harmadik koordinátája 1.

Megjegyzés: Az első koordinátára használatos az *abszcissza* a másodikra az *ordináta*, a harmadikra a *kóta* elnevezés is.

Tétel: Két vektor összegének koordinátái az eredeti vektorok megfelelő koordinátáinak összegével egyenlők.

Példa: Ha $\mathbf{a}(2, 7, -3)$, $\mathbf{b}(4, -1, 5)$, és $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{c}(6, 6, 2)$.

Tétel: Két vektor különbségének koordinátái az eredeti vektorok megfelelő koordinátáinak különbségével egyenlők.

Példa: Ha $\mathbf{a}(4, 1, -3)$, $\mathbf{b}(5, -1, 6)$, és $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{c}(-1, 2, -9)$.

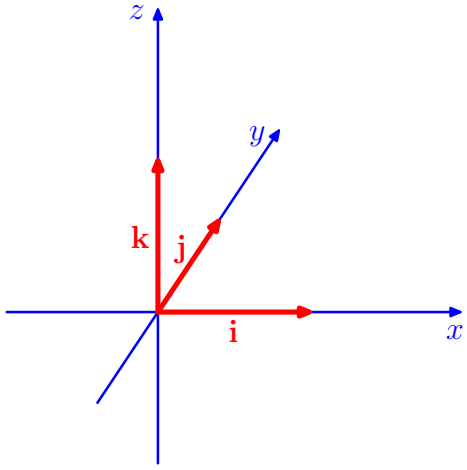
Tétel: Ha egy vektort egy λ számmal szorzunk, akkor az így kapott vektor minden koordinátája a eredeti vektor megfelelő koordinátájának λ-szorosa lesz.

Példa: Ha $\mathbf{a}(3, 1, -5)$ és $\mathbf{b} = 4\mathbf{a}$, akkor $\mathbf{b}(12, 4, -20)$.

Tétel: A $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ vektor hossza $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Példa: Ha $\mathbf{v}(3, -1, 2)$, akkor $|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.

Nemcsak a vektorokat, hanem a tér pontjait is szokás koordinátákkal jellemezni. Ehhez leggyakrabban ún. Descartes-féle koordinátarendszert használjuk. Válasszuk ki a tér egy tetszőleges O pontját (origó), és toljuk el az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorokat úgy, hogy kezdőpontjuk O legyen! A bázisvektorok irányított egyeneseit – az irány megegyezik a megfelelő bázisvektor irányával – koordinátatengelyeknek nevezzük és rendre x, y, z-vel jelöljük.



Definíció: Egy P pont helyvektorán az $\overrightarrow{OP}$ vektort értjük, ahol O az origó.

Megjegyzés: A fenti definícióban $\overrightarrow{OP}$ ún. kötöttvektor, mert kezdőpontja rögzített.

Definíció: Egy P pont koordinátáin a helyvektorának a koordinátáit értjük.

Tétel: Legyen az $\overrightarrow{AB}$ vektor kezdőpontja $A(a_1, a_2, a_3)$, végpontja $B(b_1, b_2, b_3)$. Ekkor az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái a B és A pont megfelelő koordinátáinak különbségével egyenlők, azaz $\overrightarrow{AB}\,(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Példa: Ha $A(2, 1, -2)$ és $B(4, -5, 1)$, akkor $\overrightarrow{AB}\,(2, -6, 3)$.

Megjegyzés: Figyeljük meg, hogy a végpont koordinátáiból kell a kezdőpont koordinátáit levonni!

Tétel: Az AB szakasz hossza ($A\,(a_1,\, a_2,\, a_3)$ és $B\,(b_1,\, b_2,\, b_3)$ pontok távolsága) megegyezik az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszával:

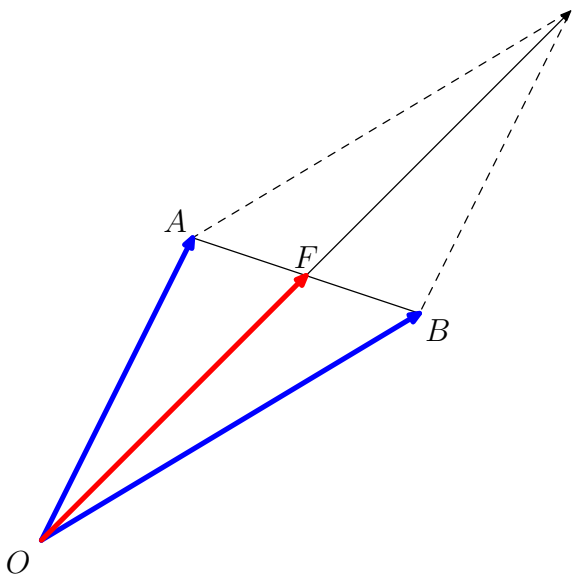
$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Példa: Ha $A\,(2,\, -3,\, 5)$ és $B\,(4,\, 2,\, -1)$, akor $AB = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-6)^2} = \sqrt{65}$

Tétel: Egy szakasz felezőpontjának helyvektora a végpontok helyvektorainak számtani közepével egyenlő. Képlettel

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

ahol F az AB szakasz felezőpontja.



Tétel: Egy szakasz felezőpontjának koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepével egyenlők.

Példa: Ha $A(6, 3, 1)$, $B(4, 9, -7)$) és az AB szakasz felezőpontja F, akkor $F(5, 6, -3)$.

Tétel: Egy háromszög súlypontjának helyvektora a csúcspontok helyvektorainak számtani közepével egyenlő. Képlettel

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

ahol S az ABC háromszög súlypontja.

Tétel: Egy háromszög súlypontjának koordinátái a csúcspontok megfelelő koordinátáinak számtani közepével egyenlők.

Példa: Ha $A(6,3,1)$, $B(4,9,-7)$, $C(-5,4,2)$ és az ABC háromszög súlypontja S, akkor $S\left(\frac{5}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

1.1.2. Feladatok

1. Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló lapátlóvektorok $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Írja fel ezek segítségével a velük azonos csúcsból kiinduló $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ élvektorokat!

2. Legyen $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}, \mathbf{v}_2 = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b}, \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$.
   Fejezze ki $\mathbf{a}$-val és $\mathbf{b}$-vel a $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ és a $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_3$ vektorokat!

3. Fejezze ki az $\mathbf{u}(26, 12, -17)$, $\mathbf{v}(8, 2, -1)$ és $\mathbf{w}(2, 1, 1)$ vektorokat az $\mathbf{a}(3, 1, -1)$ és $\mathbf{b}(4, 2, -3)$ vektorok lineáris kombinációjaként!
   Megoldás: $\mathbf{u} = 2\mathbf{a}+5\mathbf{b}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{w}$ nem állítható elő $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként.

4. Adottak az $A(2, 5, -1)$ és $B(7, 0, 3)$ pontok. Határozza meg az A pont B-re vonatkozó tükörképének koordinátáit!

5. Az ABC háromszög két csúcspontja $A(2, -2, 1)$, $B(6, -3, 1)$, súlypontja $S(3, -2, 1)$. Határozza meg a C csúcspont koordinátáit!

6. Igazolja, hogy ha S az ABC háromszög súlypontja, akkor $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \mathbf{0}$.

7. Az ABC háromszög súlypontját jelöljük S-sel! Adja meg az $\overrightarrow{SA}$ vektort az

   a) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$
   b) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$

   vektorok lineáris kombinációjaként!

8. Döntse el, hogy párhuzamosak-e a következő vektorpárok:

   a) $\mathbf{a}(-3, 4, 7)$, $\mathbf{b}(2, 5, 1)$
   b) $\mathbf{c}(12, 9, 15)$, $\mathbf{d}(8, 6, 10)$
   c) $\mathbf{e}(7, -4, 2)$, $\mathbf{b}(0, 0, 0)$

9. Döntse el, hogy az alábbi ponthármasok egy egyenesen vannak-e:

   a) $A(-4, 5, 2)$, $B(2, 0, -3)$, $C(14, -10, -13)$
   b) $D(1, 1, 1)$, $E(4, 1, 7)$, $F(5, -1, -1)$

10. Számítsa ki az alábbi vektorok hosszát:
    $\mathbf{a}(8, -14, -8)$, $\mathbf{b}\left(\frac{5}{31}, -\frac{30}{31}, \frac{6}{31}\right)$ $\mathbf{c}(4, -9, 10)$

11. Adja meg az alábbi vektorok irányába mutató egységvektorokat:
    $\mathbf{a}(4, -12, 3)$, $\mathbf{b}(0, 0, -7)$, $\mathbf{c}(-1, 4, 8)$

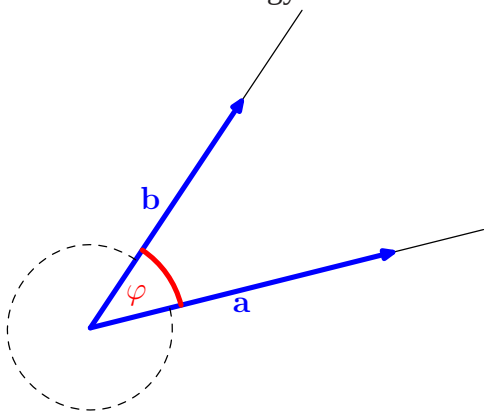
1.2. Vektorok skaláris szorzása

1.2.1. Elméleti összefoglaló

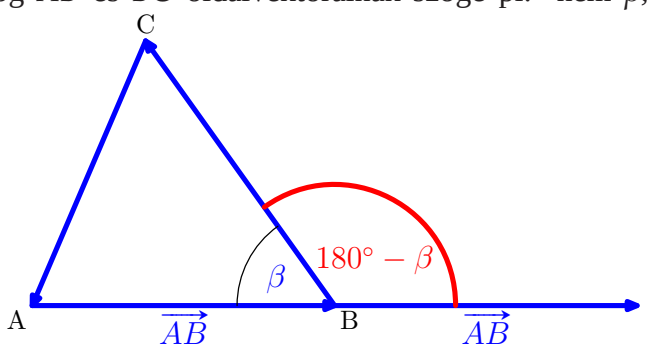
Definíció: Legyen **a** és **b** két **0**-tól különböző vektor. Ha közös kezdőpontba toljuk őket, akkor a félegyeneseik által meghatározott konvex szöget a két vektor hajlásszögének nevezzük.

