2009. december 8/9.

Lineáris algebra (A, B, C)
13. előadás
(vázlat)

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetére átmenthetjük a 12/2 oldali tétel bizonyításának ötletét "megnégyszerezve", de 1./ felhasználása nélkül:
$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y})$,
$\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y})$,
$\mathcal{A}(\mathbf{x}+i\mathbf{y},\mathbf{x}+i\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) - i\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + i\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y})$,
$\mathcal{A}(\mathbf{x}-i\mathbf{y},\mathbf{x}-i\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) + i\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - i\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y})$.
Ebből
$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y})$,
$-\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y})$,
$i\mathcal{A}(\mathbf{x}+i\mathbf{y},\mathbf{x}+i\mathbf{y}) = i\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + i\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y})$,
$-i\mathcal{A}(\mathbf{x}-i\mathbf{y},\mathbf{x}-i\mathbf{y}) = -i\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) - i\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y})$.
Tehát
$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\mathcal{A}(\mathbf{x}+i\mathbf{y},\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - i\mathcal{A}(\mathbf{x}-i\mathbf{y},\mathbf{x}-i\mathbf{y}) = 4\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$,
végül

$$\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\mathcal{Q}(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - i\mathcal{Q}(\mathbf{x}-i\mathbf{y})\right\}.$$

Sikerült tehát belátni a következőt:

TÉTEL: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{C}$ pedig V-n értelmezett bilineáris alak (tehát most nincs feltéve az 1./). Ekkor az $\mathcal{A}$ minden értéke kifejezhető az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak alkalmas értékei segítségével.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén $\mathcal{Q}$ értékei eleve valósak, így lehet előjel szerint vizsgálni a különböző definitségeket a 9/4 oldali mintára. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén ugyanez értelmetlen lehet, hisz itt $\mathcal{Q}$-nak lehetnek **nem valós** értékei! A komplex esetben itt jut szerephez az eddig nem használt 1./:

TÉTEL: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén tetszőleges $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineáris alakra érvényes:
$\mathcal{A}$ Hermite-féle $\Longleftrightarrow$ az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak minden értéke valós.
[Bizonyítás: $\Longrightarrow$: Ez ugyanúgy triviális, mint 9/1-en a 4.a/ zárójelbe tett része.
$\Longleftarrow$: Fentebb az 1./ felhasználása nélkül beláttuk, hogy

$$\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\mathcal{Q}(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - i\mathcal{Q}(\mathbf{x}-i\mathbf{y})\right\}.$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{Q}(\mathbf{y}+\mathbf{x}) - \mathcal{Q}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + i\mathcal{Q}(\mathbf{y}+i\mathbf{x}) - i\mathcal{Q}(\mathbf{y}-i\mathbf{x})\right\},$$

majd $\mathcal{Q}(\lambda\mathbf{z}) = \mathcal{A}(\lambda\mathbf{z},\lambda\mathbf{z}) = \lambda\overline{\lambda}\mathcal{A}(\mathbf{z},\mathbf{z}) = |\lambda|^2\mathcal{Q}(\mathbf{z})$ alkalmazásával

$$\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\mathcal{Q}(\mathbf{x}-i\mathbf{y}) - i\mathcal{Q}(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\right\}.$$

Felhasználva, hogy most $\mathcal{Q}$ értékei valósak,

$$\overline{\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})} = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\mathcal{Q}(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) + i\mathcal{Q}(\mathbf{x}-i\mathbf{y})\right\} = \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}).]$$

Befejezésül bilineáris alak mátrixának változását vizsgáljuk új bázisra való áttéréskor a 11/4 oldali tétel mintájára a valós esetben:

TÉTEL (ÚJ BÁZISRA VALÓ ÁTTÉRÉS BILINEÁRIS ALAKNÁL): Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\dim V = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben; $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ bázis V-ben. Ekkor $\exists! \tau \in \mathcal{H}om(V, V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$ $(i = 1, ..., n)$. Legyen $D = [\tau]^{\mathbf{e}}$. Ekkor D invertálható, és tetszőleges tetszőleges $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris alak esetén

$$[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}'} = D^\top [\mathcal{A}]^{\mathbf{e}} D.$$

[Bizonyítás: ${}_j[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}'}_k = \mathcal{A}(\mathbf{e}'_j, \mathbf{e}'_k) = \mathcal{A}(\tau(\mathbf{e}_j), \tau(\mathbf{e}_k)) = \mathcal{A}(\sum_{t=1}^n {}_t[D]_j \mathbf{e}_t, \sum_{s=1}^n {}_s[D]_k \mathbf{e}_s) =$
$\sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n {}_t[D]_j {}_s[D]_k \mathcal{A}(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_s) = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n {}_j[D^\top]_{ts} [D]_{kt} [\mathcal{A}]^{\mathbf{e}}_s =$
$\sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n {}_j[D^\top]_{tt} [\mathcal{A}]^{\mathbf{e}}_{ss} [D]_k = {}_j[D^\top [\mathcal{A}]^{\mathbf{e}} D]_k$.]

