2009. november 10/11.

Lineáris algebra (A, B, C)
9. előadás
(vázlat)

Most az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rendszerbeli koordinátáikkal felírt geometriai vektorok skaláris szorzatára ismert kifejezést (5/4) szeretnénk általánosítani először $\mathbb{R}^n$ esetére: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$ természetes általánosítás, legfeljebb a rövid jelölés kínos: $\mathbf{xy}$ nem alkalmas, mert ezek így össze nem szorozható mátrixok; a transzponálás jelét cipelni nem volna nagy fáradság, de akkor hogy általánosítsunk? Az általánosításra is alkalmas $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ jelölést választjuk [megjegyezzük, hogy gyakori az $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jelölés is]. Ekkor a $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ a hosszúság természetes általánosítása. $\mathbb{C}^n$ esetén azonban már bajban lennénk, ha a szokásos műveleti tulajdonságokat is meg szeretnénk tartani, és a hosszúságot is általánosítani akarjuk. Ezen úgy segíthetünk, hogy a kommutativitást részben feláldozzuk, s a műveleti tulajdonságoknál is megbékélünk olyasfélékkel, amelyek az adjungálásra vonatkozó 5/2 oldali tétel második állítására hasonlítanak. Így $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ esetén egy természetes általánosítás: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* \mathbf{x}$. Ezt próbáljuk most még tovább általánosítani, amikor V vektortér egy számtest felett, de megelégszünk azzal a két esettel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ illetve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mindent az utóbbinak megfelelően írunk, a valós esetben persze felesleges a konjugálás.

DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, továbbá V vektortér a $\mathbb{K}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével). Azt mondjuk, hogy a V (valós vagy komplex) euklideszi tér, ha adott benne egy skaláris szorzatnak nevezett $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ függvény, melyre a következők teljesülnek minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

1./ $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$;

2./ $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;

3./ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$;

4.a/ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ mindig (valós és) nemnegatív;

4.b/ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A definícióban a 3./ követelmény az egyik disztributivitás volt, 1./ felhasználásával adódik belőle a másik disztributivitás is:

3'./ $\langle \mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle} = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle} = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle$.

A 2./ követelmény megfelelőjével vigyázni kell:

2'./ $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Az 1./ követelményből adódik, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, tehát $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$, ezért volt 4.a/-ban csak zárójelben a nemnegativitás követelménye előtt [vigyázat: a $\mathbb{C}$-t nem lehet úgy rendezni, mint az $\mathbb{R}$-et].

A bevezetőben említett példákat most még kiegészítjük: a következő példa azt mutatja, hogy ugyanazt a vektorteret többféleképpen lehet euklideszivé tenni. Legyen $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ egy n rangú mátrix, s legyen $A = B^* B$. Ekkor $V = \mathbb{C}^n$-re az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* A \mathbf{x}$ teljesíti az összes fenti követelményt. Ugyanez igaz persze akkor is, ha itt $\mathbb{C}$ helyébe mindenütt $\mathbb{R}$-et írunk. Tanulság: amikor egy V valós vagy komplex euklideszi térről beszélünk, akkor egy V vektortérről van szó $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ felett egy **rögzített** skaláris szorzattal, mely teljesíti az 1./, 2./, 3./, 4.a/ és 4.b/ követelményeket. Egy vadabb kinézetű példa: $V = \mathbb{C}^{n \times n}$ és $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(B^* A)$.

DEFINÍCIÓ: Legyen V valós vagy komplex euklideszi tér. $\mathbf{x} \in V$ esetén az $\mathbf{x}$ (euklideszi) normája: $||\mathbf{x}|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$.

Vizsgáljuk most a norma tulajdonságait, tényleg olyan-e, mint a geometriai vektoroknál az abszolút érték? Legyen tehát $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
A 4.a/,b/-ből adódik, hogy $||\mathbf{x}|| \geqq 0$, továbbá $||\mathbf{x}|| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$. A 2./ és a 2'./ adja, hogy $||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||$.
Használhatóság szempontjából lényeges kérdés, hogy a háromszögegyenlőtlenség vajon teljesül-e: $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \overset{?}{\leqq} ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.
Ezt most óvatosan csak átfogalmazzuk:

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leqq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \Longleftrightarrow ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \leqq ||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}||^2 \Longleftrightarrow$$

$$\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \leqq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \Longleftrightarrow$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leqq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \Longleftrightarrow$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leqq 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \Longleftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} \leqq 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \Longleftrightarrow$$

$$2 \cdot \mathrm{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leqq 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leqq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||.$$

Bizonyítani még nem sikerült, viszont a bal oldalak mellékesen kiadják, hogy
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Longleftrightarrow ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$,
ami a Pitagorasz-tétel általánosítása, ha a merőlegességet a skaláris szorzat nulla voltával definiáljuk.
A háromszögegyenlőtlenség úgy nyer majd bizonyítást, hogy nála erősebb tételt igazolunk:

CAUCHY-EGYENLŐTLENSÉG: Legyen V valós vagy komplex euklideszi tér. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$-re $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ lineárisan összefüggő.