Megjegyzések:

- Ha az egyik vektor a **0**, akkor a másik vektorral bezárt szöge tetszőleges, hiszen a **0** iránya is tetszőleges.
- Ha nem kötöttük volna, ki, hogy a két vektor szögén konvex – azaz 180°-nál nem nagyobb – szöget értünk, akkor a definíció nem volna egyértelmű.



- Az ABC háromszög $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ oldalvektorainak szöge pl. nem β, hanem $180° - \beta$.



Definíció: Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzatán az

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$$

számot értjük, ahol φ az **a** és **b** vektorok hajlásszöge.

Példák:

- Ha az ABC szabályos háromszög oldalainak hossza 3 hosszúságegység, akkor az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ oldalvektorok skaláris szorzata $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot 3 \cdot \cos 120° = -\frac{9}{2}$.
- Ha az **a** vektor hossza 7, a **b** vektor hossza pedig 5 hosszúságegység, továbbá **a** és **b** hajlásszöge 45°, akkor $\mathbf{ab} = 7 \cdot 5 \cdot \cos 45° = \frac{35\sqrt{2}}{2} \approx 24,75$

Tétel: A skaláris szorzás kommutatív művelet, azaz

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}: \quad \mathbf{ab} = \mathbf{ba}$$

Tétel: A skaláris szorzás disztributív művelet a vektorösszeadás felett, azaz

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}: \quad \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$$

Tétel:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda: \quad (\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab}) = \mathbf{a}(\lambda \mathbf{b})$$

ahol **a** és **b** vektorok λ skalár.

Megjegyzés: A vektorok skaláris szorzása *nem asszociatív*.

Tétel: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Megjegyzés: Ha a két vektor közül legalább az egyik a **0**, akkor a két vektor skaláris szorzata 0-val egyenlő, de mivel a **0** iránya tetszőleges, ilyenkor is mondhatjuk, hogy a két vektor merőleges egymásra.

Tétel: Az $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorok skaláris szorzata

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Példa: Az $\mathbf{a}(4, 2, -5)$ és $\mathbf{b}(1, 3, 2)$ vektorok skaláris szorzata $\mathbf{ab} = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 0$, tehát $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Tétel: Ha az **a** és **b** vektorok egyike sem **0**, akkor a két vektor φ hajlásszögének koszinusza:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

Megjegyzés: Ha a két vektor koordinátáit ismerjük, akkor ez a tétel lehetővé teszi a két vektor hajlásszögének a kiszámítását:

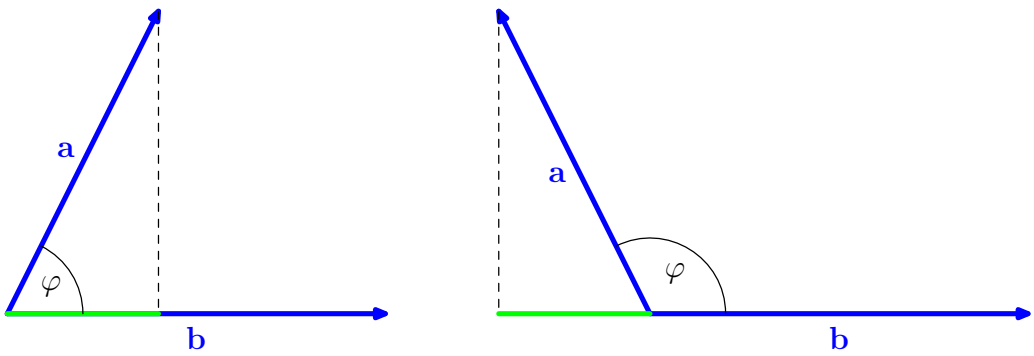
$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Példa: Jelöljük az $\mathbf{a}\,(-1, 3, -2)$ és $\mathbf{b}\,(-4, 2, 1)$ vektorok hajlásszögét φ-vel! Ekkor

$$\cos\varphi = \frac{(-1)\cdot(-4) + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} \approx 0,4666 \Rightarrow \varphi \approx 62,2^\circ$$

Definíció: Jelöljük az **a** és **b** vektorok hajlásszögét φ-vel! Az $|\mathbf{a}| \cdot \cos\varphi$ szorzatot az **a** vektor előjeles vetületének nevezzük a **b** vektor egyenesén.

Megjegyzés: Az előjeles vetület abszolút értéke megegyezik az **a** vektor **b** egyenesén vett merőleges vetületének hosszával, előjele pedig pozitív, ha $\varphi < 90^\circ$, negatív, ha $\varphi > 90^\circ$. (Ha $\varphi = 90^\circ$, akkor az előjeles vetület 0.)



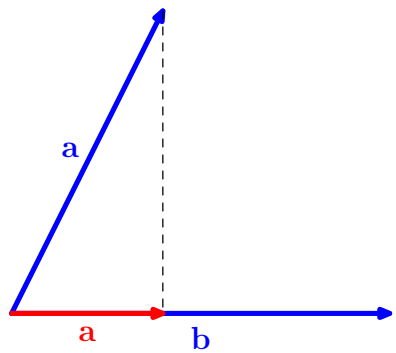
Tétel: Az **a** vektor előjeles vetülete a **b** vektor egyenesén

$$\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{a}\mathbf{e}_b$$

ahol $\mathbf{e}_b$ a **b** vektorral egyirányú egységvektor.

Példa: Az $\mathbf{a}(4,2,-1)$ vektor előjeles vetülete a $\mathbf{b}(-2,1,2)$ vektor egyenesén, $\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|} = -\frac{8}{3}$

Definíció: Az **a** vektor vetületvektora a **b** vektor egyenesén az az $\mathbf{a}_b$-vel jelölt vektor, melynek kezdőpontja **a** kezdőpontjának, végpontja pedig **a** végpontjának merőleges vetülete a **b** egyenesén.



Megjegyzés: Ha az **a** vektor előjeles vetülete a **b** egyenesén pozitív, akkor vetületvektora **b**-vel egyirányú, ha negatív, akkor vetületvektora **b**-vel ellentétes irányú.

Tétel: Az **a** vektor vetületvektora a **b** vektor egyenesén

$$\mathbf{a}_b = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}\mathbf{e}_b)\,\mathbf{e}_b$$

Példa: Bontsuk fel az $\mathbf{a}(4,2,-1)$ vektort a $\mathbf{b}(-2,1,2)$ vektorral párhuzamos és $\mathbf{b}(-2,1,2)$-re merőleges összetevőre!

Megoldás: A párhuzamos komponens **a** vetületvektora, azaz $\mathbf{p} = \mathbf{a}_b = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2} \cdot \mathbf{b} = -\frac{8}{9}\mathbf{b}$, azaz $\mathbf{p}\left(\frac{16}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{16}{9}\right)$. A merőleges komponens $\mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{p}$, tehát $\mathbf{m}\left(\frac{20}{9}, \frac{34}{9}, \frac{7}{9}\right)$.

1.2.2. Feladatok

1. A szögek kiszámítása nélkül döntse el, hogy az alábbi vektorpárok hegyes-, derék- vagy tompaszöget zárnak be:
   a) $\mathbf{a}(-3,2,0)$, $\mathbf{b}(4,1,5)$ b) $\mathbf{a}(1,1,9)$, $\mathbf{b}(2,1,3)$
   c) $\mathbf{a}(1,1,1)$, $\mathbf{b}(-10,7,3)$ d) $\mathbf{a}(5,-3,4)$, $\mathbf{b}(1,-1,2)$

2. Adottak az $\mathbf{a}(3,-6,1)$ és a $\mathbf{b}(12,4,z)$ vektorok. Határozza meg z értékét úgy, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek legyenek egymásra.

3. Mutassa meg, hogy az $\mathbf{a}(-2,3,6)$, $\mathbf{b}(6,-2,3)$, $\mathbf{c}(3,6,-2)$ vektorok kockát feszítenek ki!

4. Számítsa ki a következő vektorpárok szögét:
   a) $\mathbf{a}(7,-1,6)$, $\mathbf{b}(2,20,1)$
   b) $\mathbf{c}(3,6,-2)$, $\mathbf{d}(5,4,-20)$
   c) $\mathbf{e}(-1,4,7)$, $\mathbf{f}(5,-2,0)$
   d) $\mathbf{g} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{h} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
   e) $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

5. Határozza meg az ABC háromszög kerületét és szögeit, ha $A(1,5,6)$, $B(-2,-1,0)$, $C(2,2,1)$!

6. Határozza meg az $\mathbf{a}(2,-5,1)$ vektornak a $\mathbf{b}(3,0,4)$ vektor egyenesére eső merőleges vetületének hosszát!