Ez a tétel ad némi magyarázatot arra, hogy miért lehet fontos az olyan D, melyre $D^{-1} = D^\top$, (azaz $D^\top D = I_n$, elnevezés: D *ortogonális*), ti. ekkor a 11/4 oldali φ lineáris transzformáció és egy $\mathcal{A}$ bilineáris alak mátrixa **ugyanúgy** transzformálódik.

[12/4 folytatása:]

($AX = B$ megoldhatósága):
$A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = [\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ esetén keressük az $AX = B$ mátrixegyenlet $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ megoldását $X = [\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k]$ alakban:
$AX = B \iff A[\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k] = [\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k] \iff [A\mathbf{x}_1, ..., A\mathbf{x}_k] = [\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k] \iff$
$A\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ $(i = 1, ..., k)$.
A fenti alakok esetén az $AX = B$ megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele tehát az, hogy mind a k darab (azonos mátrixú) lineáris egyenletrendszer megoldható legyen, azaz, hogy $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k \in \mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ teljesüljön.
5/1.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén:
(1) $\exists\, A^{(\mathrm{j})} \iff \varrho(A) = m$;
(2) $\exists\, A^{(\mathrm{b})} \iff \varrho(A) = n$;
(3) $\exists\, A^{-1} \Rightarrow \varrho(A) = m = n \Rightarrow \exists\, A^{(\mathrm{b})}$, $\exists\, A^{(\mathrm{j})}$ és egyenlők $\Rightarrow \exists!\, A^{-1}$.
5/1.
Négyzetes mátrix inverzének meghatározása elemi bázistranszformációval.
5/1-2.
TÉTEL (Az adjungálás kapcsolata a mátrixműveletekkel):
$A, B \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow (A + B)^* = A^* + B^*$;
$\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;
$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times k} \Rightarrow (AB)^* = B^* A^*$.
—
TÉTEL (**rangtartó átalakítások**): $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $k \geqq 2$ esetén
$r(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$, $\quad r(\lambda \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$,
$r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$, $\quad r(\mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$.
5/3.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
5/3.
A vektoriális szorzat műveleti tulajdonságai, kapcsolata a skalárral való szorzással és az összeadással (tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorokra és λ skalárra BIZONYÍTHATÓK):

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;
$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (alternálás vagy antikommutativitás), így $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ esetén $\mathbf{b} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (tehát a vektoriális szorzat nem kommutatív);
$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$ (skalár kiemelhetősége);
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ (disztributivitás).
—
(Vektoriális szorzat kiszámítása): $[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ esetén
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{k}$.
6/1.
KIFEJTÉSI TÉTEL: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$.
—
FELCSERÉLÉSI TÉTEL: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
—
(Determináns kiszámítását megkönnyítő tételek $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetére):
$|\mathbf{0}| = 0$, de a 0 eredményhez az is elég, ha egyetlen sorban végig 0 van. Ha egyetlen sort megszorzunk λ-val, a definícióból (6/2) leolvasható, hogy a mátrix determinánsa λ-val szorzódik, így $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

$|A^\top| = |A|$.
—
$|A + B| \overset{ált}{\neq} |A| + |B|$.
6/2.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} + c_{k1} & b_{k2} + c_{k2} & \dots & b_{kn} + c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$
6/2-3.
TÉTEL: Legyen $n \geqq 2$.
a) Ha az $1, 2, ..., n$ számok $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációjában két elemet felcserélünk, akkor az inverziószám páratlan számmal változik.
b) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix valamely két sorát felcseréljük, akkor az így nyert B mátrix determinánsa: $|B| = -|A|$, azaz két sor felcserélése esetén a determináns értéke (-1)-gyel szorzódik.
—
TÉTEL: Ha $n \geqq 2$ és az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak van két megegyező sora, akkor A determinánsa 0.
6/3.
TÉTEL: Ha $n \geqq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix egyik sorához egy **másik** sorának a λ-szorosát hozzáadjuk, akkor az így keletkezett mátrix determinánsa is $|A|$, tehát az a *rangtartó* átalakítás, amikor egyik sorhoz egy másik sor számszorosát adjuk, egyben **determinánstartó** is!
6/3.

