Orosz Ágota   Kaiser Zoltán

# Diszkrét Matematika II. példatár

mobiDIÁK könyvtár

Orosz Ágota   Kaiser Zoltán

# Diszkrét Matematika II. példatár

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Orosz Ágota

Kaiser Zoltán

# Diszkrét Matematika II. példatár

egyetemi jegyzet

**mobiDIÁK könyvtár**
Debreceni Egyetem Informatikai Intézet

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.unideb.hu


A mű a *A mobiDIÁK önszervező mobil portál* (IKTA, OMFB-00373/2003) és a *GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver* (ITEM, 50/2003) projektek keretében készült.

# Tartalomjegyzék

**1. Lineáris leképezések** . . . . . . . . . . 9
1. Vektorterek lineáris leképezései . . . . . . . . . . 9
2. Bázis- és koordinátatranszformáció . . . . . . . . . . 19
3. Lineáris transzformációk . . . . . . . . . . 25

**2. Euklideszi és unitér terek** . . . . . . . . . . 47
1. Lineáris, bilineáris és kvadratikus formák . . . . . . . . . . 47
2. Euklideszi terek . . . . . . . . . . 68
3. Euklideszi terek lineáris operátorai . . . . . . . . . . 83

**3. Gráfelmélet** . . . . . . . . . . 91
1. Gráfelméleti alapfogalmak . . . . . . . . . . 91
2. Euler-kör, Euler-vonal, Hamilton-kör . . . . . . . . . . 102
3. Gráfok csúcsmátrixa . . . . . . . . . . 109

**Irodalomjegyzék** . . . . . . . . . . 113

# 1. fejezet
# Lineáris leképezések

## 1. Vektorterek lineáris leképezései

**1.1. Feladat.** *Legyenek $V_1$ és $V_2$ vektorterek a $\mathbb{T}$ test felett. Bizonyítsa be, hogy egy $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés pontosan akkor lineáris, ha bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ és $\underline{x}, \underline{y} \in V_1$ esetén*

$$\varphi(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = \alpha\varphi(\underline{x}) + \beta\varphi(\underline{y}), \tag{1}$$

*azaz a lineáris leképezések definíciójában szereplő két tulajdonság (additivitás és homogenitás) az (1) tulajdonsággal egyenértékű!*

*Megoldás.*

1. Tegyük fel, hogy $\varphi$ lineáris. Ekkor az additivitás miatt
$$\varphi(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = \varphi(\alpha\underline{x}) + \varphi(\beta\underline{y}),$$
és a homogenitás miatt
$$\varphi(\alpha\underline{x}) + \varphi(\beta\underline{y}) = \alpha\varphi(\underline{x}) + \beta\varphi(\underline{y}),$$
tehát teljesül az (1) tulajdonság.
2. Tegyük fel, hogy teljesül az (1) tulajdonság. Ekkor az $\alpha = \beta = 1$ választással adódik az additivitás illetve a $\beta = 1$ és $\underline{y} = \underline{0}$ választással megkapjuk, hogy $\varphi$ homogén.

**1.2. Feladat.** *Legyenek $V_1$ és $V_2$ vektorterek a $\mathbb{T}$ test felett. Bizonyítsa be, hogy bármely $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés*

1. *a nullvektort nullvektorba képezi,*
2. *lineárisan függő vektorokat lineárisan függő vektorokba képez.*

*Megoldás.*

1. A lineáris leképezések additivitása miatt
$$\varphi(\underline{0}) = \varphi(\underline{0} + \underline{0}) = \varphi(\underline{0}) + \varphi(\underline{0}) = 2\varphi(\underline{0}),$$
így $\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$.

2. Tegyük fel, hogy az $(a) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ vektorrendszer lineárisan függő. Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{T}$ nem mind nulla együtthatók, hogy
$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0},$$
így
$$\underline{0} = \varphi(\underline{0}) = \varphi(\lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_n \underline{a}_n) = \lambda_1 \varphi(\underline{a}_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(\underline{a}_n),$$
tehát a $\varphi(\underline{a}_1), \dots, \varphi(\underline{a}_n)$ vektorrendszer szintén lineárisan függő, mert belőlük a nullvektor előállítható nem triviális lineáris kombinációként.

**1.3. Feladat.** *Ellenőrizze a lineáris leképezések definíciója alapján, hogy az alábbi leképezések lineárisak-e vagy sem.*

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x_1, x_2) = x_1$
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3, x_2)$
4. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_1 x_2, x_2)$
5. $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(\underline{x}) = A\underline{x}$, *ahol* $A \in \mathcal{M}_{n \times k}$
6. $\varphi : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2, \quad \varphi(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = 3a_3 x^2 + a_1$
7. $\varphi : \mathcal{M}_{n \times n} \to \mathcal{M}_{n \times n}, \quad \varphi(A) = A^\top$

*Megoldás.*

1. Ellenőrizzük külön az additivitást és a homogenitást:
$$\begin{aligned} \varphi(\underline{x} + \underline{y}) &= \varphi((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = x_1 + y_1, \\ \varphi(\underline{x}) + \varphi(\underline{y}) &= \varphi(x_1, x_2) + \varphi(y_1, y_2) = x_1 + y_1, \end{aligned}$$
tehát az additivitás teljesül. Mivel
$$\varphi(\lambda \underline{x}) = \varphi(\lambda(x_1, x_2)) = \varphi(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda x_1 = \lambda \varphi(x_1, x_2) = \lambda \varphi(\underline{x}),$$
így a homogenitás is teljesül és a leképezés lineáris.
2. Megvizsgáljuk, hogy additív-e a leképezés:
$$\begin{aligned} \varphi((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2), \\ \varphi(x_1, x_2) + \varphi(y_1, y_2) &= (x_1 + 1, x_2) + (y_1 + 1, y_2) \\ &= (x_1 + y_1 + 2, x_2 + y_2), \end{aligned}$$
tehát nem az. Ez egyébként abból is látható, hogy $\varphi(0, 0) = (1, 0)$ (lásd 1.2 feladat).

3. Most a linearitás ellenőrzésére az 1.1 feladatban szereplő (1) tulajdonságot használjuk:

   $\varphi(\alpha(x_1,x_2,x_3)+\beta(y_1,y_2,y_3)) =$
   $\varphi(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3) =$
   $((\alpha x_1+\beta y_1)+2(\alpha x_2+\beta y_2),(\alpha x_2+\beta y_2)-(\alpha x_3+\beta y_3),\alpha x_2+\beta y_2) =$
   $(\alpha(x_1+2x_2)+\beta(y_1+2y_2),\alpha(x_2-x_3)+\beta(y_2-y_3),\alpha x_2+\beta y_2),$
   $\alpha\varphi(x_1,x_2,x_3)+\beta\varphi(y_1,y_2,y_3) =$
   $\alpha(x_1+2x_2,x_2-x_3,x_2)+\beta(y_1+2y_2,y_2-y_3,y_2) =$
   $(\alpha(x_1+2x_2)+\beta(y_1+2y_2),\alpha(x_2-x_3)+\beta(y_2-y_3),\alpha x_2+\beta y_2),$

   tehát a leképezés lineáris.
4. Ellenőrizzük a homogenitást:

   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda(x_1,x_2)) &= \varphi(\lambda x_1,\lambda x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_1\lambda x_2,\lambda x_2),\\ \lambda\varphi(x_1,x_2) &= \lambda(x_1,x_1x_2,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_1x_2,\lambda x_3),\end{aligned}$$

   tehát nem lineáris a leképezés.
5. A mátrixműveletek tulajdonságait felhasználva igazolható, hogy ez a leképezés lineáris:

   $$\varphi(\alpha\underline{x}+\beta\underline{y})=A(\alpha\underline{x}+\beta\underline{y})=\alpha A\underline{x}+\beta A\underline{y}=\alpha\varphi(\underline{x})+\beta\varphi(\underline{y}).$$
6. Ez a leképezés is lineáris, hiszen additív:

   $$\begin{aligned}\varphi(p+q) &= \varphi(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)\\ &= \varphi((a_3+b_3)x^3+(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0))\\ &= 3(a_3+b_3)x^2+(a_1+b_1)=3a_3x^2+a_1+3b_3x^2+b_1\\ &= \varphi(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)+\varphi(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)\\ &= \varphi(p)+\varphi(q)\end{aligned}$$