7. Bontsa fel az $\mathbf{a}(3,-6,9)$ vektort a $\mathbf{b}(2,-2,1)$ vektorral párhuzamos $\mathbf{p}$, és $\mathbf{b}$-re merőleges $\mathbf{m}$ összetevőre!

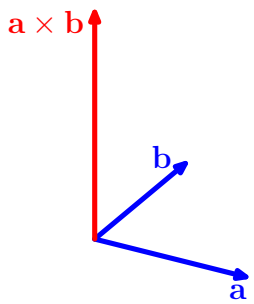
8. Egy háromszög csúcsai az $A(-1,0,2)$, $B(3,7,-2)$, $C(1,-1,0)$ pontok, súlypontja S, az AB oldalhoz tartozó magasság talppontja T. Számítsa ki az ST szakasz hosszát!

1.3. Vektorok vektoriális szorzása

1.3.1. Elméleti összefoglaló

Definíció: Az **a** és **b** vektorok vektoriális szorzatán azt az **a**×**b**-vel jelölt vektort értjük, amelyre a következők teljesülnek:

- hossza $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, ahol φ az **a** és **b** vektorok hajlásszöge,
- iránya merőleges az **a** és **b** vektorok mindegyikére,
- **a**, **b** és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.



Megjegyzések:

- Ha **a** és **b** párhuzamos, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, mert $\varphi = 0$ vagy $\varphi = 180°$ és mindkét esetben $\sin\varphi = 0$. Ekkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ iránya tetszőleges. Ha **a** és **b** nem párhuzamosak, akkor egy síkot feszítenek ki és a vektoriális szorzat erre a síkra merőleges.
- A harmadik tulajdonságra azért van szükség, mert **a**×**b** irányát nem határozza meg egyértelműen, hogy **a** és **b** síkjára merőleges, mert két ilyen irány is van. Azon, hogy **a**, **b** és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszer, azt értjük, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ végpontja felől ránézve az **a** és **b** vektorok síkjára **a**-t **b**-vel egyirányú vektorba egy 180°-nál kisebb pozitív irányú (óramutató járásával ellentétes) forgatás viszi.

Példák: Ha **i**, **j** és **k** a Descartes-féle koordinátarendszer bázisvektorai, akkor $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Tétel: Két vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Megjegyzés: A fenti tételt nem szoktuk két vektor párhuzamosságának vizsgálatára használni, mert a párhuzamosság kérdése egyszerűbben is eldönthető.

Tétel: A vektoriális szorzás nem kommutatív, mert

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Megjegyzés: Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ megcserélésével a szorzat az ellentettjére változik, a vektoriális szorzás alternáló művelet.

Tétel: A vektoriális szorzás nem asszociatív, mert van olyan $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektor, amelyre

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Példa: $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, tehát $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$.

Tétel: A vektoriális szorzás disztributív a vektorösszeadás felett, azaz

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$
$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

Megjegyzés: Mivel a vektoriális szozás nem kommutatív ezért beszélhetünk külön baloldali és jobboldali disztributivitásról.

Tétel: Tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok és λ valós szám esetén fennáll a

$$\lambda\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \lambda\mathbf{b}$$

összefüggés.

Tétel: Az $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzata

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

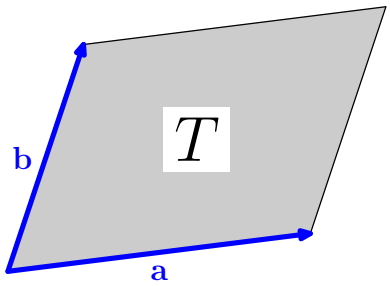
Megjegyzés: A képletben szereplő 3×3-as determináns könnyen megjegyezhető, ezért szokás a vektoriális szorzatot determináns-alakban megadni.

Példa: Az $\mathbf{a}\,(2, 1, 1)$ és $\mathbf{b}\,(3, -1, 4)$ vektorok vektoriális szorzata:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Tétel: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe a két vektor vektoriális szorzatának abszolút értékével egyenlő:

$$T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

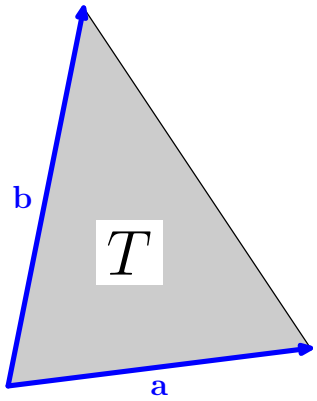


Példa: Az $\mathbf{a}\,(2, 1, 1)$ és $\mathbf{b}\,(3, -1, 4)$ vektorok vektoriális szorzata az $5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ vektor, ezért az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma területe:

$$T = \left|5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\right| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$$

Tétel: Az **a** és **b** vektorok által kifeszített háromszög területe:

$$T = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{2}$$



Példa: Számítsuk ki az $ABC_\triangle$ területét, ha $A\,(6,-2,1)$, $B\,(3,4,-1)$ és $C\,(2,5,7)$.

Az $\overrightarrow{AB}\,(-3,6,-2)$ és $\overrightarrow{AC}\,(-4,7,6)$ vektorok kifeszítik a háromszöget, ezért $T_\triangle = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} = 50\mathbf{i} + 26\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$T_\triangle = \frac{\sqrt{50^2 + 26^2 + 3^2}}{2} = \frac{\sqrt{3185}}{2} \approx 28,22$$

1.3.2. Feladatok

1. Végezze el a kijelölt műveleteket a következő kifejezésekben:
   a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b})$ b) $(3\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+3\mathbf{a})$
   c) $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}+\mathbf{b})+(\mathbf{a}-2\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}-\mathbf{b})$

2. Adottak az $\mathbf{a}(2,-3,1)$, $\mathbf{b}(4,2,-1)$, $\mathbf{c}(1,0,-3)$ vektorok. Számítsa ki a $\mathbf{v}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ vektor koordinátáit!

3. Adjon meg olyan $\mathbf{x}$ vektort, amely merőleges az $\mathbf{a}(2,-3,1)$ és a $\mathbf{b}(1,-2,3)$ vektorra és a $\mathbf{c}(1,2,-7)$ vektoral való skaláris szorzata $\mathbf{cx}=10$!

4. Adottak az $A(1,3,-2)$, $B(5,6,-10)$, $C(4,9,0)$ és a $D(8,12,-8)$ pontok. Bizonyítsa be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma és számítsa ki a területét!

5. Számítsa ki az ABC háromszög területét, ha $A(4,-1,-3)$, $B(3,1,-2)$, $C(1,5,0)$!

6. Mekkora szöget zárnak be egymással az $ABCD$ tetraéder ABC és ACD lapsíkjai, ha a csúcsok koordinátái: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ és $D(-5,-4,8)$?

7. Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe t, akkor mekkora a $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ és a $4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

1.4. Három vektor vegyesszorzata

1.4.1. Elméleti összefoglaló

Definíció: Az **a**, **b** és **c** vektorokból képzett

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

kifejezést az **a**, **b** és **c** vektorok vegyesszorzatának nevezzük.

Megjegyzések:

- Az elnevezés arra utal, hogy hogy a kifejezésen belül kétfajta szorzás is szerepel.
- A vegyesszorzat eredménye skalár.

Tétel: Ha **a**, **b** és **c** nem esnek egy síkba, akkor vegyesszorzatuk abszolút értéke megegyezik az általuk kifeszített paralellepipedon térfogatával:

$$V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}|$$

Tétel: Az **a**, **b** és **c** vektorok akkor és csak akkor esnek egy síkba, ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ vegyesszorzatuk $\mathbf{0}$.

Tétel: Az **a**, **b** és **c** nem egy síkba eső vektorok akkor és csak akkor alkotnak ebben a sorrendben jobbrendszert, ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ vegyesszorzatuk pozitív, továbbá akkor és csak akkor alkotnak ebben a sorrendben balrendszert , ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ negatív.

Tétel: Felcserélési tétel: Tetszőleges **a**, **b** és **c** vektorok esetén

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Megjegyzések:

- A tétel elnevezése arra utal, hogy műveletek cseréjével a vegyesszorzat eredménye nem változik.
- A tétel nem meglepő, ha arra gondolunk, hogy mindkét vegyesszorzat a három vektor által kifeszített paralellepipedon előjeles térfogatával egyenlő.
- Mivel – amint a tételből látszik – mindegy, hogy melyik művelet hol szerepel, szokás az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ vegyesszorzatot egyszerűen **abc**-vel jelölni.

Tétel: Az $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ vektorok vegyesszorzata:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Példa: Ha $\mathbf{a}(2, -1, -1)$, $\mathbf{b}(3, 2, 4)$ és $\mathbf{c}(4, 1, 2)$, akkor

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 2 + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1) = 3,$$

a három vektor által kifeszített paralellepipedon térfogata 3 térfogategység,

a, **b** és **c** ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, mert vegyesszorzatuk pozitív.

Tétel: Az **a**, **b** és **c** vektorok által kifeszített tetraéder térfogata egyenlő a vegyesszorzatuk abszolút értékének hatodrészével:

$$V = \frac{|\mathbf{abc}|}{6}$$

1.4.2. Feladatok

1. Komplanárisak-e az alábbi vektorhármasok:
   a) $(2,3,1)$, $(1,-1,3)$, $(1,9,-11)$
   b) $(3,-2,1)$, $(2,1,2)$, $(3,-1,2)$
   c) $(2,-1,2)$, $(1,2,-3)$, $(3,-4,7)$

2. Egy síkban vannak-e a következő pontnégyesek:
   a) $(1,2,-1)$, $(0,1,5)$, $(-1,2,1)$, $(2,1,3)$
   b) $(1,2,0)$, $(0,1,1)$, $(3,5,-4)$, $(-4,-2,6)$
   c) $(1,5,4)$, $(-2,1,-6)$, $(0,2,-1)$, $(2,3,4)$

3. Mekkora az $\mathbf{a}(2,3,4)$, $\mathbf{b}(2,3,1)$, $\mathbf{c}(1,2,3)$ vektorok által kifeszített paralellepipedon térfogata?

4. Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha csúcspontjai
   a) $A(1,-2,3)$, $B(-4,2,1)$, $C(3,0,2)$, $D(0,-2,5)$
   b) $A(3,-1,-1)$, $B(5,-2,3)$, $C(4,0,-2)$, $D(5,0,1)$

5. Egy tetraéder csúcspontjai $A(2,3,4)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Számítsa ki a D csúcshoz tartozó magasság hosszát!

1.5. Egyenes és sík

1.5.1. Elméleti összefoglaló

Definíció: Az e egyenessel párhuzamos $\mathbf{0}$-tól különböző vektort e irányvektorának nevezzük.

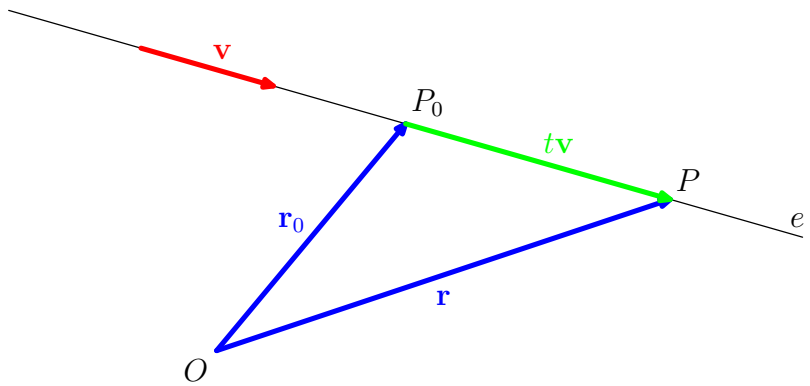
Megjegyzések:

- Minden egyenesnek végtelen sok irányvektora van.
- Párhuzamos egyenesek irányvektorai megegyeznek.

Definíció: Ha $\mathbf{r}_0$ az e egyenes egy P_0 pontjának helyvektora és $\mathbf{v}$ az e irányvektora, akkor az

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

egyenletet az e egyenes paraméteres vektoregyenletének nevezzük.



Megjegyzések:

- Ha t végigfut a valós számok halmazán akkor minden értékéhez olyan $\mathbf{r}$ vektor tartozik, amely az e egyenes egy pontjának helyvektora.
- A t paraméter különböző értékeihez különböző $\mathbf{r}$ vektorok tartoznak.
- Az e egyenes bármely pontjának helyvektora előáll t alkalmas megválasztásával.

Példa: Ha $P_0(2,3,1)$ az e egyenes egy pontja és $\mathbf{v}(5,-2,7)$ az egyenes egyik irányvektora, akkor e paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{r} = (2+5t)\,\mathbf{i} + (3-2t)\,\mathbf{j} + (1+7t)\,\mathbf{k}$$

Definíció: Ha $\mathbf{P}_0\,(x_0, y_0, z_0)$ az e egyenes egy P_0 pontja és $\mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ az e irányvektora, akkor az

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

egyenletrendszert az e egyenes paraméteres egyenletrendszerének nevezzük.

Megjegyzés: A paraméteres egyenletrendszer ugyanazt az összefüggést fejezi ki, mint a paraméteres vektoregyenlet.

Példa: Ha a $P_0\,(2,1,4)$ pont rajta van az e egyenesen és a $\mathbf{v}\,(3,-1,-2)$ vektor párhuzamos e-vel, akkor e patraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - \ \ t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Definíció: Ha $\mathbf{P}_0\,(x_0, y_0, z_0)$ az e egyenes egy P_0 pontja és $\mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ az e irányvektora, ahol v_1, v_2, v_3 egyike sem 0, akkor az

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

egyenletrendszert az e egyenes (paramétermentes) egyenletrendszerének nevezzük.

Példa: Ha a $P_0\,(2,1,4)$ pont rajta van az e egyenesen és a $\mathbf{v}\,(3,-1,-2)$ vektor párhuzamos e-vel, akkor e egyenletrendszere:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{-2}$$

Megjegyzések:

- Ha az egyenes paraméteres egyenletrendszeréből kiküszöböljük a t paramétert, akkor megkapjuk a paramétermentes egyenletrendszert.
- Ha az irányvektor valamelyik koordinátája 0, akkor az egyenes egyenletrendszere más formájú, de akkor is megkaphazó a paraméteres egyenletrendszerből t kiküszöbölésével.

Példa: Ha a $P_0\,(2,1,4)$ pont rajta van az e egyenesen és a $\mathbf{v}\,(3,0,-2)$ vektor párhuzamos e-vel, akkor e egyenletrendszere:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{z-4}{-2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Definíció: Az S síkra merőleges $\mathbf{0}$-tól különböző vektort az s sík normálvektorának nevezzük.

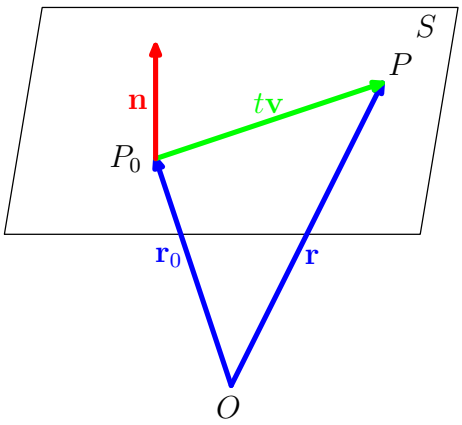
Megjegyzések:

- Egy síknak végtelen sok normálvektora van.
- Párhuzamos síkok normálvektorai megegyeznek.

Definíció: Ha $\mathbf{r}_0$ az S sík egy P_0 pontjának helyvektora és $\mathbf{n}$ az S normálvektora, akkor az

$$\mathbf{n}\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0$$

egyenletet az S sík vektoregyenletének nevezzük.



Megjegyzés: Az egyenletet azért nevezzük a sík vektoregyenletének, mert a sík minden pontjának helyvektora kielégíti, míg más pontok egyike sem.

Definíció: Ha $P_0(x_0, y_0, z_0)$ az S sík egy pontja és $\mathbf{n}(A, B, C)$ az S normálvektora, akkor az

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

egyenletet az S sík egyenletének nevezzük.

Megjegyzés: Ez az egyenlet ekvivalens a sík vektoregyenletével.

Példa: Ha $P_0(4, -1, -2)$ az S sík egy pontja, $\mathbf{n}(2, 3, 5)$ S egy normálvektora, akkor

$$2(x - 4) + 3(y + 1) + 5(z + 2) = 0$$

a sík egyenlete.

1.5.2. Feladatok

1. Írja fel a P ponton áthaladó $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres és paramétermentes egyenletrendszerét:

   a) $P(-1,3,7)$, $\mathbf{v}(-4,2,6)$

   b) $P(0,-1,2)$, $\mathbf{v}(1,7,-9)$

2. Írja fel a következő pontpárokat összekötő egyenesek egyenletrendszerét:

   a) $P(-2,5,6)$, $Q(7,-1,3)$

   b) $P(5,1,2)$, $Q(-5,1,3)$

3. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely illeszkedik a $P(-3,2,-1)$ pontra és párhuzamos az $x = 3 + 2t,\ y = 8 + t,\ z = 1 - 7t$ egyenessel!

4. Adott a sík $\mathbf{n}$ normálvektora és P pontja. Írja fel a sík egyenletét!

   a) $\mathbf{n}(-3,2,1)$, $P(9,1,0)$

   b) $\mathbf{n}(9,1,0)$, $P(-3,2,11)$

5. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(1,-2,3)$ pontra és párhuzamos a $3x - 4y + 5z - 3 = 0$ síkkal!

6. Adott két pont: $A(0,-1,3)$ és $B(1,3,5)$. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az A ponton és merőleges az AB egyenesre!

7. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(3,4,-5)$ pontra és párhuzamos az $\mathbf{a}(3,1,-1)$ és $\mathbf{b}(-1,2,-1)$ vektorokkal!

8. Egy háromszög csúcspontjai: $A(-2,0,-1)$, $B(-1,-1,-1)$, $C(1,-5,3)$. Állítson a háromszög A csúcsában a háromszög síkjára merőleges egyenest! Mely pontban döfi ez az egyenes az $x - y + z = 0$ síkot?

9. Határozza meg annak az egyenesnek a vektoregyenletét, amely amely illeszkedik a $P(1,-1,5)$ pontra, párhuzamos az $x+3y-z = 4$ síkkal és merőleges a $\dfrac{2x-1}{4} = 1+y = \dfrac{z}{4}$ egyenesre!

10. Írja fel a $P(1,3,2)$ pontra illeszkedő és a $-2x + y + 3z = 1$ és $x - y - z + 2 = 0$ síkok metszésvonalával párhuzamos egyenes vektoregyenletét!

11. Mutassa meg, hogy az $x - 3 = 3(1 - y) = -(z + 1)$ és a $4 - x = 3y + 6 = z$ egyenesek, valamint a $P(5,-1,-2)$ pont ugyanarra síkra illeszkednek! Írja fel a sík egyenletét!

12. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(-2,3,1)$ pontra és az $x - y + 3z = 8$, $2x + y - z = -2$ síkok metszésvonalára!

2. Mátrixok és determinánsok

2.1. Alapfogalmak

2.1.1. Elméleti összefoglaló

Definíció: Legyenek n és m pozitív egész számok. Nevezzük $(n \cdot m)$-es mátrixnak a valós (esetleg komplex) számok egy olyan táblázatát, amelynek n sora és m oszlopa van.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 11 & -6 \end{bmatrix}$$

Megjegyzések:

- Ha a mátrixnak n sora és m oszlopa van, akkor azt mondjuk, hogy $(n \cdot m)$ típusú.
- A táblázatban szereplő számokat a mátrix elemeinek nevezzük.
- A mátrix fogalmát általában a fenti definíciónál tágabban értelmezik: Ha $\langle T; +, \cdot \rangle$ egy test, akkor a T elemeiből képezett téglalap alakú táblázatot T feletti mátrixnak nevezzük.

Jelölések:

- A mátrixokat nyomtatott nagybetűvel szokták jelölni (nyomtatásban vastagon szedve): $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$, ...
- Ha a jelölésben a mátrix típusára is utalni akarunk, akkor megadjuk a sorok és oszlopok számát is. (Pl. $\underset{(5\cdot 7)}{\mathbf{A}}$ olyan mátrix, amelynek 5 sora és 7 oszlopa van.)
- Az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának j-edik elemét a_{ij}-vel jelöljük, tehát az első index azt mutatja, hogy az elem hányadik sorban, a második pedig azt, hogy hányadik oszlopban van. (Pl. a_{23} a második sor harmadik eleme.)
- Használatosak a mátrix jelölésére még a következők:

$$\left[a_{ij}\right], \ \left[a_{ij}\right]_{n\cdot m}, \text{ ahol } i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Definíció: Ha egy mátrixnak ugyanannyi sora van, mint ahány oszlopa, akkor négyzetes (kvadratikus) mátrixnak nevezzük.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 11 & -6 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: A négyzetes mátrix sorainak (és oszlopainak) száma a mátrix rendje. (Pl. a fenti négyzetes mátrix harmadrendű.)

Definíció: A négyzetes mátrix főátlóját azok az elemek alkotják, amelyek ugyanannyiadik sorban vannak, mint ahányadik oszlopban.

Tehát a_{11} (az első sor első eleme), a_{22} (a második sor második eleme), $\ldots$, a_{nn} (az n-dik sor n-dik eleme).

Példa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Definíció: A négyzetes mátrix másik (főátlótól különböző) átlóját mellékátlónak nevezzük.

A mellékátló elemei: a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, $\ldots$, a_{n1}.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Definíció: A diagonális mátrix (diagonálmátrix) olyan négyzetes mátrix, amelynek minden főátlón kívüli eleme 0.

Megjegyzés: Az nem kizárt, hogy a főátlóban is legyen 0.

Példák:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definíció: Az olyan mátrixot, amelynek minden eleme 0, nullmátrixnak nevezzük.

Példák:

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definíció: Az olyan diagonális mátrixot, amelynek minden főátlóbeli eleme 1, egységmátrixnak nevezzük.

Példák:

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Determinánsok

2.2.1. Elméleti összefoglaló

Definíció: n-edrendű determinánsnak nevezzük azt a függvényt, amely a négyzetes mátrixok halmazán értelmezett és minden négyzetes mátrixhoz hozzárendel egy valós számot a következő szabályok szerint:

- Ha $\underset{(2\cdot 2)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, akkor determinánsa

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Ha $\underset{(n\cdot n)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, ahol $n > 2$, akkor determinánsa

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\mathbf{D}_{11} + a_{12}\mathbf{D}_{12} + \dots + a_{1n}\mathbf{D}_{1n},$$

ahol $\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{12}, \dots, \mathbf{D}_{1n}$ rendre az $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ elemekhez tartozó előjeles aldeterminánsok.

Az előjeles aldeterminánsokat úgy kapjuk, hogy elhagyjuk a megfelelő elem a_{1i} sorát és oszlopát, és a megmaradó elemekből számított determinánst megszorozzuk $(-1)^{i+1}$-nel.

Jelölés: Mint a definícióból is kiderül, a determinánst jelölésben úgy különböztetjük meg a

mátrixtól, hogy nem zárójelbe, hanem két függőleges vonal közé tesszük. Pl.:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 6 & 3 & 8 \\ -2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Megjegyzések:

- A fenti definíció rekurzív definíció, mert egy egyszerű esetben ($(2 \cdot 2)$-es) külön megadjuk a determináns értékét, a magasabbrendű determinánsok értékét pedig visszavezetjük az alacsonyabbrendűekre.
- A determináns elnevezést valójában kettős értelemben használjuk, mert az néha a definíció szerinti függvényt, néha annak helyettesítési értékét jelenti.
- A magasabbrendű determinánsok definíció szerinti meghatározását szokás az első sor szerinti kifejtésnek nevezni.
- Lehetne beszélni $(1 \cdot 1)$-es determinánsról is, ekkor a determináns értéke annak egyetlen elemével lenne egyenlő. A $(2 \cdot 2)$-es determináns értéke ekkor éppen annak első sor szerinti kifejtésével adódna.
- Szokás a determinánst másképpen is definiálni. Más definíció esetén tétel mondja ki, hogy az első sor szerinti kifejtés a determináns értékét adja.

Példák:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-7) = 24$$

A determináns kifejtése nemcsak az első sor szerint történhet. A különböző kifejtések során használjuk az ún. sakktáblaszabályt: A determináns elemeihez $+$, illetve $-$ előjeleket rendelünk, amelyek úgy váltakoznak, mint a világos és sötét mezők a sakktáblán. Az első sor első eleméhez $+$ előjel tartozik:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Egy tetszőleges elemhez tartozó előjeles aldeterminány úgy kapható meg, hogy elhagyjuk az elem sorát és oszlopát, a megmaradó elemekhez tartozó determinánst pedig akkor szorozzuk meg (-1)-gyel, ha az elemhez a sakktábla szabály szerint $-$ előjel tartozik. Ez összhangban van az első sor szerinti kifejtésnél alkalmazott $(-1)^{i+1}$-nel valós szorzással.

Tétel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot D_{i1} + a_{i2} \cdot D_{i2} + \dots + a_{in} \cdot D_{in}$$

ahol D_{ik} az a_{ik} elemhez tartozó előjeles aldetermináns, azaz a determináns értékét bármelyik sora szerinti kifejtéssel megkaphatjuk.

Ugyancsak a determináns értéke adódik tetszőleges oszlopa szerinti kifejtéssel is.

Példa: Fejtsük ki a $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ determinánst az első sora szerint!

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,(0 - (-4)) - (3 - 8) - (-6 - 0) = 19$$

Fejtsük ki ugyanezt a determinánst a második sora szerint is!

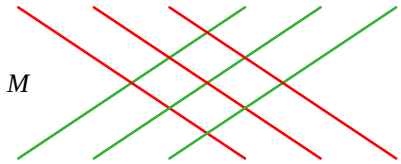
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -3\,(1 - 2) - 2\,(-4 - 4) = 19$$

Végül fejtsük ki ezt a determinánst a második oszlopa szerint!

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1\,(3 - 8) + 2\,(4 - (-3)) = 19$$

Megjegyzés: A determináns értéke mindhárom esetben 19-nek adódott, de a második és a harmadik esetben kicsit kevesebb számolással, mert olyan sort, illetve oszlopot választottunk, amelyben 0 is volt, így eggyel kevesebb aldeterminánst kellett kiszámítani.

Tétel: Harmadrendű determinánsok kiszámítására használhatjuk még az ún. Sarrus-szabályt is:

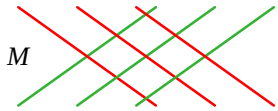


$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Példa: Számítsuk ki a

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értékét Sarrus-szabály segítségével:



2.3. Műveletek mátrixokkal

2.3.1. Elméleti összefoglaló

Definíció: Két mátrix egyenlő, ha azonos típusúak és a megfelelő helyen álló elemeik egyenlők.

Definíció: Ha egy mátrix sorait és oszlopait felcseréljük egymással, akkor az így kapott mátrixot az eredeti mátrix transzponáltjának nevezzük.

Jelölés: Az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltját $\mathbf{A}^*$-gal, illetve $\mathbf{A}^T$-vel jelöljük.

Példa:

$$\text{Ha } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 11 & 0 \end{bmatrix} \text{ akkor } \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ 4 & 11 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tétel: Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $(n \cdot m)$ típusú, akkor $\mathbf{A}^*$ $(m \cdot n)$ típusú.

Tétel: Mátrix transzponáltjának transzponáltja az eredeti mátrix:

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$$

Definíció: Az $(n \cdot 1)$-es mátrixot oszlopvektornak az $(1 \cdot n)$-es mátrixot sorvektornak is nevezzük.

Jelölések:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \text{ illetve } \mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Az oszlopvektort nyomdatechnikai okokból a következőképpen is szokták írni:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}^*$$

Az egységmátrix oszlopvektorait szokás $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$-nel jelölni (az index azt mutatja, hogy hányadik koordináta egyenlő 1-gyel):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az egységmátrixot szokás röviden így felírni:

$$\mathbf{E}_n = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$$

Azok a sorvektorok, amelyek egy koordinátája 1, a többi pedig 0 az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ vektorok transzponáltjai: $\mathbf{e}_1^* = [1, 0, \dots, 0]$, $\mathbf{e}_2^* = [0, 1, \dots, 0]$, ..., $\mathbf{e}_n^* = [0, 0, \dots, 1]$. Ezek segítségével az egységmátrix így is írható:

$$E_n = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^* \end{bmatrix}$$

Definíció: Ha $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\cdot m}$ és $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{n\cdot m}$, akkor az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok összegén (különbségén) azt a $\mathbf{C}$ mátrixot értjük, amelynek elemeire $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ esetén.

