2009. december 1/2.

Lineáris algebra (A, B, C)
12. előadás
(vázlat)

Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, továbbá V vektortér a $\mathbb{K}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével). Korábban egy skaláris szorzatnak nevezett $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ függvényre teljesültek a következők minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:
1./ $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$;
2./ $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$; 2'./ $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \overline{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;
3./ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$; 3'./ $\langle \mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle$;
4.a/ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ mindig (valós és) nemnegatív;
4.b/ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
A 9/1 oldalon csak 1./, 2./, 3./, 4.a/ és 4.b/ szerepelt követelményként, a többit ezek felhasználásával igazoltuk. Tekintsük most n tagú lineáris kombinációk skaláris szorzatát (9/4 mintájára majd $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázisban lesz érdekes, de ONB helyett csak B):

$$\langle \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{e}_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j \overline{y_k} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle$$

könnyedén adódik 2./, 2'./, 3./ és 3'./ felhasználásával. Tehát lineáris kombinációk skaláris szorzatának fenti kiszámolásához 4.a/ és 4.b/ egyáltalán nem kellett, s az 1./ is csak a 2'./ és 3'./ igazolásához kellett korábban. Most az összesen 7 darab követelményből fogunk 4-et kiemelni: a skaláris szorzat olyan általánosításait vizsgáljuk, amelyekre a fenti számolás szintén elvégezhető 2./, 2'./, 3./ és 3'./ megfelelőjének feltételezésével. Az alábbi definícióban a számozás a korábbiakkal való összehasonlítást szolgálja, ne hiányoljuk az 1./-et (majd lesz később meglepően kétarcú szerepben).

DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, továbbá V vektortér a $\mathbb{K}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével). Az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{K}$ függvényt V-n értelmezett ($\mathbb{K}$-tól függően valós vagy komplex) bilineáris függvénynek, bilineáris alaknak, vagy bilineáris formának hívjuk, ha teljesülnek a következők minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:
2./ $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; 2'./ $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \overline{\lambda} \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
3./ $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$; 3'./ $\mathcal{A}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{z}, \mathbf{x})$.

[Az elnevezések használata elég kaotikus, a második és harmadik elnevezéssel néha arra utalnak, ha az értékek nem egyszerűen $\mathbb{K}$-ban, hanem egy $\mathbb{K}$ feletti vektortérben vannak.]
Némi cserebere árán eme 4 követelmény akár így is írható:
2./ $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; 2'./ $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \overline{\lambda} \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
3'./ $\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$; 3./ $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.
Ezeket szokták röviden úgy fogalmazni, hogy az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ rögzített $\mathbf{y}$ mellett az első változóban lineáris leképezés, míg rögzített $\mathbf{x}$ mellett a második változóban (a konjugálás miatt) "másodfajú" lineáris leképezés.
Ha az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{K}$ a V-n értelmezett bilineáris alak, akkor a V-beli $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis lineáris kombinációit helyettesítve:

$$\mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j \overline{y_k} \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k),$$

ami igazán motiválhatja bilineáris alak $\mathbf{e}$ bázisbeli mátrixának bevezetését:
DEFINÍCIÓ: Legyen az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{K}$ a V-n értelmezett bilineáris alak, továbbá $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben. $[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, éspedig minden szóbajövő j, k esetén $(a_{jk} =)\ {}_j[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}}_k = \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$.
Így az előbbi kifejezés a következő formában is írható:

$$\mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y_k\mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j\overline{y_k}a_{jk},$$

speciálisan

$$\mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j\overline{x_k}a_{jk},$$