   és homogén:

   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda p) &= \varphi(\lambda(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0))\\ &= \varphi(\lambda a_3x^3+\lambda a_2x^2+\lambda a_1x+\lambda a_0)=3\lambda a_3x^2+\lambda a_1\\ &= \lambda(a_3x^2+a_1)=\lambda\varphi(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=\lambda\varphi(p).\end{aligned}$$
7. A transzponálás tulajdonságai miatt $\varphi$ lineáris:

   $$\varphi(\alpha A+\beta B)=(\alpha A+\beta B)^\top=\alpha A^\top+\beta B^\top=\alpha\varphi(A)+\beta\varphi(B).$$

**1.4. Feladat.** *Legyenek $V_1$ és $V_2$ vektorterek a $\mathbb{T}$ test felett. Bizonyítsa be, hogy egy $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés esetén* $\operatorname{Ker}\varphi$ *altér.*

*Megoldás.* A leképezés nulltere (vagy magtere) azon vektorokat tartalmazza, amelyeket $\varphi$ a nullvektorba képez:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{x} \in V_1 | \varphi(\underline{x}) = \underline{0}\},$$

és soha sem üres halmaz, hiszen $\underline{0} \in \operatorname{Ker}\varphi$ (lásd 1.2 feladat). Bizonyítanunk kell, hogy zárt a vektortér műveletekre nézve, azaz nulltérbeli vektorok összege és skalárszorosa is nulltérbeli.

Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in \operatorname{Ker}\varphi$, tehát $\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{y}) = \underline{0}$. Ekkor az additivitás miatt

$$\varphi(\underline{x} + \underline{y}) = \varphi(\underline{x}) + \varphi(\underline{y}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0},$$

tehát $(\underline{x}+\underline{y}) \in \operatorname{Ker}\varphi$. Ha pedig $\lambda \in \mathbb{T}$ tetszőleges skalár, akkor a homogenitás miatt $\varphi(\lambda\underline{x}) = \lambda\varphi(\underline{x}) = \underline{0}$, így $(\lambda\underline{x}) \in \operatorname{Ker}\varphi$.

**1.5. Feladat.** *Legyenek $V_1$ és $V_2$ vektorterek a $\mathbb{T}$ test felett. Bizonyítsa be, hogy egy $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés esetén $\varphi(V_1)$ altér.*

*Megoldás.* A leképezés képtere azon $V_2$-beli vektorokat tartalmazza, amelyek előállnak valamely $V_1$-beli vektor $\varphi$ általi képeként:

$$\varphi(V_1) = \{\underline{y} \in V_2 | \exists \underline{x} \in V_1 : \varphi(\underline{x}) = \underline{y}\},$$

és sohasem üres halmaz mert a nullvektor midig eleme $\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$ miatt. Belátjuk, hogy zárt az összeadásra és a skalárszorzásra.

Legyen $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in \varphi(V_1)$. Ekkor léteznek $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in V_1$ vektorok, hogy $\varphi(\underline{x}_1) = \underline{y}_1$ és $\varphi(\underline{x}_2) = \underline{y}_2$, így $\varphi$ additivitása miatt

$$\varphi(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = \varphi(\underline{x}_1) + \varphi(\underline{x}_2) = \underline{y}_1 + \underline{y}_2,$$

tehát $\underline{y}_1 + \underline{y}_2 \in \varphi(V_1)$. Ha $\lambda \in \mathbb{T}$ tetszőleges, akkor a homogenitás miatt $\varphi(\lambda\underline{x}_1) = \lambda\varphi(\underline{x}_1) = \lambda\underline{y}_1$, azaz $\lambda\underline{y}_1 \in \varphi(V_1)$.

**1.6. Feladat.** *Legyenek $V_1$ és $V_2$ vektorterek a $\mathbb{T}$ test felett. Bizonyítsa be, hogy egy $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés akkor és csak akkor injektív, ha* $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$.

*Megoldás.*

1. Indirekt tegyük fel, hogy a leképezés injektív (azaz különböző vektorok képe különböző), de $\operatorname{Ker}\varphi$ tartalmaz a nullvektortól különböző $\underline{x}$ elemet is. Ekkor $\varphi(\underline{x}) = \underline{0}$ és $\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$, így az injektivitás miatt $\underline{x} = \underline{0}$ lenne, ami ellentmond annak, hogy $\underline{x}$ nem nullvektor.

2. Tegyük fel, hogy $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$ de $\varphi$ nem injektív, azaz létezik $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in V_1$ úgy, hogy $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ de $\varphi(\underline{x}_1) = \varphi(\underline{x}_2)$. Ekkor $\varphi$ linearitása miatt
$$\varphi(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = \varphi(\underline{x}_1) - \varphi(\underline{x}_2) = \underline{0},$$
tehát $(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \in \operatorname{Ker}\varphi$ és $(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \neq \underline{0}$, ami ellentmond annak, hogy $\ker\varphi$ csak a nullvektort tartalmazza.

**1.7. Feladat.** *Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Válaszoljon a következő kérdésekre a nullitás és rangtétel alapján!*

1. *Ha a $V_1$ vektortér dimenziója 3 és $\varphi$ rangja 2, akkor mennyi $\varphi$ defektusa?*
2. *Lehet-e $\varphi$ szürjektív leképezés, ha $V_1$ és $V_2$ dimenziója megegyezik és $\operatorname{Ker}\varphi$ dimenziója 2?*
3. *Lehet-e $\varphi$ injektív, ha $V_2$ dimenziója kisebb, mint $V_1$ dimenziója?*
4. *Ha $\dim V_1 = n$ és $\varphi$ izomorfizmus, akkor mennyi $V_2$,$\operatorname{Ker}\varphi$ és $\varphi(V_1)$ dimenziója?*

*Megoldás.*

1. A nullitás és rangtétel szerint $\dim V_1 = \operatorname{def}\varphi + \operatorname{rg}\varphi$, ahol $\operatorname{def}\varphi = \dim \operatorname{Ker}\varphi$ a $\varphi$ defektusa és $\operatorname{rg}\varphi = \dim\varphi(V_1)$ a $\varphi$ rangja, tehát $\operatorname{def}\varphi = 1$.
2. Nem, mert szürjektív leképezés esetén $\operatorname{rg}\varphi = \dim\varphi(V_1) = \dim V_2$, de itt $\operatorname{rg}\varphi = \dim V_1 - 2 = \dim V_2 - 2$.
3. Nem, mert injektív leképezés esetén az előző feladat alapján $\operatorname{def}\varphi = 0$, a nullitás és rangtétel szerint így $\dim V_1 = \operatorname{rg}\varphi = \dim\varphi(V_1)$ lenne, ami lehetetlen $\varphi(V_1) \subset V_2$ miatt.
4. Ha $\varphi$ izomorfizmus, akkor injektív és szürjektív is, tehát $\dim\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{def}\varphi = 0$ és $\varphi(V_1) = V_2$ miatt $\dim\varphi(V_1) = \operatorname{rg}\varphi = \dim V_2 = n$.

