2009. október 13/14.

Lineáris algebra (A, B, C)
6. előadás
(vázlat)

Ha $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok és jobbrendszert alkotnak, akkor $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$ mind könnyen ellenőrizhető, és

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} \text{ és } \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$$

esetén a (több tagra is igazolható) disztributivitás és a skalár kiemelhetőségének felhasználásával

$$\begin{gathered}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) \times (\beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}) = \\
\alpha_1\beta_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + \alpha_1\beta_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + \alpha_1\beta_3(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\
\alpha_2\beta_1(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + \alpha_2\beta_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + \alpha_2\beta_3(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\
\alpha_3\beta_1(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + \alpha_3\beta_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + \alpha_3\beta_3(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) = \\
(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{k}
\end{gathered}$$

adódik. Ezt felhasználhatjuk pl. a
KIFEJTÉSI TÉTEL: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$
és a
FELCSERÉLÉSI TÉTEL: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
bizonyítására. Előbbiből ki lehet mutatni, hogy a vektoriális szorzat nem asszociatív! Utóbbiban előfordult vegyesen a vektoriális és a skaláris szorzat, szokás is definiálni (de a jelölés veszélyes):
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorok vegyes szorzata: „$\mathbf{abc}$”$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$.
[[Belátható, hogy a nem egysíkú $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorok vegyes szorzata megegyezik az általuk kifeszített parallelepipedon előjeles térfogatával (jobbrendszernél +, különben − előjellel).]] Érdemes még kiemelni az „elfajuló” esetet: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} = 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ egysíkú.
Ezek szerint: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} \neq 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ L. Az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ valós elemű mátrix oszlopai segítségével definiált $[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, $[\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$, $[\mathbf{c}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$ esetén az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorok $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$ vegyes szorzatát kiszámolva, az eredmény:
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.
Ezt szeretnénk most általánosítani $n\times n$-es valós elemű mátrix esetére lehetőleg úgy, hogy nemnulla volta azzal legyen ekvivalens, hogy a rang n. A szorzatokat úgy rendeztük, hogy mindegyikben az $\{1, 2, 3\}$ sorindexek szerepeljenek, röviden: 123. Ekkor a következő oszlopindexek találhatók mellettük: 123, 231, 312, 321, 132, 213. Itt éppen az 123 számok összes permutációját írtuk le, melynek az általánosítása kézenfekvő. Az előjelezés megfejtése céljából próbáljuk őket szomszédos cserékkel az 123 alakra hozni: az alkalmas szomszédos cserék száma lehet pl. rendre $0, 2, 2, 3, 1, 1$. Ez ugyan nem egyértelmű, de csak az az észrevétel a fontos, hogy az első háromnál páros, a második háromnál páratlan szám adódott.

Adott n pozitív egész esetén most tekintsük az $1, 2, ..., n$ számok összes permutációját, válasszunk ki közülük egy $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációt (ez az $1, 2, ..., n$ valamilyen sorrendben). Azt mondjuk, hogy ebben a permutációban az (i_μ, i_ν) elempár inverzióban van (vagy inverziót alkot), ha $\mu < \nu$, de $i_\mu > i_\nu$. Jelöljük $I(i_1, i_2, ..., i_n)$-nel az $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációban az inverziót alkotó elempárok számát. Ezt írva (-1) kitevőjébe, sikerül az előjelezés általánosítása. Ezek szerint $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ${}_j[A]_k = a_{jk}$ esetén célszerű képeznünk minden $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációra az $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot ... \cdot a_{ni_n}$ szorzatot, megszorozni $(-1)^{I(i_1,i_2,...,i_n)}$-nel, majd a kapott kifejezéseket összeadni. Az $1, 2, ..., n$ számok összes $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációjára vonatkozó összegezést úgy fogjuk jelölni, hogy egy szumma jel alá odaírjuk az $i_1, ..., i_n$ permutációt, alája zárójelben pedig az $1, ..., n$-et.

DEFINÍCIÓ: Az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **determinánsa** egy alább definiált **szám**, melyet röviden $|A|$-val jelölünk, részletesebben kiírhatjuk a mátrix elemeit a szokott módon, de függőleges vonalak közé:

$$(|A| =) \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1,...,i_n \\ (1,...,n)}} (-1)^{I(i_1,i_2,...,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot ... \cdot a_{ni_n}.$$

$n = 2$ esetén $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. $n = 3$ esetén érdemes a már ismert kifejezést át is alakítani: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$. Feltűnő lehet a szerkezeti hasonlóság az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 6/1 oldali kifejezéséhez, ennek memorizálásához segíthet a következő **formális** kiegészítés:

$(\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) \times (\beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}) =$

$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$

Az is látszik, hogy nagy n esetén a definícióval való számolás borzasztóan műveletigényes. Ezért szükségesek a számolást megkönnyítő tételek $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetére. $|\mathbf{0}| = 0$, de a 0 eredményhez az is elég, ha egyetlen sorban végig 0 van. Ha egyetlen sort megszorzunk λ-val, a mátrix determinánsa λ-val szorzódik, így $|\lambda A| = \lambda^n |A|$. Bizonyítás nélkül megemlítjük még, hogy $|A^\top| = |A|$.