Megjegyzés: Figyeljünk arra, hogy az összeadás és kivonás csak azonos típusú mátrixok között értelmezhető.

Példák:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 11 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 9 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 11 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -4 \\ -3 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

Tétel: A mátrixok összeadása kommutatív művelet:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Tétel: A mátrixok összeadása asszociatív művelet:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Definíció: Ha $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\cdot m}$, és λ adott valós szám, akkor $\lambda\mathbf{A}$-nak nevezzük azt az $\mathbf{A}$-val azonos típusú $\mathbf{B}$ mátrixot, amelynek elemeire $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ esetén.

Példa:

$$\text{Ha } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix} \text{ akkor } 3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -21 & 0 \end{bmatrix}$$

Tétel: A mátrixok számmal való szorzására érvényesek a következő azonosságok:

$$\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$$
$$(\lambda+\mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$$
$$\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$$

Definíció: Ha $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\cdot m}$ és $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{m\cdot p}$, akkor az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok szorzatán azt a $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]_{n\cdot p}$ mátrixot értjük, amelynek elemeire $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és $\forall j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ esetén.

Megjegyzések:

- Két mátrix tehát akkor szorozható össze adott sorrendben, ha az első (baloldali) oszlopainak száma megegyezik a második (jobboldali) sorainak számával.
- A szorzatmátrix i-edik sorának j-edik eleme a baloldali tényező i-edik sorvektorának és a jobboldali tényező j-edik oszlopvektorának skaláris szorzata.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 13 & -20 \\ 5 & -27 \end{bmatrix} \end{array} \qquad -20 = 4\cdot(-3) + 1\cdot 4 + (-2)\cdot 6$$

Megjegyzés: A mátrixszorzás nem kommutatív művelet. Előfordul, hogy az $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ szorzás elvégezhető, a $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ azonban már nem. Ha mégis mindkét szorzás elvégezhető, akkor általában $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

Példák:

- Ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 15 & 22 & 29 \end{bmatrix}$, de $\mathbf{BA}$ nem végezhető el.
- Ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{bmatrix}$, tehát $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

Tétel: Ha az **A** mátrixot akár balról, akár jobbról egységmátrixszal szorozzuk, akkor a szorzat **A** lesz:

$$\mathbf{E}_n \cdot \underset{(n\cdot m)}{\mathbf{A}} = \underset{(n\cdot m)}{\mathbf{A}} \quad \text{és} \quad \underset{(n\cdot m)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{E}_m = \underset{(n\cdot m)}{\mathbf{A}}$$

Megjegyzések:

- Az egységmátrix elnevezését éppen ez a tulajdonsága indokolja.
- A tételből kiderül, hogy bár a mátrixszorzás nem kommutatív néha mégis előfordul, hogy két mátrix szorzata mindkét sorrendben létezik és egyenlő is: $\mathbf{E}_n \cdot \underset{(n\cdot n)}{\mathbf{A}} = \underset{(n\cdot n)}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{E}_n = \underset{(n\cdot n)}{\mathbf{A}}$. Egy másik példa erre, hogy egy négyzetes mátrixot nullmátrixszal szorozva mindkét sorrendben a nullmátrixot kapjuk eredményül.

Tétel: A mátrixszorzás asszociatív, mert ha az **A** mátrix a **B**-vel továbbá a **B** a **C**-vel ebben a sorrendben összeszorozhatók, akkor

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC})$$

Tétel: A mátrixszorzás disztributív a mátrixok öszeadása felett, mert ha **A** és **B** azonos típusúak és jobbról megszorozhatók **C**-vel, akkor

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

ha pedig **B** és **C** azonos típusúak és balról megszorozhatók **A**-val, akkor

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Megjegyzés: Mivel a mátrixszorzás nem kommutatív, két disztributív szabály van.

Tétel: Ha az **A** és **B** mátrixok ebben a sorrendben összeszorozhatók és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$(\lambda\mathbf{A})\,\mathbf{B} = \lambda\,(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\,(\lambda\mathbf{B})$$

Tétel: Ha $\mathbf{e}_k$ az $\mathbf{E}_m$ egységmátrix k-adik oszlopvektora és $\mathbf{a}_k$ az $\underset{(n\cdot m)}{\mathbf{A}}$ mátrix k-adik oszlopvektora, akkor $\mathbf{a}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k$.

Példa:

$$\text{Ha } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ akkor } \mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Tétel: Ha $\mathbf{e}_k^*$ az $\mathbf{E}_n$ egységmátrix k-adik sorvektora és $\mathbf{a}_k^*$ az $\underset{(n\cdot m)}{\mathbf{A}}$ mátrix k-adik sorvektora, akkor $\mathbf{a}_k^* = \mathbf{e}_k^* \cdot \mathbf{A}$.

Példa:

$$\text{Ha } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{e}_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ akkor } \mathbf{e}_2^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definíció: Az olyan négyzetes mátrixot, amelyet az egységmátrixból a sorok vagy oszlopok sorrendjének megváltoztatásával megkaphatunk, permutáló mátrixnak nevezzük.

Példa: Az $\mathbf{E}_3$ mátrixból az oszlopok cseréjével nyert $\mathbf{P} = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix permutáló mátrix.

Megjegyzés: A permutáló mátrix elnevezését következő tulajdonsága indokolja: Ha az $\mathbf{A}$ mátrixot egy (alkalmas) permutáló mátrixszal jobbról szorzunk, akkor az eredmény egy olyan mátrix, amely $\mathbf{A}$-ból az oszlopok sorrendjének megváltoztatásával keletkezik. Ha balról szorozzuk $\mathbf{A}$-t a permutáló mátrixszal, akkor a szorzatmátrix a sorok permutálásával keletkezik az $\mathbf{A}$ mátrixból.

Példák:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Definíció: Az olyan négyzetes mátrixot, amelynek determinánsa nem 0, reguláris mátrixnak nevezzük. Ha a négyzetes mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix szinguláris.

Példák:

- Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris, mert $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$
- A $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix reguláris, mert $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -52$

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix $\rho(\mathbf{A})$-val jelölt rangja $r \in \mathbb{N}$, ha r-edrendű négyzetes minormátrixai között van legalább egy reguláris és minden legalább $r+1$ rendű négyzetes minormátrixa szinguláris.

Példák:

- Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix rangja $\rho(\mathbf{A}) = 2$, mert $\mathbf{A}$ szinguláris, de pl. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ négyzetes minormátrixának determinánsa $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$
- A $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix rangja $\rho(\mathbf{B}) = 3$, mert $\mathbf{B}$ reguláris.
- A $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix rangja $\rho(\mathbf{C}) = 3$, mert van harmadrendű négyzetes minormátrixa amely reguláris, magasabbrendű négyzetes minormátrixa pedig nincs.

Definíció: Legyen $\mathbf{A}$ egy n-edrendű négyzetes mátrix. Ha létezik olyan $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix, amellyel az $\mathbf{A}$ mátrixot akár balról, akár jobbról megszorozva az $\mathbf{E}_n$ egységmátrixot kapjuk, azaz

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n,$$

akkor az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixot az $\mathbf{A}$ inverz mátrixának nevezzük.

2.3.2. Feladatok

1. Mutassuk meg példával, hogy a mátrixszorzás asszociatív!

2. Igazoljuk, hogy

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* \tag{1}$$
$$(\lambda\mathbf{A})^* = \lambda\mathbf{A}^* \tag{2}$$
$$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^* \tag{3}$$

3.
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 9 & 7 \\ 9 & 6 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Határozza meg az alábbi szorzatokat:

$$\mathbf{e}_2^*\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_3, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_4^* \end{bmatrix}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_2^* \end{bmatrix}$$

4. Milyen mátrixszal kell megszorozni az A mátrixot, hogy az első és harmadik sora helyet cseréljen, és ha azt akarjuk, hogy első és harmadik oszlopa cseréljen helyet?

5. a) Igazolja, hogy két diagonálmátrix szorzata (ha létezik), szintén diagonálmátrix.
   b) $\mathbf{D} = \langle 1 \;\; -1 \; 2 \; 3 \rangle$. Határozza meg $\mathbf{D}$ inverzmátrixát!
   c) Mit mondhatunk általában a diagonálmátrix inverzének létezéséről?

6. Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét! Használja a számítás során a determinánsok elemi tulajdonságait! (Az $\mathbf{A}$ determinánsban j a képzetes egység.)

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1+j & 1 & j \\ j & 0 & 1-j \\ 1-j & -j & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1+\cos x & 1+\sin x & 1 \\ 1-\sin x & 1+\cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

7. a) Számítsa ki az alábbi mátrix determinánsának értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 1 & 6 & -10 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

   b) Írja fel a mátrix adjungáltját és az inverzét, ha létezik!
   c) Legyen a $\mathbf{b} = [-7 \;\; -8 \; 9]^*$. Határozza meg $\det \mathbf{D}_1$, $\det \mathbf{D}_2$ és $\det \mathbf{D}_3$ értékeket, ahol a $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ és $\mathbf{D}_3$ mátrixokrendre ugy keletkeznek az $\mathbf{A}$ mátrixból, hogy az $\mathbf{A}$ első, második, ill. harmadik oszlopának helyébe beírjuk a $\mathbf{b}$ vektort.
   d) Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert Cramer-szabállyal, majd az inverz-mátrix módszerrel!