**1.8. Feladat.** *Határozza meg az alábbi lineáris leképezések nullterét és képterét illetve a leképezések defektusát és rangját.*

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0)$
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3)$
4. $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,$
$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$
5. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, x_1, x_3)$
6. $\varphi : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}, \quad \varphi(A) = A - A^\top$
7. $\varphi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3, \quad \varphi(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_1x^3 + a_1x^2 + (a_2 + a_0)x + a_1$

*Megoldás.*

1. A $\varphi$ leképezés nullterét azon $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ vektorok alkotják, amelyekre $\varphi(\underline{x}) = \underline{0}$, tehát keressük azon $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektorokat, amikre $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0) = (0, 0)$. Innen $x_1 = 0$ és $x_2, x_3$ tetszőleges valós számok, így
$$\operatorname{Ker} \varphi = \mathcal{L}((0,0,1),(0,1,0)),$$
$\varphi$ defektusa 2, $\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}(1,0)$ a leképezés képtere és $\varphi$ rangja 1.
2. $\operatorname{Ker} \varphi$ meghatározásához keressük azon $\underline{x} = (x_1, x_2)$ vektorokat, amikre $\varphi(\underline{x}) = \underline{0}$, tehát
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$
homogén lineáris egyenletrendszer megoldásait. Mivel ennek az egyenletrendszernek csak az $\underline{x} = (0,0)$ vektor tesz eleget, így $\operatorname{Ker} \varphi = \{\underline{0}\}$, a defektus nulla, azaz $\varphi$ injektív. A nullitás és rangtétel szerint $\varphi$ rangja kettő, tehát a képtér megegyezik $\mathbb{R}^2$-vel, így ez a leképezés egy izomorfizmus.
3. A leképezés nullterét a $\varphi(\underline{x}) = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere adja:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}-2x_3} &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \sim \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}-2x_3} &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \sim \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$
tehát $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 1)t$ ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges, így $\operatorname{Ker} \varphi = \mathcal{L}(-1, 1, 1)$ és a leképezés defektusa 1.

   Tetszőleges lineáris leképezés képterének egy generátorrendszerét adják a bázisvektorok képei. Mivel ezek nem szükségképpen lineárisan függetlenek, ki kell belőlük választani egy maximálisan lineárisan független vektorrendszert. Határozzuk meg tehát a természetes bázis vektorainak $\varphi$ általi képeit: $\varphi(1,0,0) = (1,0,-1)$, $\varphi(0,1,0) = (1,1,1)$, $\varphi(0,0,1) = (0,-1,-2)$. Most válasszunk ki belőlük egy maximálisan lineárisan független vektorrendszert (a nullitás és rangtétel szerint ez két vektorból fog állni):
$$\begin{array}{c} \varphi(\underline{e}_1) \\ \varphi(\underline{e}_2) \\ \varphi(\underline{e}_3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
így tehát $\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}(\varphi(\underline{e}_1), \varphi(\underline{e}_2))$.

4. Az előző feladatokhoz hasonlóan, megoldjuk a $\varphi(\underline{x}) = \underline{0}$ egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

innen a megoldások halmaza

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 5/3 \\ -7/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2$$

ahol $t_1, t_2$ tetszőleges valós számok. Tehát

$$\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}((-5,4,0,3),(5,-7,3,0)).$$

A képtér meghatározásához szükségünk van a természetes bázis vektorainak képeire: $\varphi(1,0,0,0) = (1,2,-1,1)$, $\varphi(0,1,0,0) = (2,1,1,-1)$, $\varphi(0,0,1,0) = (3,-1,4,-4)$, $\varphi(0,0,0,1) = (-1,2,-3,3)$. A nullitás és rangtétel szerint a képtér dimenziója 2, így ki kell választani ebből a 4 vektorból kettő lineárisan független vektort. Látható, hogy bármely kettő független, így például $\varphi(\mathbb{R}^4) = (\varphi(\underline{e}_1), \varphi(\underline{e}_2))$.

5. Mivel $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_1,x_1,x_3) = (0,0,0,0)$ pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ és $x_3$ tetszőleges valós szám, így $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}(0,0,1)$. A természetes bázis elemeinek képei: $\varphi(1,0,0) = (1,1,1,0)$, $\varphi(0,1,0) = (0,0,0,0)$ és $\varphi(0,0,1) = (0,0,0,1)$, tehát

$$\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}(\varphi(\underline{e}_1), \varphi(\underline{e}_3)).$$

A leképezés defektusa 1, rangja 2.

6. A magtér meghatározásának esetén a kérdés az, hogy milyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixok esetén lesz $\varphi(A) = \mathcal{O}$. $\varphi(A) = A - A^\top = \mathcal{O}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A = A^\top$ azaz a szimmetrikus mátrixok esetén. A példatár első részének 4.12 feladata alapján a szimmetrikus mátrixok alterének dimenziója $n(n+1)/2$, (egy lehetséges bázisa pedig azon mátrixokból áll, amelyekben egy darab 1-es szerepel és a többi elem nulla, az 1-es a főátlóban vagy a felett helyezkedik el). Jelölje $E_{ij}$ azt a mátrixot, aminek $i$. sorának $j$. eleme 1-es, a többi nulla. Ekkor tehát

$$\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}(\{E_{ij} | 0 \le i,j \le n,\ j \ge i\}).$$

Az $\mathcal{M}_{n\times n}$ vektortér természetes bázisát az $E_{ij}$ mátrixok alkotják, ahol $0 \le i,j \le n$. Ezen mátrixok $\varphi$ általi képei $\varphi(E_{ij}) = E_{ij} - E_{ji}$

alakúak, $\varphi(E_{ij})$ és $\varphi(E_{ji})$ egymás $(-1)$-szeresei, továbbá $\varphi(E_{ii}) = \mathcal{O}$. Ezen mátrixok által generált altér a ferdeszimmetrikus mátrixok altere (lásd 4.12 feladat), amelynek dimenziója $(n-1)n/2$, tehát

$$\varphi(\mathcal{M}_{n\times n}) = \mathcal{L}(\{E_{ij} - E_{ji} | 0 \le i, j \le n,\ j > i\}).$$

Látható, hogy a nullitás és rangtételnek megfelelően a defektus és a rang összege $n^2$, vagyis éppen az $n\times n$-es mátrixok vektorterének dimenziója.

7. Mivel

$$a_1x^3 + a_1x^2 + (a_2 + a_0)x + a_1 = 0$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $a_1 = 0$ és $a_0 = -a_2$, így a leképezés nullterét az $(ax^2 - a)$ alakú polinomok alkotják, ahol $a \in \mathbb{R}$. Tehát $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}(x^2 - 1)$, a defektus pedig 1.

A természetes bázis képei: $\varphi(x^2) = x$, $\varphi(x) = x^3 + x^2 + 1$, $\varphi(1) = x$, amiből az első kettő lineárisan független, így $\varphi(\mathcal{P}_2) = \mathcal{L}(\varphi(x^2), \varphi(x))$. A leképezés rangja 2.

**1.9. Feladat.** *Legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés. Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$ mátrix, hogy $\varphi(\underline{x}) = A\underline{x}$. Ezt a mátrixot a lineáris leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixának nevezzük.*

*Megoldás.* Jelölje $(e) = \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ a természetes bázist $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n$, és a linearitás miatt

$$\varphi(\underline{x}) = x_1\varphi(\underline{e}_1) + \cdots + x_n\varphi(\underline{e}_n),$$

ahol $\varphi(\underline{e}_j) \in \mathbb{R}^k$ minden $1 \le j \le n$ esetén. Legyen $A_{ij}$ a $\varphi(\underline{e}_j)$ vektor $i$. koordinátája. Ekkor

$$(A\underline{x})_i = A_{i1}x_1 + \cdots + A_{in}x_n = x_1\varphi(\underline{e}_1)_i + \cdots + x_n\varphi(\underline{e}_n)_i = \varphi(\underline{x})_i,$$

tehát a keresett mátrix $j$-edik oszlopába a $j$-edik bázisvektor képének koordinátái kerülnek.