TÉTEL: $\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & ... & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & ... & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$

6/4.

KÖVETKEZMÉNY: Felső háromszög mátrix (5/2) determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdot ... \cdot a_{n-1,n-1}a_{nn}.$

(Determináns értékének kiszámítása elemi bázistranszformációval): Ha $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan, hogy $\varrho(A) < n$, akkor $|A| = 0$. $\varrho(A) = n$ esetén mindent be tudunk vinni a bázisba, de nem biztos, hogy az eredeti sorrendben. Ha a bevitt elemek sorrendje a bázisban, mondjuk $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, ..., \mathbf{a}_{i_n}$, akkor $|A| = g_1 g_2 \cdot ... \cdot g_n \cdot (-1)^{I(i_1,...,i_n)}$.

7/1-2.

KÖVETKEZMÉNY: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $|A| \neq 0 \iff \varrho(A) = n \iff \exists\, A^{-1}$.

KIFEJTÉSI TÉTEL: $n \geqq 2$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén

a) Tetszőleges $1 \leqq i \leqq n$ esetén

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij};$$

b) Tetszőleges $1 \leqq j \leqq n$ esetén

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

7/3.

CRAMER-SZABÁLY: $A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|A| \neq 0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\exists!\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, melyre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, továbbá az $\mathbf{x}$ j-edik komponense ($j = 1, ..., n$)

$$x_j = \frac{\det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{b}, ..., \mathbf{a}_n])}{\det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_j, ..., \mathbf{a}_n])}.$$

—

TÉTEL (**Vandermonde-determináns és kifejtése**): $n \geqq 2$; $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqq i > j \geqq 1} (a_i - a_j).$$

7/4.

TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén A-nak van olyan $r \times r$-es részmátrixa, melynek determinánsa $\neq 0$, viszont minden $(r+1) \times (r+1)$-es részmátrix determinánsa 0.

7/4.

TÉTEL: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális megoldása, ha $|A| = 0$.

7/4.
SZORZÁSTÉTEL: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$.
7/4, 8/1.
TÉTEL: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A diagonalizálható $\mathbb{R}$ felett $\iff$ létezik $\mathbb{R}^n$-ben az A sajátvektoraiból álló bázis (röviden: SB).
8/3.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ esetén λ_0 (jobb oldali) sajátértéke A-nak $\iff |A - I_n\lambda_0| = 0$.
8/3.
TÉTEL: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $A \sim_{\mathbb{R}} B$ esetén $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)$.
8/4.
$||\mathbf{x}|| \geqq 0$. $\quad ||\mathbf{x}|| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\quad ||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||$.
9/2.
$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \overset{?}{\leqq} ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.
9/2 (Cauchy-e. feltételezésével).
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0 \iff ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$.
9/2.
CAUCHY-EGYENLŐTLENSÉG: Legyen V valós vagy komplex euklideszi tér. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$-re $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leqq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ lineárisan összefüggő.
9/2.
TÉTEL: $n > 0$-ra tetszőleges n-dimenziós euklideszi térben létezik ortonormált bázis.
9/3.
TÉTEL (**a valós szimmetrikus mátrixok spektráltétele**): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén
A szimmetrikus $\iff \exists$ SONB $\mathbb{R}^n$-ben és A minden sajátértéke valós.
—

	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$-ra	elnevezés
$\forall\lambda_k > 0$:	$Q(\mathbf{x}) > 0$	Q pozitív definit
$\forall\lambda_k < 0$:	$Q(\mathbf{x}) < 0$	Q negatív definit
$\forall\lambda_k \geqq 0$:	$Q(\mathbf{x}) \geqq 0$	Q pozitív szemidefinit
$\forall\lambda_k \leqq 0$:	$Q(\mathbf{x}) \leqq 0$	Q negatív szemidefinit
$\exists\lambda_j > 0$ és $\exists\lambda_k < 0$:	$Q(\mathbf{u}_j) > 0, Q(\mathbf{u}_k) < 0$	Q indefinit

9/4.
TÉTEL: Legyen az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **karakterisztikus sorozata**:

$$\Delta_0 = 1; \quad \Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \dots; \quad \Delta_n = |A|.$$

Az A-hoz tartozó Q pozitív definit $\iff \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$-re $\Delta_j > 0$.