3. A lineáris tér

3.1. Alapfogalmak

3.1.1. Elméleti összefoglaló

Definíció: Legyen T egy számtest, L pedig egy halmaz, melynek elemeit vektoroknak nevezzük. Az L halmaz lineáris tér (vektortér) a T számtest felett, ha:

1. Az L halmazon értelmezett egy kétváltozós művelet (összeadás: $+$), melynek tulajdonságai a következők:
   a) kommutatív, azaz $\forall \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in L$ esetén $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$.
   b) asszociatív, azaz $\forall \mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z} \in L$ esetén
   $$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}).$$
   c) van zéruseleme, azaz $\exists \mathbf{0} \in L$, amelyre $\forall \mathbf{x}$ esetén $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$
   d) L minden $\mathbf{x}$ elemének létezik inverze a $+$ műveletre vonatkozóan, azaz $\forall \mathbf{x} \in L\ \exists \mathbf{y} \in L$, amelyre $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$. ($\mathbf{x}$ inverzét szokás $-\mathbf{x}$-szel jelölni.)
2. $\forall \mathbf{x} \in L$ és $\forall \lambda \in T$ elemekhez egyértelműen hozzá van rendelve az L halmaz egy eleme, amit a λ szám és az $\mathbf{x}$ vektor szorzatának nevezünk és $\lambda\mathbf{x}$-szel jelölünk. A számmal való szorzás tulajdonságai a következők:
   a) A T számtest 1-gyel jelölt egységelemére teljesül, hogy $\forall \mathbf{x} \in L$ esetén $1 \cdot \mathbf{x}=\mathbf{x}$.
   b) $\forall \alpha,\ \beta \in T$ és $\mathbf{x} \in L$ esetén $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$.

Definíció:

3. a) $\forall \alpha,\ \beta \in T$ és $\forall \mathbf{x} \in L$ esetén $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

   b) $\forall \alpha \in T$ és $\forall \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in L$ esetén $\alpha\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

Példák:

- L a térbeli (vagy síkbeli) vektorok halmaza, T a valós számok halmaza, $+$ a vektorösszeadás, $\cdot$ a vektorok számmal való szorzása.
- L az $n \cdot m$-es mátrixok halmaza, T a valós számok halmaza, $+$ a mátrixok összeadása, $\cdot$ a mátrixok számmal való szorzása.
- L a legfeljebb n-edfokú, valós együtthatós polinomok halmaza, T a valós számok halmaza, $+$ a polinomok összeadása, $\cdot$ a polinomok számmal való szorzása. (Vigyázat! A pontosan n-edfokú polinomok halmaza nem lenne lineáris tér.)

Definíció: Legyen $(L, T; +, \cdot)$ egy lineáris tér. Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ és $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in L$, akkor a

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

kifejezést az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

Definíció: Legyen az L lineáris tér $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektorait lineárisan függetlennek nevezzük, ha

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

csak $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ esetén teljesül.

Definíció: Ha az L lineáris tér $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektorai nem lineárisan függetlenek, akkor lineárisan összefüggők.

Példák:

- Ha a vektorok között a nullvektor is szerepel, akkor a vektorok lineárisan összefüggők.
- Az $\mathbf{a}$ és $2\mathbf{a}$ vektorok lineárisan összefüggők.

- A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független, ha nem párhuzamosak.
- A tér két vektora pontosan akkor lineárisan független, ha nem esnek egy síkba.

Tétel: Ha a lineáris tér $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektorai lineárisan összefüggők, akkor közülük legalább egy kifejezhető a többiek lineáris kombinációjaként.

Tétel: Ha a lineáris tér néhány vektora lineárisan összefüggő rendszert alkot, akkor ezekhez újabb vektor(oka)t hozzávéve ismét lineárisan összefüggő rendszert kapunk.

Következmény: Lineárisan független rendszer bármely nemüres részhalmaza is lineárisan független.

Definíció: Ha az L lineáris tér $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektorainak lineáris kombinációjaként L minden eleme előáll, akkor az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektorok rendszerét L generátorrendszerének nevezzük.

Példa: A tér három nem egy síkba eső vektora generátorrendszert alkot, de három egy síkba eső vektora nem.

Definíció: Az L lineáris tér egy lineárisan független generátorrendszerét L bázisának nevezzük. A bázis elemei a bázisvektorok.

Példák:

- A tér három nem egy síkba eső vektora bázist alkot, de négy vektora nem.
- A legfeljebb másodfokú polinomok terének egy bázisa pl.: $\langle 1, x, x^2 \rangle$

Tétel: Ha a lineáris térnek van véges elemszámú generátorrendszere, akkor ennek elemszáma legalább akkora, mint a tér vektoraiból alkotott bármely lineárisan független rendszeré.

Tétel: Ha a lineáris térnek van véges elemszámú generátorrendszere, akkor bármely bázisának elemszáma ugyanakkora.

Definíció: Az L lineáris tér egy bázisának elemszámát L dimenziójának nevezzük.

Példák:

- A sík vektorai kétdimenziós, a tér vektorai háromdimenziós teret alkotnak.
- A legfeljebb n-edfokú polinomok lineáris tere $n+1$-dimenziós.

Tétel: Legyen az L lineáris tér n dimenziós és egy bázisa $B = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \rangle$. Ekkor az L bármely $\mathbf{x}$ vektora egyértelműen állítható elő a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként.

Definíció: Ha a $B = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \rangle$ az L tér egy bázisa és $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n$ akkor az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat az $\mathbf{x}$ vektor B bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Definíció: Legyen az $(L, T; +, \cdot)$ lineáris tér. Ha $L' \subseteq L$ és $(L', T; +, \cdot)$ is lineáris tér, akkor azt mondjuk, hogy $(L', T; +, \cdot)$ altere $(L, T; +, \cdot)$-nek.

3.1.2. Feladatok

1. Adottak a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^*$ és $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^*$ vektorok.

   a) Írjuk fel az alábbi lineáris kombinációkat: $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$, $3\mathbf{v} + \mathbf{w}$!

   b) Írja fel a fenti vektorok azon lineáris kombinációját, amely előállítja a $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^*$ vektort!

   c) Van-e a fenti vektoroknak olyan lineáris kombinációja, amelyik előállítja a $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}^*$ vektort?

2. Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan független vektorok. Igaz-e, hogy alábbi vektorok is lineáris független vektorok?

   a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

   b) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $5\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$

3. Lineáris teret alkotnak-e az alábbiak a valós számtest felett:

   a) Az (x, y, z) valós számhármasok, melyekre teljesül, hogy $x + 2y - z = 0$.

   b) A $\cos Ax + \sin Bx$ alakú függvények. (A, B valós számok.)

   c) Az $e^x (A \cos x + B \sin x)$ alakú függvények. (A, B valós számok.)

3.2. Bázistranszformáció

3.2.1. Elméleti összefoglaló

Definíció: Ha az L tér egy adott bázisáról áttérünk egy másik bázisára, akkor bázistranszformációról beszélünk.

Definíció: Elemi bázistranszformációnak nevezzük az olyan bázistranszformációt, amikor a bázisvektorok közül csak egyet változtatunk meg.

Tétel: Legyen az L vektortér egy bázisa $B = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \rangle$ és $\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \ldots + a_n\mathbf{b}_n$. Ha a $\mathbf{b}_i$ bázisvektort kicseréljük a $\mathbf{b}'_i = b'_1\mathbf{b}_1 + b'_2\mathbf{b}_2 + \ldots + b'_n\mathbf{b}_n$ vektorra – elemi bázistranszformációt hajtunk végre – akkor $\mathbf{a}$ az új bázisvektorokkal kifejezve

$$\mathbf{a} = \left(a_1 - \frac{a_i}{b'_i}b'_1\right)\mathbf{b}_1 + \left(a_2 - \frac{a_i}{b'_i}b'_2\right)\mathbf{b}_2 + \ldots + \frac{a_i}{b'_i}\mathbf{b}'_i + \ldots + \left(a_n - \frac{a_i}{b'_i}b'_n\right)\mathbf{b}_n.$$

Megjegyzés: A $\mathbf{b}_i$ vektort, csak akkor cserélhetjük ki a $\mathbf{b}'_i$ vektorra, ha annak i-edik koordinátája nem zérus.

Tétel: Ha $(L, T; +, \cdot)$ lineáris tér, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ ennek a térnek vektorai és L' a $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektorok lineáris kombinációinak halmaza, akkor $(L', T; +, \cdot)$ altere az $(L, T; +, \cdot)$ térnek.

Tétel: Egy mátrix oszlopvektorai ugyanannyi dimenziós lineáris teret generálnak, mint a sorvektorai.

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorterének (és sorvektorterének) dimenzióját a mátrix rangjának nevezzük.

Jelölés: $\rho(A)$ Mátrix rangjának meghatározása:

A mátrix rangját gyakran bázistranszformáció segítségével határozzuk meg: Az oszlopvektorok közül annyit bevonunk a bázisba, amennyit lehetséges. A bázisba bevont oszlopvektoroknak nyilván függetleneknek kell lenniük és akkor nem tudunk további oszlopvektort bevonni, ha nincs már olyan oszlopvektor, amelyet a bázisba bevonva még mindig független rendszert kapnánk. A mátrix rangja tehát a bázisba bevonható oszlopvektorok maximális száma.