Bizonyítás: I.: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ Ö esetén valamelyik a másiknak számszorosa, pl. $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$. Ekkor $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |\langle \lambda\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle| = |\lambda\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$.
II.: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ L esetén biztos, hogy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, és tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Tehát 4.a/ és 4.b/ szerint

$$0 < \langle \lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle = \langle \lambda x, \lambda\mathbf{x} \rangle + \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = ||\lambda\mathbf{x}||^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\{\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\} + ||\mathbf{y}||^2$$

$$= |\lambda|^2 ||\mathbf{x}||^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\{\lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\} + ||\mathbf{y}||^2.$$

Mivel a szorzat valós részét nem tudjuk kényelmesen számolni, a paraméter választásával biztosítjuk, hogy valós legyen a szorzat, de még maradjon szabad választásunk is. Legyen tehát $\lambda = \alpha\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$ alakú, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$0 < \alpha^2 |\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}|^2 ||\mathbf{x}||^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\{\alpha\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}(\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\} + ||\mathbf{y}||^2 =$$

$$\alpha^2 |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 ||\mathbf{x}||^2 + 2\alpha|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 + ||\mathbf{y}||^2.$$

Az egyenlőtlenséget megszorozva $||\mathbf{x}||^2 > 0$-val, azt kapjuk, hogy

$$0 < |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \{\alpha^2 ||\mathbf{x}||^4 + \ 2\alpha||\mathbf{x}||^2\} + ||\mathbf{x}||^2 ||\mathbf{y}||^2,$$

azaz
$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 < |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \{(\alpha||\mathbf{x}||^2 + 1)^2\} + ||\mathbf{x}||^2 ||\mathbf{y}||^2$. Végül az $\alpha = -\frac{1}{||\mathbf{x}||^2}$ adja a kívánt egyenlőtlenséget. Ezután már definiálhatunk távolságot euklideszi térben: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$.

Valós euklideszi térben $\mathbf{0}$-tól különböző vektorok $[0,\pi]$-beli hajlásszögét a geometriai vektoros definíció kifordításával nyerhetjük: $\cos\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{||\mathbf{x}||\cdot||\mathbf{y}||}$. Ennek értelmességét a Cauchy-egyenlőtlenség biztosítja. Komplex euklideszi térre csak a merőlegességet (ortogonalitást) definiáljuk a már említett módon: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, ha $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0$. Így már tudjuk valamennyire általánosítani a geometriai vektoroknál hasznos $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ rendszert:

DEFINÍCIÓ: Legyen V n-dimenziós (valós vagy komplex) euklideszi tér, $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ B V-ben. Az $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ ortogonális bázis (OB) V-ben, ha (bázis és) elemei páronként ortogonálisak. Az $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ ortonormált bázis (ONB) V-ben, ha elemei páronként ortogonálisak és normájuk 1.

TÉTEL: $n > 0$-ra tetszőleges n-dimenziós euklideszi térben létezik ortonormált bázis.

Bizonyítás: Először jegyezzük meg, hogy elég egy OB megadása: Ha $\mathbf{f}_1,...,\mathbf{f}_n$ OB V-ben, akkor

$$\frac{\mathbf{f}_1}{||\mathbf{f}_1||},...,\frac{\mathbf{f}_n}{||\mathbf{f}_n||}$$

ONB V-ben. Egy $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ OB keresése a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással történhet. Legyen $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_n$ bázis V-ben, ezt fogjuk „ortogonalizálni”: Legyen $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1$. [Ha $\mathbf{b}_2$ merőleges $\mathbf{b}_1$-re, akkor persze folytathatjuk ugyanígy, de ha nem, akkor $\mathbf{b}_2$-t $\mathbf{e}_1$ alkalmas számszorosának hozzáadásával próbáljuk módosítani.] Tegyük fel, hogy már adott $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_i$ úgy, hogy páronként ortogonálisak és Span $(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_i)$ = Span $(\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_i)$ (és $i < n$). Ekkor keressük $\mathbf{e}_{i+1}$-et a következő alakban:

$$\mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{b}_{i+1} + \lambda_1\mathbf{e}_1 + ... + \lambda_i\mathbf{e}_i.$$