**1.10. Feladat.** *Határozza meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát!*

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_2 + 3x_3)$,
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$,
3. $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + x_2 - x_3 + x_4)$,
4. *$\varphi$ az $\mathbb{R}^2$-beli origóra tükrözés,*
5. *$\varphi$ az $\mathbb{R}^3$-beli $[x, y]$ síkra való merőleges vetítés.*

*(Hasonló jellegű feladatokról bővebben a Lineáris transzformációk című részben lesz szó.)*

*Megoldás.*

1. A keresett mátrix $2\times 3$ típusú, első oszlopában az $(1,0,0)$ vektor képének koordinátái szerepelnek, azaz $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, második oszlopa a $(0,1,0)$ vektor képe: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, hasonlóan határozható meg a harmadik oszlop is:
$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$
Látható, hogy ekkor valóban teljesül, hogy $\varphi(\underline{x}) = A\underline{x}$ :
$$A\underline{x} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2+2x_3\\ x_2+3x_3\end{pmatrix} = \varphi(\underline{x}).$$
2. Most a mátrix $4\times 3$ típusú lesz:
$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$
3. $A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$
4. Mivel az origóra való tükrözésnél a vektorok minden koordinátája ellentettjére változik a leképezés után, így $\varphi(x_1,x_2) = (-x_1,-x_2)$ és
$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$
5. Az $[x,y]$ síkra való merőleges vetítésnél a vektorok $x$ és $y$ koordinátája nem változik, míg a harmadik koordináta nulla lesz: $\varphi(x,y,z) = (x,y,0)$, így a leképezés mátrixa:
$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

**1.11. Feladat.** *A homomorfia tétel szerint egy $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés esetén*
$$V_1/\operatorname{Ker}\varphi \cong \varphi(V_1).$$
*Állapítsuk meg, hogy az alábbi leképezések esetén milyen leképezés valósítja meg a fenti izomorfiát!*

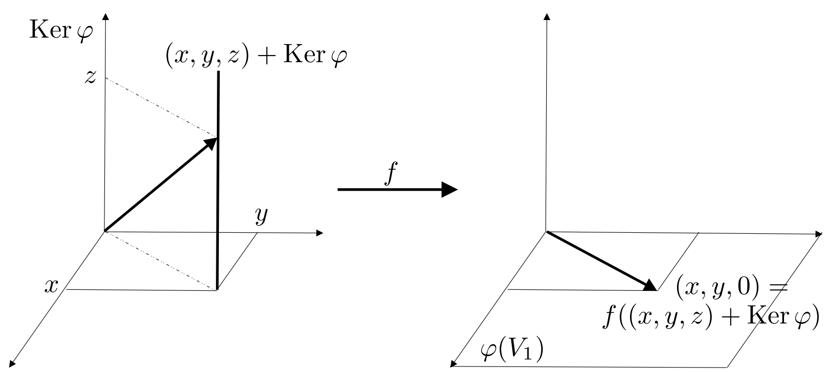
*1.* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2),$

*2.* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y,z) = (x,y,0).$

*Megoldás.*

1. Először meg kell határoznunk a leképezés nullterét. Mivel az 1.8 feladatban láttuk, hogy $\varphi(\underline{x}) = \underline{0}$ akkor és csak akkor, ha $\underline{x} = \underline{0}$, így $\operatorname{Ker}\varphi = \underline{0}$. Ekkor $V_1/\operatorname{Ker}\varphi = V_1 = \mathbb{R}^2$, a homomorfia tétel állítása ebben az esetben egyszerűen a $V_1 \cong \varphi(V_1)$ kifejezést jelenti, az izomorfizmust a $\varphi$ leképezés valósítja meg. Ez minden olyan esetben igaz, ha $\varphi$ injektív, mert ekkor $\varphi : V_1 \to \varphi(V_1)$ leképezés már egy bijektív lineáris leképezés, azaz izomorfizmus.
2. Ennek a leképezésnek a nullterét a $(0, 0, z)$ alakú vektorok alkotják, ahol $z$ tetszőleges valós szám, tehát $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}(0, 0, 1)$. Ekkor a $V_1/\operatorname{Ker}\varphi$ faktortér elemei az $\underline{x}+Ker\varphi$ alakú lineáris sokaságok, azaz a $z$-tengellyel párhuzamos egyenesek (lásd a példatár első részének 3.25 feladatát). A $\varphi(V_1)$ altér, azaz a leképezés képtere itt az $[x, y]$ sík lesz, azaz az $(x, y, 0)$ alakú vektorok halmaza. A homomorfia tétel tehát azt állítja, hogy a $z$-tengellyel párhuzamos egyeneseknek (mint lineáris sokaságoknak) a vektortere izomorf az $[x, y]$ sík vektorai által alkotott altérrel, és a feladat azt kéri, hogy adjuk meg ezt a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Legyen $f : V_1/\operatorname{Ker}\varphi \to \varphi(V_1)$ az a leképezés, amelynél

$$f((x, y, z) + \operatorname{Ker}\varphi) = (x, y, 0).$$




Belátjuk, hogy $f$ valóban bijekció. A szürjektivitás nyilvánvaló, az injektivitás igazolásához tegyük fel, hogy $f((x_1, y_1, z_1) + \operatorname{Ker}\varphi) = f((x_2, y_2, z_2) + \operatorname{Ker}\varphi)$. Ekkor $(x_1, y_1, 0) = (x_2, y_2, 0)$, így a két lineáris sokaság megegyezik, mert $(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (0, 0, z_1 - z_2) \in \operatorname{Ker}\varphi$. Szemléletesen arról van szó, hogy a két vektor ugyanarra a $z$-tengellyel párhuzamos egyenesre mutat, hiszen csak a harmadik koordinátájuk tér el.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $f$ leképezés lineáris, ugyanis tetszőleges $\alpha, \beta, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ valós számok esetén

$$
\begin{aligned}
&f\Big(\alpha((x_1, y_1, z_1) + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta((x_2, y_2, z_2) + \operatorname{Ker}\varphi)\Big) = \\
&f\Big(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) + \operatorname{Ker}\varphi\Big) = \\
&f\Big((\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) + \operatorname{Ker}\varphi\Big) = \\
&(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) = \alpha(x_1, y_1, 0) + \beta(x_2, y_2, 0) = \\
&\alpha f\Big((x_1, y_1, z_1) + \operatorname{Ker}\varphi\Big) + \beta f\Big((x_2, y_2, z_2) + \operatorname{Ker}\varphi\Big),
\end{aligned}
$$

tehát ez a keresett izomorfizmus.

## 2. Bázis- és koordinátatranszformáció

**1.12. Feladat.** *Az* $(a) = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ *és a* $(b) = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ *vektorrendszerek* $\mathbb{R}^3$ *bázisai. Írja fel az* $(a) \longrightarrow (b)$ *bázistranszformáció mátrixát.*

1. $\underline{a}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{a}_2 = (0, 1, 0)$, $\underline{a}_3 = (0, 0, 1)$,
   $\underline{b}_1 = (3, 4, 5)$, $\underline{b}_2 = (6, 7, 8)$, $\underline{b}_3 = (9, 8, 8)$,
2. $\underline{a}_1 = (-1, 2, 1)$, $\underline{a}_2 = (1, -1, 3)$, $\underline{a}_3 = (0, 1, 2)$,
   $\underline{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\underline{b}_2 = (2, -1, 2)$, $\underline{b}_3 = (-1, 1, 4)$,
3. $\underline{a}_1 = (1, 2, 0)$, $\underline{a}_2 = (1, 2, -1)$, $\underline{a}_3 = (2, 1, 1)$,
   $\underline{b}_1 = (2, 1, 0)$, $\underline{b}_2 = (1, 3, 1)$, $\underline{b}_3 = (-1, 2, 1)$,
4. $\underline{a}_1 = (3, 2, 1)$, $\underline{a}_2 = (1, 1, 0)$, $\underline{a}_3 = (0, 1, 1)$,
   $\underline{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\underline{b}_2 = (1, 2, 2)$, $\underline{b}_3 = (1, 0, -1)$.