Inverz mátrix meghatározása:

Tudjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ egy négyzetes mátrix melynek determinánsa nem 0, akkor létezik inverz mátrixa. Ennek meghatározása bázistranszformációval is történhet. Ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

akkor $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_n$. Az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorait $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$-nel jelölve az i-edik egységvektor $\mathbf{e}_i = b_{1i}\mathbf{a}_1 + b_{2i}\mathbf{a}_2 + \dots + b_{ni}\mathbf{a}_n$, tehát ha a bázisvektorok az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai – melyek lineárisan független rendszert alkotnak, mert $\det \mathbf{A} \neq 0$– akkor $\mathbf{e}_i$ koordinátái az $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$ mátrix i-edik oszlopában álló elemek. $\mathbf{A}^{-1}$ meghatározásához tehát az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ egységvektorok koordinátáit kell kiszámítani az $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ bázisban.

Lineáris egyenletrendszer megoldása:

Tekintsük az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ennek megoldása egyenértékű az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mátrixegyenlet megoldásával, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ha $n = m$ és $\det \mathbf{A} \neq 0$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrixnak van inverze, amivel az egyenletrendszer mindkét oldalát balról megszorozva az $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ összefüggéshez jutunk.
Mivel $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{E}_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$, a megoldás $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Az egyenletrendszer megoldása ebben az esetben egyértelmű. Ennek a megoldási módszernek gyengéje, hogy csak akkor használható, ha ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen és az egyenletrendszer determinánsa nem zérus.
Megjegyzés: $\mathbf{A}$-t az egyenletrendszer mátrixának, $[\mathbf{A}\ \mathbf{b}]$-t pedig az egyenletrendszer kibővített mátrixának nevezzük. Tehát a kibővitett mátrixot úgy kapjuk, hogy az egyenletrendszer mátrixát

a konstansok oszlopával kiegészítjük:

$$[\mathbf{A}\ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A fenti egyenletrendszert vektoregyenlet formájában is felírhatjuk:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ennek egy rövidebb formáját kapjuk, ha következő jelöléseket használjuk:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ekkor az egyenletrendszer az $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ alakba írható, ahol $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ az egyenletrendszer mátrixának oszlopvektorai $\mathbf{b}$ pedig a konstansokból alkotott vektor.
Ekkor az a feladat, hogy írjuk fel – az összes lehetséges módon – a $\mathbf{b}$ vektort az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként és adjuk meg az abban szereplő együtthatókat. Az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\mathbf{b}$ benne van az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok által generált lineáris térben.

Tétel: Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A}\ \mathbf{b}])$

Definíció: Ha $\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A}\ \mathbf{b}])$, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathbf{b}$ vektor kompatibilis az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoraira nézve.

Definíció: Ha $\rho(\mathbf{A}) \neq \rho([\mathbf{A}\ \mathbf{b}])$, akkor a lineáris egyenletrendszer ellentmondó a $\mathbf{b}$ vektor nem kompatibilis az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoraira nézve.

Tétel: Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek száma n és $\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A}\ \mathbf{b}]) = n$, akkor az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.
Ha $\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A}\ \mathbf{b}]) = r < n$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Az utóbbi esetben $n - r$ ismeretlen szabadon választható, a többi ismeretlen értéke ezektől függ.

Megjegyzés: Ha végtelen sok megoldás van, nem biztos, hogy bármelyik ismeretlen szabadon választható, csak a megoldás során derül ki, hogy melyik.

3.2.2. Feladatok

1. Cserélje fel az **e**1, **e**2, **e**3 bázist az

$$\mathbf{a}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^*, \quad \mathbf{b}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^*, \quad \mathbf{c}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^*$$

bázisra! Írja fel a $\mathbf{v}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}^*$ vektort az új bázis segítségével!

2. Határozza meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix rangját!

3. Írja fel a következő egyenletrendszereknek megfelelő mátrixegyenleteket és vektori egyenleteket! Oldja meg az egyenletrendszereket!

   a)

$$\begin{aligned} 2x + z &= 5 \\ 2x + 4y &= 10 \\ 2x + y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} 2x + z &= 5 \\ 2x + 4y &= 10 \\ -2x - 16y + 3z &= -25 \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} 2x + z &= 5 \\ 2x + 4y &= 10 \\ -2x - 16y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

4. Adottak az **A** mátrix és a **b** vektor:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ c \end{bmatrix}$$

   a) Határozza meg az **A** mátrix rangját!
   b) Határozza meg a **b** vektor harmadik koordinátáját úgy, hogy **b** benne legyen az **A** mátrix oszlopvektorterében!
   c) Határozza meg a **b** vektor harmadik koordinátáját úgy, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletnek ne legyen megoldása! Mennyi ez esetben $\rho\left([\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]\right)$?

5. Van-e az $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixnak inverze? Miért? Ha van inverz, akkor határozza meg!

3.3. Lineáris transzformációk

3.3.1. Elméleti összefoglaló

Definíció: Legyen $(V_1, T; +, \cdot)$ és $(V_2, T; +, \cdot)$ vektortér. A $\varphi\colon V_1 \mapsto V_2$ transzformációt lineáris transzformációnak nevezzük, ha

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1 \quad \varphi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \varphi(\mathbf{x}_1) + \varphi(\mathbf{x}_2)$$

és

$$\forall \mathbf{x} \in V_1, \forall \alpha \in T \quad \varphi(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \varphi(\alpha \mathbf{x})$$

Tétel: Ha $\varphi\colon V \mapsto V$ a $(V, T; +, \cdot)$ n-dimenziós lineáris tér egy önmagába való lineáris leképezése, akkor megadható egy $\underset{n \cdot n}{\mathbf{A}}$ mátrix segítségével úgy, hogy $\forall \mathbf{x} \in V$ esetén $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Megjegyzés: A továbbiakban csak a vektortér önmagába való leképezéseivel foglalkozunk.

Definíció: A lineáris transzfomáció reguláris (nemszinguláris), ha különböző vektorok képe különböző. Ellenkező esetben a transzformáció szinguláris.

Tétel: Egy reguláris transzformáció lineárisan független vektorokat lineárisan független, lineárisan összefüggő vektorokat lineárisan összefüggőbe visz.

Tétel: Ha az $\mathbf{A}$ mátrixszal megadott transzformáció reguláris, akkor létezik az – egyértelműen meghatározott – inverz transzformációja, melynek mátrixa $\mathbf{A}^{-1}$.

Tétel: Az **A** mátrixszal megadott transzformáció oszlopvektorai rendre a lineáris tér bázisvektorainak képei, tehát

$$\mathbf{A} = [\varphi(\mathbf{e}_1) \quad \varphi(\mathbf{e}_2) \quad \dots \quad \varphi(\mathbf{e}_n)]$$

Példák:

- Origó körül φ szöggel való elforgatás mátrixa a síkban:

$$\mathbf{F}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

- Forgatás a z tengely körül a térben:

$$\mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ha az e egyenes $\mathbf{v}_0$ irányvektora egységvektor ($|\mathbf{v}_0| = 1$), akkor az e egyenesre vonatkozó tükrözés mátrixa $\mathbf{T} = 2\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^* - \mathbf{E}$. Ez síkban

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 & 2v_1v_2 \\ 2v_2v_1 & v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix}$$

térben

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 & 2v_1v_2 & 2v_1v_3 \\ 2v_2v_1 & v_2^2 - v_1^2 - v_3^2 & 2v_2v_3 \\ 2v_3v_1 & 2v_3v_2 & v_3^2 - v_1^2 - v_2^2 \end{bmatrix}$$

- Az **u** vektor egyenesére vonatkozó merőleges vetítés mátrixa (térben)

$$\mathbf{P} = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3^2 \end{bmatrix}$$

Definíció: Legyen $\varphi\colon V \mapsto V$ a $(V, T; +, \cdot)$ lineáris tér egy önmagába való lineáris leképezése. Az $\mathbf{x} \in V$ vektort a transzformáció sajátvektorának nevezzük, ha $\varphi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. (A vektor és a képe párhuzamosak egymással.) Az összefüggésben szereplő λ szám a transzformáció sajátértéke.

Tétel: A transzformáció sajátértékeit a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ egyenlet megoldásával, a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat a $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásával számíthatjuk ki.

3.3.2. Feladatok

1. Legyen a φ lineáris transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}.$$

   Határozza meg az $ABC\triangle$ csúcspontjainak φ transzformáltjait, ha $A(0,0)$, $B(1,3)$, $C(2,-1)$.

2. Jellemezze az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixszal megadott transzformációt!

3. Határozza meg azokat az egyeneseket, amelyek a $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal megadott transzformáció során önmagukba mennek át!

4. Adja meg az alábbi síkbeli lineáris transzformációk mátrixát:

   a) origóra vonatkozó tükrözés;

   b) az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükrözés;

   c) $30°$-os forgatás;

   d) origóra vonatkozó tükrözés és $y = x$ egyenesre vonatkozó tükrözés egymásután alkalmazása;

   e) $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

5. Adja meg a következő térbeli lineáris transzformáció mátrixát: az x tengely mentén kétszeresre nyújtás, majd a z tengely körül $45°$-kal való forgatás!

6. Számolja ki az 1. feladatban szereplő transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait! Írja fel a transzformáció mátrixát két megfelelően választott sajátvektor bázisában! Írja fel továbbá a transzformált háromszög csúcspontjainak koordinátáit e bázisban!

7. Írjuk fel az origón átmenő $\mathbf{v} = [1 \quad 2]^*$ vektor egyenesére vonatkozó tükrözés mátrixát!