ugyanez $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_jx_ka_{jk}$$

alakot ölt. Ez ugyanúgy néz ki, mint a 9/4 oldalon a szimmetrikus mátrixhoz rendelt kvadratikus alak, de hol van most a szimmetria? Újabb elnevezésre ad alkalmat, ha az 1./ megfelelője is érvényes egy bilineáris alakra:
DEFINÍCIÓ: Legyen az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{K}$ a V-n értelmezett bilineáris alak. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ **Hermite-féle** bilineáris alak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén a **szimmetrikus** bilineáris alak kifejezés is használatos), ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \overline{\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})}$.
Vérszemet kapva, menten definiálhatunk a bilineáris alakunkhoz tartozó kvadratikus alakot is, itt azonban nem árt az óvatosság, különösen definitségi kérdéseknél!
DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V\times V \to \mathbb{R}$ pedig V-n értelmezett **szimmetrikus** bilineáris alak (tehát most minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$). Ekkor az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ **kvadratikus alak**: $\mathcal{Q} : V \to \mathbb{R}$; $\quad \mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x})$.
DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{C}$ pedig V-n értelmezett bilineáris alak. Ekkor az $\mathcal{A}$-hoz tartozó **kvadratikus alak**: $\mathcal{Q} : V \to \mathbb{C}$; $\quad \mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x})$.
Meglepő lehet, hogy az 1./ megfelelője az utóbbi definícióban nem szerepel! Valóban nincs rá szükség, majd egész más szerepe lesz a komplex esetnél. Először a valós esetben vizsgáljuk meg, hogy ott viszont mire jó a szimmetria. Tekintsük $V = \mathbb{R}^2$ esetén a triviális bázisban $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixú bilineáris alakokat, előbbi persze szimmetrikus, utóbbi nem! Viszont a $\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} x_jx_ka_{jk}$ kifejezés mindkét esetben mindig nullát szolgáltat. Ha tehát a nem szimmetrikus esetre is kiterjesztenénk a definíciót, különböző bilineáris alakokhoz tartozhatna azonos kvadratikus alak. Szimmetrikus bilineáris alakokra szorítkozva azonban igazolható, hogy a kvadratikus alak értékeiből egyértelműen következtethetünk az őt szolgáltató bilineáris alak értékeire.
TÉTEL: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{R}$ pedig V-n értelmezett **szimmetrikus** bilineáris alak (tehát most minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$). Ekkor az $\mathcal{A}$ minden értéke kifejezhető az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak alkalmas értékei segítségével.
[Bizonyítás: Most $\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y})$, tehát $\mathcal{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{Q}(\mathbf{x}) + 2\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathcal{Q}(\mathbf{y})$. Ebből $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ kifejezhető $\mathcal{Q}$ értékeivel.]

A legfontosabb tételek, szövegközi állítások felsorolása, utánuk (ha bizonyítás is volt) a bizonyítás helye: előadás/oldal.

ÖSSZEFOGLALÁS (az $\mathbb{R}^n$-beli komponensenkénti összeadás (+) és valós számmal való szorzás ($\lambda\cdot$) tulajdonságai):
I./1. $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, azaz $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$-hez hozzá van rendelve egy $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$;
I./2. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (kommutativitás);
I./3. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (asszociativitás);
I./4. $\exists\, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}\,(= \mathbf{a} + \mathbf{0})$ („nullvektor" létezése);
I./5. $\forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\ \exists (-\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n : (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}\,(= \mathbf{a} + (-\mathbf{a}))$ („ellentett" létezése);
II./1. $\lambda\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, azaz $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$-hez hozzá van rendelve egy $\lambda\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$;
II./2. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ („asszociativitás");
II./3. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (első disztibutivitás);
II./4. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (második disztributivitás);
II./5. $\forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.
1/1-3.
TÉTEL: $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ B $V(\leqq \mathbb{R}^n)$-ben, $\mathbf{a} \in V \Rightarrow \exists!\, \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{b}_k$.
2/1.
TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k \in V$ olyan, hogy $\forall \mathbf{a} \in V\ \exists!\, \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{b}_k$, akkor $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ bázis V-ben.
2/1.
TÉTEL (ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ): Legyen $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ B V-ben; $\mathbf{a} \in V$; $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{b}_k$; i rögzített, $1 \leqq i \leqq k$. Ekkor
$\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}_{i+1}, ..., \mathbf{b}_k$ B V-ben $\iff \alpha_i \neq 0$.
2/1.
TÉTEL: Legyen $k \geqq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{a}_k$ egy tetszőleges zárójelezése $= ((...((\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3) + ...) + \mathbf{a}_{k-1}) + \mathbf{a}_k$.
2/2.
TÉTEL: $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\ \exists!\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2/2.
TÉTEL: $k \geqq 2$, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén
$\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ Ö $\iff \exists\, \mathbf{a}_i$, ami lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_k$ vektorrendszertől.
2/3.
TÉTEL: $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ L és $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ Ö esetén $\mathbf{b}$ lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$-tól.
2/3.
TÉTEL: Tetszőleges $\emptyset \neq A$ „$\subseteq$" $\mathbb{R}^n$ esetén $W(A) \leqq \mathbb{R}^n$, továbbá A „$\subseteq$" $W(A)$.
2/3.
TÉTEL: $\{W_1 \leqq \mathbb{R}^n,\ W_2 \leqq \mathbb{R}^n\} \Rightarrow W_1 \cap W_2 \leqq \mathbb{R}^n$.
2/3.
TÉTEL: $\emptyset \neq A$ „$\subseteq$" $\mathbb{R}^n$ esetén $\mathrm{Span}\,(A) = W(A)$.
2/4.
TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$; $V \neq \{\mathbf{0}\}$ és V-ben van véges generátorrendszer, akkor létezik bázis V-ben, sőt bármely véges generátorrendszerből kiválasztható bázis.
2/4.
KICSERÉLÉSI TÉTEL: Legyen $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ V-beli L; $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m$ G V-ben. Ekkor
$\alpha)\quad \exists j \in \{1, ..., m\} : \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ L $\qquad \beta)\quad k \leqq m$ (azaz $|\mathrm{L}| \leqq |\mathrm{G}|$).
3/1.

TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ bázisok V-ben, k pozitív egész, $|\mathrm{B}_1| = k$, akkor B_2 is véges és $|\mathrm{B}_2| = k$.
3/1.
TÉTEL: $V \leqq \mathbb{R}^n$ esetén V-ben létezik véges generátorrendszer, továbbá V-ben bármely lineárisan független rendszer kiegészíthető V bázisává.
3/1.
(Lineáris egyenletrendszer):
$\exists$ megoldás $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{b}$ oszlopában a (vesszős) $\mathbf{e}$-k soraiban csupa 0 áll vagy ez a rész nincs (azaz minden $\bullet = 0$ vagy $r = m$). Ha ez a feltétel teljesül, akkor pl. $x_{i_1} = d_1, ..., x_{i_r} = d_r$, többi $= 0$ egy megoldás. $\mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_r}$ bázis Span $(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$-ben, $r(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n) = r$. A megoldásszám: 0 vagy 1, ha $r = n$; 0 vagy ∞, ha $r < n$.
3/3.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén $I_m A = A$ és $A I_n = A$.
4/1.
TÉTEL (A transzponálás kapcsolata az eddigi műveletekkel):
$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow (A + B)^\top = A^\top + B^\top$;
$\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow (\lambda A)^\top = \lambda A^\top$;
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k} \Rightarrow (AB)^\top = B^\top A^\top$.
4/2.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{n_2 \times k_2}$, $C \in \mathbb{R}^{k_3 \times s}$ esetén

$$\exists\, (AB)C \Longleftrightarrow \underbrace{\{n_1 = n_2 \text{ és } k_2 = k_3\}}_{\Downarrow} \Longleftrightarrow \exists\, A(BC)$$
$$(AB)C = A(BC).$$

4/2.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{n_2 \times k_2}$, $C \in \mathbb{R}^{n_3 \times k_3}$ esetén

$$\exists\, A(B + C) \Longleftrightarrow \underbrace{\{n_1 = n_2 = n_3 \text{ és } k_2 = k_3\}}_{\Downarrow} \Longleftrightarrow \exists\, AB + AC$$
$$A(B + C) = AB + AC.$$

4/2.
TÉTEL: $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k} \Rightarrow \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
4/2.
(Lineáris egyenletrendszer általános megoldása): Tehát tetszőleges $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_r \\ \mathbf{x}''_{n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$-re

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow A_2\mathbf{x} = \mathbf{d} \Longleftrightarrow [I_r, D] \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_r \\ \mathbf{x}''_{n-r} \end{bmatrix} = \mathbf{d} \Longleftrightarrow \mathbf{x}'_r = \mathbf{d} - D\mathbf{x}''_{n-r},$$

amivel megkaptuk az általános megoldást: $\mathbf{x}''_{n-r}$ komponensei a szabad (vagy független) változók, $\mathbf{x}'_r$ komponensei a kötött (vagy függő) változók.
4/4.
TÉTEL: Legyenek $C = [\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n]$ és $D = [\mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_k]$ ebben a sorrendben összeszorozható $\mathbb{R}$ feletti mátrixok. Ekkor $\varrho_{\mathcal{O}}(CD) \leqq \varrho_{\mathcal{O}}(C)$.
4/4.
TÉTEL: Tetszőleges $\mathbb{R}$ feletti A mátrixra $\varrho_{\mathcal{O}}(A) = \varrho_{\mathcal{S}}(A)$ [ezentúl $= \varrho(A)$, az A **rangj**a; a ϱ helyett használatos ρ vagy akár r is].
4/4.

[Folyt. köv.]