*Megoldás.*

1. Az $(a) \longrightarrow (b)$ bázistranszformáció mátrixa oszlopaiban tartalmazza a $(b)$ vektorainak felírását az $(a)$ bázisban. Mivel ennél a feladatnál az $(a)$ bázis éppen a természetes bázis, így a $(b)$ vektorai eleve az $(a)$ bázisban vannak megadva. Ekkor a mátrix oszlopaiba rendre beírjuk $(b)$ vektorait, tehát $(a) \xrightarrow{S} (b)$, ahol
$$S = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Két megoldási módszert mutatunk meg.

a) Ki kell számolnunk a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ vektorok $(a)$ bázisra vonatkozó koordinátáit. A $\underline{b}_1$ vektor esetén meg kell oldanunk az $x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3 = \underline{b}_1$ lineáris egyenletrendszert, melynek egyértelműen létező $x_1, x_2, x_3$ megoldása adja a bázistranszformáció mátrixának első oszlopát. Hasonlóan kell eljárnunk $\underline{b}_2$ és $\underline{b}_3$ esetén, tehát három darab egyenletrendszert kell megoldanunk, melyekhez tartozó mátrixok:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Mivel a három egyenletrendszer alapmátrixa megegyezik, szimultán is megoldhatjuk őket úgy, hogy a jobboldalon lévő vektorokat egymás mellé írjuk, és a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

mátrixot Gauss-eliminációval olyan alakra hozzuk, hogy az első részében az egységmátrix szerepel (hasonlóan az inverzmátrix kiszámításánál alkalmazott szimultán Gauss-eliminációhoz):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -8 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -7/2 \end{array}\right).$$

Ekkor a mátrix második részének oszlopaiban az egyes egyenletrendszerek megoldásai lesznek, hiszen például az első oszlop vonatkozásában ez éppen az

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 0 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -1 \end{array}$$

egyenletrendszernek felel meg. Így tehát az $(a) \xrightarrow{S} (b)$ bázistranszformáció mátrixa:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7/2 \\ 1 & -1 & 5/2 \\ -1 & 4 & -7/2 \end{pmatrix}$$

b.) Az $S$ mátrix kiszámításának választhatjuk egy másik módját is. Az $x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3 = \underline{b}_1$ egyenletrendszer mátrixos felírása: $A\underline{s}_1 = \underline{b}_1$, ahol $\underline{s}_1$ a keresett bázistranszformációs mátrix első oszlopa és $A$ az alapmátrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ez felírható $\underline{b}_2$ és $\underline{b}_3$ esetén is, és mivel $A$ invertálható, innen

$$\underline{s}_1 = A^{-1}\underline{b}_1, \quad \underline{s}_2 = A^{-1}\underline{b}_2, \quad \underline{s}_3 = A^{-1}\underline{b}_3.$$

Tehát most a feladat $A$ inverzének kiszámítása valamely tanult módszerrel:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & -1 & 1/2 \\ -3/2 & -1 & 1/2 \\ 7/2 & 2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

és a három szorzás elvégzése:

$$\underline{s}_1 = A^{-1}\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -5/2 & -1 & 1/2 \\ -3/2 & -1 & 1/2 \\ 7/2 & 2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{s}_2 = A^{-1}\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{s}_3 = A^{-1}\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 5/2 \\ -7/2 \end{pmatrix},$$

természetesen ugyanazt kaptuk mint a másik esetben. (A három szorzást egyszerre is elvégezhetjük, ha a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ vektorokat egy $B$ mátrix oszlopaiba írjuk, és ekkor $S = A^{-1}B$.)

3. Az előzőekben ismertetett módszerek valamelyikével:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -4/3 & -7/3 \\ 1 & -1/3 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

4. Hasonlóan:

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**1.13. Feladat.** *Legyenek $(a)$ és $(b)$ bázisok a $V$ vektortéren és $(a) \xrightarrow{S} (b)$. Ha az $\underline{x}$ vektor $(a)$ bázisra vonatkozó koordinátáiból képzett vektort $\underline{x}_{(a)}$ jelöli és a $(b)$ bázisra vonatkozó koordinátáiból alkotott vektort pedig $\underline{x}_{(b)}$, akkor*

$$\underline{x}_{(b)} = S^{-1}\underline{x}_{(a)}, \quad \textit{illetve} \quad \underline{x}_{(a)} = S\underline{x}_{(b)}.$$

*Ezek alapján oldjuk meg a következő feladatokat:*

1. *Legyen* $\mathbb{R}^3$*-ban* $(e)$ *a természetes bázis, és* $(b)$ *pedig az alábbi vektorokból álló bázis:* $\underline{b}_1 = (2, 1, -1)$, $\underline{b}_2 = (-1, 1, 1)$, $\underline{b}_3 = (-1, 0, 1)$.
   (a) *Ha az* $\underline{x}$ *vektor a természetes bázisban felírva* $\underline{x}_{(e)} = (4, 3, 2)$, *akkor mi lesz az* $\underline{x}$ *vektor felírása a* $(b)$ *bázisban?*
   (b) *Ha az* $\underline{y}$ *vektor felírása a* $(b)$ *bázisban* $\underline{y}_{(b)} = (2, 3, 4)$, *akkor mik lesznek az* $\underline{y}$ *vektor természetes bázisra vonatkozó koordinátái?*
2. *Tekintsük* $\mathbb{R}^3$*-ban az* $(a)$ *és* $(b)$ *bázisokat, ahol* $\underline{a}_1 = (3, 2, -1)$, $\underline{a}_2 = (-3, 2, 0)$, $\underline{a}_3 = (-2, -3, 1)$, $\underline{b}_1 = (1, 0, 1)$, $\underline{b}_2 = (2, 1, 0)$, $\underline{b}_3 = (0, 1, -1)$.

   (a) *Ha az* $\underline{x}$ *vektor az* $(a)$ *bázisban felírva* $\underline{x}_{(a)} = (1, 1, 1)$, *akkor mik lesznek az* $\underline{x}$ *vektor koordinátái, ha áttérünk a* $(b)$ *bázisra?*
   (b) *Ha az* $\underline{y}$ *vektor felírása a* $(b)$ *bázisban* $\underline{y}_{(b)} = (2, 2, 2)$, *akkor mik voltak az* $\underline{y}$ *vektornak az eredeti,* $(a)$ *bázisra vonatkozó koordinátái?*

*Megoldás.*

1. (a) Mivel ebben a feladatban a kiinduló bázis a természetes bázis, így az $(e) \xrightarrow{S} (b)$ bázistranszformáció mátrixát azonnal felírhatjuk:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Ha a régi bázisban a vektor koordinátái $\underline{x}_{(e)} = (4, 3, 2)$, akkor az új bázisbeli koordinátákat az $S$ mátrix alapján kiszámíthatjuk:

$$\underline{x}_{(b)} = S^{-1}\underline{x}_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

   (b) Ha a vektor új bázisbeli koordinátái adottak, és mi tudni szeretnénk az eredeti koordinátáit, akkor

$$\underline{y}_{(e)} = S\underline{y}_{(b)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Először a bázistranszformáció mátrixát kell meghatároznunk. Mivel az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverze

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -13 \\ -1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -12 \end{pmatrix},$$

így

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -13 \\ -1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -7 & 10 \\ -6 & -3 & 4 \\ -14 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Az új koordináták meghatározásához ki kell még számítani az $S$ inverzét, és ekkor

$$\underline{x}_{(b)} = S^{-1}\underline{x}_{(a)} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Végül

$$\underline{y}_{(a)} = S\underline{y}_{(b)} = \begin{pmatrix} -15 & -7 & 10 \\ -6 & -3 & 4 \\ -14 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -10 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

**1.14. Feladat.** *1. $\mathbb{R}^3$-ban áttértünk az $(a)$ bázisról a $(b)$ bázisra, és minden vektor koordinátái az új bázisban éppen a régi koordináták háromszorosai lettek. Mi volt a bázistranszformáció mátrixa?*

*2. $\mathbb{R}^3$-ban olyan bázisra szeretnénk áttérni a természetes bázisról, amelyben egy adott $\underline{x} = (1, 2, 3)$ vektor felírása éppen $(1, 1, 1)$ lesz. Mi legyen a bázistranszformáció mátrixa?*

*Megoldás.*

1. Ha minden $\underline{x}$ vektor esetén igaz, hogy $S^{-1}\underline{x}_{(a)} = 3\underline{x}_{(a)}$, akkor

$$(S^{-1} - 3E)\underline{x}_{(a)} = \underline{0},$$

tehát $(S^{-1} - 3E)$ a nullmátrix kell legyen. Innen $S^{-1} = 3E$ és

$$S = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

.