Az együtthatókat [melyeknek igazából egy $i+1$ felső index is kellene] úgy próbáljuk meghatározni, hogy $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_{i+1}$ páronként ortogonálisak legyenek, továbbá teljesüljön Span$(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_{i+1})$ = Span$(\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_{i+1})$ is. Utóbbi ($\subseteqq$ és $\supseteqq$) egyszerű számolással adódik, a merőlegességet illetően pedig csak azt kell biztosítanunk, hogy az új $\mathbf{e}_{i+1}$ ortogonális legyen a korábbi $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_i$-re. Legyen tehát $1 \leqq j \leqq i$. Ekkor

$$\langle \mathbf{e}_{i+1},\mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{b}_{i+1} + \lambda_1\mathbf{e}_1 + ... + \lambda_i\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{b}_{i+1},\mathbf{e}_j\rangle + \langle \lambda_1\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_j\rangle + ... + \langle \lambda_i\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\rangle =$$

$$\langle \mathbf{b}_{i+1},\mathbf{e}_j\rangle + \lambda_1\langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_j\rangle + ... + \lambda_i\langle \mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{b}_{i+1},\mathbf{e}_j\rangle + \lambda_j\langle \mathbf{e}_j,\mathbf{e}_j\rangle.$$

Span $(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_i)$ = Span $(\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_i)$ miatt Span $(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_i)$ dimenziója i, így $\mathbf{e}_j \neq \mathbf{0}$. Értelmes tehát a

$$\lambda_j = -\frac{\langle \mathbf{b}_{i+1},\mathbf{e}_j\rangle}{\langle \mathbf{e}_j,\mathbf{e}_j\rangle}$$

választás, és biztosítja a kivánt merőlegességeket.

A továbbiakhoz rögzítsük $\mathbb{R}^n$-et, és rajta az $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^\top\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top\mathbf{x}$ skaláris szorzatot! Bizonyítás nélkül mondjuk ki a következő nevezetes tételt:

TÉTEL (**a valós szimmetrikus mátrixok spektráltétele**): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén A szimmetrikus $\iff \exists$ SONB $\mathbb{R}^n$-ben és A minden sajátértéke valós.

DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $A^\top = A$ esetén az A-hoz tartozó Q **kvadratikus alak** (vagy kvadratikus forma): $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\quad Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$.

Ez $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ esetén úgy is írható, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k.$$

Pl. $n = 2$ esetén ez így néz ki (magyarázván az elnevezést): $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

A spektráltétel biztosítja, hogy létezik SONB, azaz olyan $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ONB $\mathbb{R}^n$-ben, melyre $A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$ és $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Az $\mathbf{x}$-et ebben az ONB-ben érdemes felírni:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{u}_k \text{-ra} \qquad A\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A\mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k \mathbf{u}_k; \qquad Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} =$$

$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{u}_j,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k \mathbf{u}_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \lambda_k \alpha_k \langle \mathbf{u}_j,\ \mathbf{u}_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2.$$

Ebből az ún. négyzetösszegre való redukcióból (hívják főtengelytételnek is) megállapíthatjuk, hogy hogyan függ a kvadratikus alak értékének előjele a sajátértékek előjelviszonyaitól. Mivel $Q(\mathbf{0}) = 0$, ezért $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ az érdekes. Az eredményeket az alábbi táblázatba foglalhatjuk a szokásos elnevezésekkel együtt:

	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$-ra	elnevezés
$\forall \lambda_k > 0$:	$Q(\mathbf{x}) > 0$	Q pozitív definit
$\forall \lambda_k < 0$:	$Q(\mathbf{x}) < 0$	Q negatív definit
$\forall \lambda_k \geqq 0$:	$Q(\mathbf{x}) \geqq 0$	Q pozitív szemidefinit
$\forall \lambda_k \leqq 0$:	$Q(\mathbf{x}) \leqq 0$	Q negatív szemidefinit
$\exists \lambda_j > 0$ és $\exists \lambda_k < 0$:	$Q(\mathbf{u}_j) > 0, Q(\mathbf{u}_k) < 0$	Q indefinit

Annak eldöntése, hogy Q milyen definit, elvileg lehetséges a sajátértékek kiszámítása nélkül is az A négyzetes részmátrixai determinánsai segítségével. A pozitív (ill. negatív) definit esetben ezt könnyű megfogalmazni a bal felső sarokaldeterminánsok segítségével egy tételben (bizonyítás nélkül):

TÉTEL: Legyen az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **karakterisztikus sorozata**:

$$\Delta_0 = 1; \quad \Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \ldots; \quad \Delta_n = |A|.$$

Az A-hoz tartozó Q pozitív definit $\iff \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}$-re $\Delta_j > 0$.

Az A-hoz tartozó Q negatív definit $\iff \forall j \in \{0, 1, \ldots, [n/2]\}$-re $\Delta_{2j} > 0$ és $\forall j \in \{0, 1, \ldots, [(n-1)/2]\}$-re $\Delta_{2j+1} < 0$.

Az első esetben azt mondják, hogy a karakterisztikus sorozat jeltartó, a másodikban pedig azt, hogy a karakterisztikus sorozat jelváltó (a Δ_0-t ne felejtsük ki!).