Láttuk már, hogy $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, így speciálisan $|2A| = 2^n |A|$ mutatja, hogy az összeadással is vigyázni kell: $|A + B| \overset{ált}{\neq} |A| + |B|$, például $A = B = I_2$ esetén $4 = |2I_2| \neq 2|I_2| = 2$. Ha egyetlen sort szoroztunk λ-val, akkor a mátrix determinánsa λ-val szorzódott. Ennek alapján azzal érdemes próbálkozni, amikor csak egyetlen sorban vannak összegek. Tegyük fel, hogy az A mátrix k-adik sorában kéttagú összegek vannak: $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}\,(j = 1, ..., n)$. Ekkor a definícióban a (-1)-hatvány utáni szorzat k-adik tényezője (a_{ki_k}) helyébe $b_{ki_k} + c_{ki_k}$ kerül, így az egész szummát két szumma összegére bonthatjuk:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \dots & b_{kn}+c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Szükségünk lesz az inverziószám változásának ismeretére, amikor a permutációban az elemeket cserélgetjük. Könnyű látni, hogy szomszédos elemek cseréje esetén az inverziószám 1-gyel változik (1-gyel nő, vagy csökken), a távolabbi elemek cseréjét visszavezethetjük szomszédos elemek páratlan számú cseréjére, ebből kideríthetjük sorcserénél a determináns változását, de ezt csak bizonyítás nélkül közöljük:

TÉTEL: Legyen $n \geqq 2$.
a) Ha az $1, 2, ..., n$ számok $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációjában két elemet felcserélünk, akkor az inverziószám páratlan számmal változik.
b) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix valamely két sorát felcseréljük, akkor az így nyert B mátrix determinánsa: $|B| = -|A|$, azaz két sor felcserélése esetén a determináns értéke (-1)-gyel szorzódik.
Részletezzük viszont a fenti tételnek két igen fontos következményét.
TÉTEL: Ha $n \geqq 2$ és az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak van két megegyező sora, akkor A determinánsa 0.
[Biz: a két azonos sor felcserélésétől egyrészt nem változik a mátrix, így a determinánsa sem, másrészt a cserétől determinánsa (-1)-gyel szorzódik. Tehát $|A| = -|A|$, azaz $|A| + |A| = 0$, így $|A| = 0$. (Itt számokról van szó, de jegyezzük meg, hogy a legutolsó következtetés más struktúrákban általában nem érvényes, pl. $1 + 1 \equiv 0 \mod 2$, de $1 \not\equiv 0 \mod 2$.)]
TÉTEL: Ha $n \geqq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egyik sorához egy **másik** sorának a λ-szorosát hozzáadjuk, akkor az így keletkezett mátrix determinánsa is $|A|$, tehát az a *rangtartó* átalakítás, amikor egyik sorhoz egy másik sor számszorosát adjuk, egyben **determinánstartó** is!
[Biz: Jelöljük ${}_k[A]$-val az A mátrix k-adik sorát. Az egyszerűség kedvéért csak azt részletezzük, amikor az első sorhoz adjuk hozzá a második sor λ-szorosát. Ekkor

$$\begin{vmatrix} {}_1[A] + \lambda\, {}_2[A] \\ {}_2[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}_1[A] \\ {}_2[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\, {}_2[A] \\ {}_2[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}_1[A] \\ {}_2[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} {}_2[A] \\ {}_2[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|.$$

Az általános esetben hasonlóan megy a bizonyítás.]
Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy sorában végig 0 van, akkor már tudjuk, hogy 0 a mátrix determinánsa. Most vizsgáljuk meg egy egyszerű esetben azt, amikor egy sor majdnem végig

0, pl. A utolsó sorában az utolsó elem kivételével minden 0. Eme speciális szerkezetű mátrix determinánsára írjuk fel a definíciót részletesen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n-1},i_n \\ (1,\dots,n-1,n)}} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_{n-1},i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{n-1,i_{n-1}} a_{ni_n}.$$

Tekintsük az összeg azon tagjait, amelyekben az $i_n < n$. Ezeknél a szorzat utolsó tényezője: $a_{ni_n} = 0$, s az összeg vizsgált tagja is 0. Eszerint az összegnek sok tagja [pontosan $(n-1)\cdot(n-1)! = n! - (n-1)!$ darab] 0, ezeket el is hagyhatjuk. Maradnak azok a tagok, ahol $i_n = n$ [ilyen van $(n-1)!$ darab], speciális mátrixunk determinánsa tehát

$$= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n-1},n \\ (1,\dots,n-1,n)}} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_{n-1},n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{n-1,i_{n-1}} a_{nn}.$$

Az összegezés most úgy értendő, hogy az $1, 2, ..., n$ azon permutációira összegezünk, ahol az utolsó helyen n áll. Ekkor az előtte lévő $i_1, ..., i_{n-1}$ befutja az $1, 2, ..., n-1$ összes permutációját, ennek megfelelően módosítjuk a szumma alatti részt. Örömmel látjuk, hogy $I(i_1, ..., i_{n-1}, n) = I(i_1, ..., i_{n-1})$, mert az n leghátul állt, s az előtte lévőknél nagyobb, így egyikkel sem alkothatott inverziót. Ezután a_{nn} kiemelésével

$$a_{nn} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n-1} \\ (1,\dots,n-1)}} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_{n-1})} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{n-1,i_{n-1}}$$

adódik, ahol az összegben felismerhetjük az A bal felső sarkában lévő $(n-1)\times(n-1)$-es rész determinánsát, s nyertük a következőt:
TÉTEL:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

KÖVETKEZMÉNY: Felső háromszög mátrix (5/2) determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdot \dots \cdot a_{n-1,n-1} a_{nn}.$$

Így persze diagonális mátrixok determinánsa is a főátlóban lévő elemek szorzata, például $|I_n| = 1$. Szerepelt már (bizonyítás nélkül), hogy $|A^\top| = |A|$, így a sorokra megfogalmazott állítások oszlopokra is érvényesek, tehát pl. alsó háromszög mátrix determinánsa is a főátlóban lévő elemek szorzata.