Az A-hoz tartozó Q negatív definit $\iff \forall j \in \{0, 1, \dots, [n/2]\}$-re $\Delta_{2j} > 0$ és $\forall j \in \{0, 1, \dots, [(n-1)/2]\}$-re $\Delta_{2j+1} < 0$.
—
TÉTEL: Legyen $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ha λ és μ az A különböző sajátértékei, továbbá $\mathbf{x} \in W_\lambda$, $\mathbf{y} \in W_\mu$, akkor $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$.
10/1.

EGYÉRTELMŰ KITERJESZTÉSI TÉTEL: Legyen $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben; $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ tetszőleges vektorok $\mathbb{R}^m$-ben. Ekkor $\exists! \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektortérhomomorfizmus, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$ $(i = 1, ..., n)$.

10/1.

A 10/1 oldali definícióból adódik, hogy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $[\varphi(\mathbf{x})]_\mathbf{f} = [\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}[\mathbf{x}]_\mathbf{e}$.

TÉTEL: Legyen $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, továbbá $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ sajátvektorai φ-nek, továbbá $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ a megfelelő sajátértékek, melyek **páronként különbözők**. Ekkor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$ lineárisan független sajátvektorrendszer.

11/1.

KÖVETKEZMÉNY: Ha a $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációnak n darab **páronként különböző** sajátértéke van (ahol $n = \dim \mathbb{R}^n$), akkor létezik $\mathbb{R}^n$-ben SB, azaz a φ sajátvektoraiból álló bázis.

TÉTEL: Legyen V_1 és V_2 véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett. Ekkor

$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2.$$

11/2.

DIMENZIÓÖSSZEFÜGGÉS: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$. Ha V_1 véges dimenziós, akkor $\dim \mathcal{I}m\, \varphi + \dim \mathcal{K}er\, \varphi = \dim V_1$.

11/3.

SZORZÁSTÉTEL: Legyen V_1, V_2 és V_3 vektortér $\mathbb{R}$ felett, dimenziójuk rendre n, m, s (pozitív egészek); $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben; $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m$ bázis V_2-ben; $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_s$ bázis V_3-ban; $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, $\psi \in \mathcal{H}om(V_2, V_3)$. Ekkor

$$[\psi\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{g}} = [\psi]^{\mathbf{f};\mathbf{g}}[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}.$$

11/3.

TÉTEL (ÚJ BÁZISRA VALÓ ÁTTÉRÉS): Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\dim V = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben; $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ bázis V-ben. Ekkor $\exists! \tau \in \mathcal{H}om(V, V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$ $(i = 1, ..., n)$. Legyen $D = [\tau]^\mathbf{e}$. Ekkor D invertálható, és tetszőleges $\varphi \in \mathcal{H}om(V, V)$ esetén

$$[\varphi]^{\mathbf{e}'} = D^{-1}[\varphi]^\mathbf{e} D.$$

11/4.

TÉTEL: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{R}$ pedig V-n értelmezett **szimmetrikus** bilineáris alak (tehát most minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$). Ekkor az $\mathcal{A}$ minden értéke kifejezhető az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak alkalmas értékei segítségével.

12/2.

TÉTEL: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{C}$ pedig V-n értelmezett bilineáris alak (tehát most nincs feltéve az 1./). Ekkor az $\mathcal{A}$ minden értéke kifejezhető az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak alkalmas értékei segítségével.

13/1.

TÉTEL: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén tetszőleges $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineáris alakra érvényes:
$\mathcal{A}$ Hermite-féle $\Longleftrightarrow$ az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak minden értéke valós.

13/1.

TÉTEL (ÚJ BÁZISRA VALÓ ÁTTÉRÉS BILINEÁRIS ALAKNÁL): Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\dim V = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben; $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ bázis V-ben. Ekkor $\exists! \tau \in \mathcal{H}om(V, V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$ $(i = 1, ..., n)$. Legyen $D = [\tau]^\mathbf{e}$. Ekkor D invertálható, és tetszőleges tetszőleges $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris alak esetén

$$[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}'} = D^\top [\mathcal{A}]^\mathbf{e} D.$$

13/2.