2. Teljesülnie kell, hogy

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ha az $S$-et úgy választjuk, hogy

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{és így} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

akkor ez rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

**1.15. Feladat.** *Oldjuk meg az alábbi feladatokat bázistranszformáció segítségével!*

1. *Bontsuk fel az $\mathbb{R}^2$-beli $(5,6)$ vektort $(1,2)$ és $(4,1)$ irányú komponensek összegére.*
2. *Határozzuk meg az $\mathbb{R}^2$-beli $(1,1)$ koordinátájú vektornak az $y = -3x$ egyenesre vonatkozó tükörképét.*

*Megoldás.*

1. Keressük az $\underline{x}_{(e)} = (5,6)$ vektornak a $\underline{b}_1 = (1,2)$, $\underline{b}_2 = (4,1)$ bázisbeli felírását:
$$\underline{x}_{(b)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \underline{x}_{(e)} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}.$$
Ekkor a felbontás:
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (19/7)\underline{b}_1 + (4/7)\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 19/7 \\ 38/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}.$$
2. Ezt a feladatot többféleképpen meg lehet oldani, az egyik lehetséges út a bázistranszformáció használata. Ekkor a természetes bázisról áttérünk a $\underline{b}_1 = (3,1)$, $\underline{b}_2 = (-1,3)$ bázisra, mert ennek vektorai is merőlegesek egymásra és a második vektor iránya megegyezik az egyenes irányával. Ebben a bázisban egyszerűen elvégezhető a tükrözés, a vektor első koordinátáját kell ellentétes előjelűre változtatni. Végül az így kapott vektort visszaírjuk az eredeti bázisba. Tehát az $\underline{x}_{(e)} = (1,1)$ vektor koordinátái a $(b)$ bázisban
$$\underline{x}_{(b)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \underline{x}_{(e)} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$
Ekkor az $\underline{x}$ vektornak a $(-1,3)$ irányú egyenesre vonatkozó tükörképe a $(b)$ bázisban $\underline{x}'_{(b)} = (-2/5, 1/5)$. Még vissza kell térnünk a természetes bázisra, ha egy vektor eredeti bázisra vonatkozó koordinátáit keressük, akkor az új koordinátákat a bázistranszformáció mátrixával szorozzuk:
$$\underline{x}'_{(e)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x}'_{(b)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

# 3. Lineáris transzformációk

**1.16. Feladat.** *Írjuk fel a $\varphi$ $\mathbb{R}^2$-beli lineáris transzformáció természetes bázisra vonatkozó mátrixát, ha*

*(a) $\varphi$ az $y$ tengelyre tükrözés;*
*(b) $\varphi$ az $x$ tengelyre tükrözés;*
*(c) $\varphi$ az origóra való tükrözés;*
*(d) $\varphi$ az origó körüli $\alpha$ szögű forgatás.*

*Megoldás.* A transzformáció mátrixa oszlopaiban tartalmazza a bázisvektorok képének koordinátáit. $\mathbb{R}^2$-ben a természetes bázist az $(1,0)$ és $(0,1)$ vektorok alkotják.

(a) Mivel $\varphi(1,0) = (-1,0)$ és $\varphi(0,1) = (0,1)$, így a keresett mátrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor egy $(x,y)$ vektor $y$-tengelyre való tükrözése ezen mátrixszal való szorzásként megkapható:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

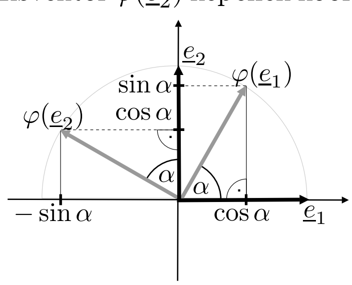
(b) Hasonlóan, a keresett mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Az origóra való tükrözés mindkét koordinátát ellentétes előjelűre változtatja: $\varphi(1,0) = (-1,0)$ és $\varphi(0,1) = (0,-1)$, így a transzformáció mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Az ábráról leolvasható, hogy az $\underline{e}_1$ bázisvektor $\varphi(\underline{e}_1)$ képének koordinátái $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, az $\underline{e}_2$ bázisvektor $\varphi(\underline{e}_2)$ képének koordinátái $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$:



Tehát $\varphi$ mátrixa $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

**1.17. Feladat.** *Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$-beli $x$ tengely körüli $\alpha$ fokkal való forgatás mátrixát.*

*Megoldás.* Az $x$ tengely körül forgatás esetén a vektorok első koordinátája nem változik, így $\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$. Az $[y,z]$ síkban a transzformáció egy $\alpha$ szögű forgatást jelent, tehát ott az előző feladatban szereplő síkbeli forgatás szerint fognak változni a koordináták: $\varphi(0,1,0) = (0, \cos\alpha, \sin\alpha)$ és $\varphi = (0,0,1) = (0, -\sin\alpha, \cos\alpha)$, tehát a keresett mátrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

**1.18. Feladat.** *Írjuk fel a definíció alapján a $\varphi : V \to V$ lineáris transzformáció mátrixát az $(e)$ bázisra vonatkozóan az alábbi esetekben:*

1. *$V = \mathbb{R}^3$, $(e)$ a természetes bázis és*
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 - x_3, x_2 + 4x_3, x_1 + x_2),$$
2. *$V = \mathcal{P}_3$, az $(e)$ bázist az alábbi polinomok alkotják: $x^3, x^2, x, 1$ és*
$$\begin{aligned} \varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) &= (a_0 - a_3)x^3 + (2a_1 + a_2)x^2 \\ &\quad + (a_0 + a_1 + 3a_2), \end{aligned}$$
3. *$V = \mathcal{M}_{2\times 2}$, $(e) = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ és*
$$\varphi(A) = A^\top,$$
4. *$V = \mathbb{C}$, $(e) = (1, i)$, $\varphi(z) = \overline{z}$.*

*Megoldás.* Egy $\varphi$ lineáris transzformáció mátrixa valamely $(e)$ bázisra vonatkozóan a $j$. oszlopában tartalmazza a $j$. bázisvektor $\varphi$ általi képének koordinátáit, azaz $\varphi(\underline{e}_j)$ koordinátáit $(e)$-re vonatkozóan.

1. Az $(e) = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ természetes bázis elemeinek $\varphi$ általi képei:
$$\begin{aligned} \varphi(1,0,0) &= (2\cdot 1 + 3\cdot 0 - 0, 0 + 4\cdot 0, 1 + 0) = (2,0,1), \\ \varphi(0,1,0) &= (3,1,1), \\ \varphi(0,0,1) &= (-1,4,0), \end{aligned}$$

tehát a transzformáció mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Láthatjuk, hogy tetszőleges $(x_1, x_2, x_3)$ vektor $\varphi$ általi képe kiszámítható úgy, hogy az $A$ mátrixszal megszorozzuk a vektort:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2. Először a bázist alkotó polinomok képeit kell meghatároznunk:

$$\begin{aligned}
\varphi(x^3) &= \varphi(1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0) \\
&= (0-1)x^3 + (0+0)x^2 + (0+0+0) = -x^3, \\
\varphi(x^2) &= x^2 + 3, \\
\varphi(x) &= 2x^2 + 1, \\
\varphi(1) &= x^3 + 1.
\end{aligned}$$

A keresett mátrix oszlopaiba ezen polinomoknak az $x^3, x^2, x, 1$ bázisra vonatkozó koordinátái kerülnek, például a $2x^2+1 = 0 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1$ polinom koordinátáit az együtthatók adják: $(0, 2, 0, 1)$. Tehát a keresett mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. A bázisvektorok képei:

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Itt az adott bázisra vonatkozó koordinátákat a mátrixok elemei adják "sorfolytonosan", így a transzponálásnak mint lineáris transzformációnak a mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Könnyen láthatjuk, hogy ezen mátrixszal való szorzásként megvalósítható a transzponálás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Mivel $\varphi(1) = 1 \sim (1, 0)$ és $\varphi(i) = -i \sim (0, -1)$, így a konjugálás mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**1.19. Feladat.** *1. Írjuk fel a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixát az $(a) = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ bázisra vonatkozóan, ha $\underline{a}_1 = (2, 1, -1)$, $\underline{a}_2 = (-3, 1, 0)$, $\underline{a}_3 = (-1, -2, 1)$, és $\varphi(\underline{a}_1) = (1, 1, 2)$, $\varphi(\underline{a}_2) = (1, 1, 1)$, $\varphi(\underline{a}_3) = (1, 2, 3)$!*

*(a) Ha az $\underline{x}$ vektor $(a)$ bázisra vonatkozó koordinátái $(-2, -1, 2)$, akkor mivel egyenlőek $\varphi(\underline{x})$ koordinátái az $(a)$ bázisra vonatkozóan?*

*(b) Mik lesznek $\varphi(\underline{x})$ koordinátái a természetes bázisra vonatkozóan?*

*2. Írjuk fel a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixát az $(a) = ((3, 1, 1), (1, 1, 0), (-1, 2, -1))$ bázisra vonatkozóan, ha $\varphi(\underline{a}_1) = (3, 0, 1)$, $\varphi(\underline{a}_2) = (2, 1, 2)$, $\varphi(\underline{a}_3) = (2, -2, 1)$!*

*(a) Ha az $\underline{x}$ vektor $(a)$ bázisra vonatkozó koordinátái $(3, 1, 3)$, akkor mivel egyenlőek $\varphi(\underline{x})$ koordinátái az $(a)$ bázisra vonatkozóan?*

*(b) Mik $\varphi(\underline{x})$ koordinátái a természetes bázisra vonatkozóan?*

*Megoldás.*

1. A lineáris leképezések második alaptétele szerint egyértelműen létezik olyan lineáris transzformáció ami az $(a)$ bázis elemeit rendre a megadott vektorokba viszi át. Ezen transzformáció mátrixának felírásához a $\varphi(\underline{a}_1)$, $\varphi(\underline{a}_2)$, $\varphi(\underline{a}_3)$ vektorokat kell lineárisan kombinálni az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorokból. Számolhatunk szimultán Gauss-eliminációval, amikor úgy alakítjuk

az $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 | \varphi(\underline{a}_1), \varphi(\underline{a}_2), \varphi(\underline{a}_3))$ mátrixot, hogy az első három oszlopban az egységmátrix legyen (azaz $(E|C)$ alakra hozzuk, ekkor a keresett mátrix $C$):

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & -11/2 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5/2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -9/2 & -11 \end{pmatrix}.$$

Másik lehetőség a mátrix kiszámítására (hasonlóan mint a bázistranszformáció mátrixának kiszámításánál volt), hogy meghatározzuk az $A = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ mátrix inverzét, és ezt szorozzuk a $(\varphi(\underline{a}_1), \varphi(\underline{a}_2), \varphi(\underline{a}_3))$ mátrixszal:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

és

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 18 & 11 & 28 \\ 8 & 5 & 12 \\ 14 & 9 & 22 \end{pmatrix}.$$

(a) A transzformáció $(a)$ bázisra vonatkozó mátrixának segítségével azonnal kiszámíthatjuk a keresett koordinátákat:

$$\varphi(\underline{x})_{(a)} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 18 & 11 & 28 \\ 8 & 5 & 12 \\ 14 & 9 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ -3/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}.$$

(b) Az imént kapott vektor az $\underline{y} = \varphi(\underline{x})$-nek az $(a)$ bázisra vonatkozó koordinátáit tartalmazza. A természetes bázisra vonatkozó koordinátákat megkaphatjuk a bázis és koordináta transzformációnál tanultak alapján:

$$\underline{y}_{(e)} = S\underline{y}_{(a)} \quad \text{ahol} \quad (e) \xrightarrow{S} (a)$$

és azt is ismerjük, hogy az $(e) \longrightarrow (a)$ bázistranszformáció $S$ mátrixa egyszerűen az $(a)$ bázis vektorait tartalmazza oszlopaiban. Tehát

$$\varphi(\underline{x})_{(e)} = S\varphi(\underline{x})_{(a)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 \\ -3/2 \\ -7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Teljesen hasonlóan adódik, hogy a transzformáció mátrixa

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & -10 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

(a) $\varphi(\underline{x})_{(a)} = C \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix},$

(b) $\varphi(\underline{x})_{(e)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$

**1.20. Feladat.** *1. Ha a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázisra vonatkozóan*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

*akkor mivel egyenlő $\varphi$ mátrixa az $(a) = ((1,-1,1),(0,1,-1),(0,-1,2))$ bázisra vonatkozóan?*

*(a) Ha $\underline{x}$ koordinátái az $(a)$-ra vonatkozóan $\underline{x}_{(a)} = (2,0,1)$, akkor mik $\varphi(\underline{x})$ koordinátái az $(e)$-re vonatkozóan?*

*(b) Ha $\underline{y}$ koordinátái az $(e)$-re vonatkozóan $\underline{y}_{(e)} = (1,-1,1)$, akkor mik $\varphi(\underline{y})$ koordinátái az $a$-ra vonatkozóan?*

*2. Ha a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázisra vonatkozóan*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

*akkor mivel egyenlő $\varphi$ mátrixa az $(a) = ((1,2,1),(0,2,1),(-1,1,0))$ bázisra vonatkozóan?*

*(a) Ha $\underline{x}$ koordinátái az $(a)$-ra vonatkozóan $\underline{x}_{(a)} = (1,0,1)$, akkor mik $\varphi(\underline{x})$ koordinátái az $(e)$-re vonatkozóan?*

*(b) Ha $\underline{y}$ koordinátái az $(e)$-re vonatkozóan $\underline{y}_{(e)} = (0,1,-1)$, akkor mik $\varphi(\underline{y})$ koordinátái az $a$-ra vonatkozóan?*

*Megoldás.*

1. Jelölje transzformáció mátrixát az új bázisban $B$. Ekkor $B = S^{-1}AS$, ahol $S$ az $(e) \to (a)$ bázistranszformáció mátrixa, azaz az $(a)$ vektoraiból

álló mátrix:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

tehát

$$\begin{aligned} B &= S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Ha $\underline{x}$ koordinátái az $(a)$-ra vonatkozóan $\underline{x}_{(a)} = (2,0,1)$, akkor kiszámíthatjuk $\varphi(\underline{x})$ koordinátáit az $(a)$ bázisra vonatkozóan, hiszen már ismerjük a transzformáció mátrixát ebben a bázisban is, ez volt a $B$ mátrix. Tehát

$$\varphi(\underline{x})_{(a)} = B\underline{x}_{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Ezután a bázistranszformáció mátrixának a segítségével kiszámíthatjuk ezen vektor természetes bázisbeli koordinátáit:

$$\varphi(\underline{x})_{(e)} = S\varphi(\underline{x})_{(a)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy többféle úton is eljuthatunk ehhez az eredményhez. Nincs szükség például a $B$ mátrixra, ha először az $\underline{x}$ vektort átszámítjuk az $(e)$ bázisba ($\underline{x}_{(e)} = S\underline{x}_{(a)}$) és ezután hajtjuk végre a $\varphi$ leképezést, ami a természetes bázisban az $A$ mátrixszal való szorzást jelenti. Tehát

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{x})_{(e)} &= AS\underline{x}_{(a)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A két számítás egyenértékű, hiszen $SB\underline{x}_{(a)} = SS^{-1}AS\underline{x}_{(a)} = AS\underline{x}_{(a)}$.

(b) Ha $\underline{y}$ koordinátái az $(e)$-re vonatkozóan $\underline{y}_{(e)} = (1, -1, 1)$, akkor $\varphi(\underline{y})_{(e)} = A\underline{y}_{(e)}$ és ha kiszámítjuk ezen vektor $(a)$-ra vonatkozó koordinátáit, akkor megkapjuk a keresett eredményt. Ha az $(e)$ bázisról az $(a)$-ra térünk át, akkor az $(e) \to (a)$ bázistranszformáció mátrixának inverzével kell szoroznunk, tehát

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{y})_{(a)} &= S^{-1}A\underline{y}_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az $\underline{y}$ vektort először átszámítjuk az $(a)$ bázisba ($\underline{y}_{(a)} = S^{-1}\underline{y}_{(e)}$) majd ezt a vektort a transzformáció ezen bázisra vonatkozó mátrixával szorozzuk meg:

$$\varphi(\underline{y})_{(a)} = BS^{-1}\underline{y}_{(e)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. A transzformáció mátrixa az új bázisban:

$$\begin{aligned}B &= S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 14 & 9 \\ -9 & -15 & -11 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(a) $\varphi(\underline{x})_{(e)} = AS\underline{x}_{(a)} =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

(b) $\varphi(\underline{y})_{(a)} = S^{-1}A\underline{y}_{(e)} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

**1.21. Feladat.** *Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?*

(a) *Ha egy lineáris transzformáció injektív, akkor szürjektív is.*
(b) *Ha egy lineáris transzformáció automorfizmus, akkor mátrixa invertálható.*
(c) *Ha egy 5-dimenziós vektortéren értelmezett lineáris transzformáció nulltere 1-dimenziós, akkor képtere is 1-dimenziós.*
(d) *Ha egy transzformáció mátrixa valamely bázisban*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

*akkor a transzformáció automorfizmus.*
(e) *Ha egy transzformáció mátrixa valamely bázisban*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

*akkor defektusa 1 és rangja 2.*

*Megoldás.* A nullitás és rangtétel ($\dim V = \dim \ker \varphi + \dim \varphi(V)$) következménye, hogy lineáris transzformációk esetén a nulltér dimenziója egyértelműen meghatározza a leképezés rangját, azaz a képtér dimenzióját. Ezt felhasználva lehet megválaszolni a fenti kérdéseket.

(a) Igaz, hiszen ha a leképezés injektív, akkor $\dim \ker \varphi = 0$. Ebből adódik, hogy $\dim \varphi(V) = \dim V$ tehát $\varphi(V) = V$ és a leképezés szürjektív. Megjegyezzük, hogy az állítás megfordítása is igaz.
(b) Igaz. Ha a leképezés automorfizmus (azaz bijektív lineáris transzformáció) akkor nulltere csak a nullvektort tartalmazza, vagyis az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak a $\underline{0}$ a megoldása. Ekkor az egyenletrendszer határozott, és így mátrixa invertálható.
(c) Hamis, hiszen képterének dimenziója $\dim V - \dim \ker \varphi = n - 1$.
(d) Igaz, hiszen a mátrix reguláris (determinánsa nem nulla).
(e) Igaz, hiszen a leképezés nulltere 1-dimenziós. Ezt az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásából kapjuk:

$$\begin{array}{cccl} x_1+ & & +2x_3 & = 0 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccl} x_1+ & & +2x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \end{array}.$$

**1.22. Feladat.** *Legyen $\varphi$ lineáris transzformáció a $\mathbb{T}$ test feletti $V$ vektortéren. Igazoljuk, hogy ha $\lambda$ sajátértéke $\varphi$-nek, akkor a $\lambda$-hoz tartozó sajátvektorok*

$$\mathcal{L}_\lambda = \{\underline{x} \in V \mid \varphi(\underline{x}) = \lambda\underline{x}\}$$

*halmaza a nullvektorral kiegészítve invariáns alteret alkot, azaz $\varphi(\mathcal{L}_\lambda) \subset \mathcal{L}_\lambda$.*

*Megoldás.* Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{L}_\lambda$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$. Ekkor

$$\varphi(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = \alpha\varphi(\underline{x}) + \beta\varphi(\underline{y}) = \alpha\lambda\underline{x} + \alpha\lambda\underline{y} = \lambda(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}),$$

tehát $\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}$ is sajátvektor, így $\mathcal{L}_\lambda \cup \{\underline{0}\}$ altér.

Ha $\underline{x} \in \mathcal{L}_\lambda$, akkor $\varphi(\varphi(\underline{x})) = \varphi(\lambda\underline{x}) = \lambda\varphi(\underline{x})$, tehát $\varphi(\underline{x})$ szintén sajátvektor, azaz $\varphi(\underline{x}) \in \mathcal{L}_\lambda$, melyből következik, hogy $\mathcal{L}_\lambda$ invariáns.

**1.23. Feladat.** *Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ beli $x$ tengely körüli 60 fokkal való forgatás 1 sajátértékéhez tartozó sajátvektorokat.*

*Megoldás.* Az 1.17. feladat alapján a transzformáció mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ 0 & \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok azon $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok, melyekre teljesül, hogy $\varphi(\underline{v}) = \underline{v}$, azaz

$$(\varphi - \mathrm{id})(\underline{v}) = 0, \tag{1}$$

ahol id jelöli az identikus transzformációt, amely egy vektorhoz önmagát rendeli. A $\varphi - \mathrm{id}$ transzformáció mátrixa $A - E$, tehát keressük azon $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3)$ vektorokat, melyek megoldásai az $(A-E)\underline{v} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletnek. Gauss eliminációval számolva:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

tehát az egyenlet ekvivalens a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_3 &= 0 \\ -2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel. Látható, hogy $x_1$ tetszőlegesen megválasztható, továbbá $x_2 = x_3 = 0$, ezért

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

azaz az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza az $(1, 0, 0)$ vektor által generált altér, amely az $x$ tengely.

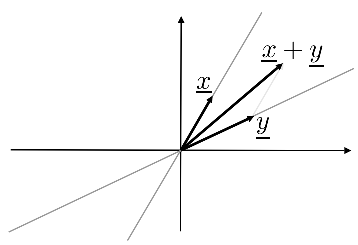
**1.24. Feladat.** *Adjon példát olyan lineáris transzformációra* $\mathbb{R}^2$*-ben, melynek*

(a) *nincs sajátvektora.*
(b) *bármely két sajátvektorának az összege is sajátvektor.*
(c) *minden nem nulla vektor sajátvektora.*

*Megoldás.*

(a) Az origó körüli $\alpha \in ]0, \pi[$ szögű forgatás olyan lineáris transzformáció, amelynek nincsen sajátértéke, hiszen ha $\underline{x}$ sajátvektor, akkor képe $\underline{x}$-nek skalárszorosa, mely itt nyilván nem teljesül. Az állítás az 1.22. feladatból is következik, ugyanis a sajátalterek, ha léteznek, legalább 1 dimenziós invariáns alterek, de itt csak a 0 dimenziós $\{\underline{0}\}$ altér invariáns.

(b) Egy $\mathbb{R}^2$ feletti lineáris transzformációnak legfeljebb 2 különböző sajátértéke lehet, hiszen a karakterisztikus polinomja másodfokú. Ha két különböző sajátértékünk van, akkor a hozzájuk tartozó sajátalterek origón átmenő nem egyenlő egyenesek:




Nyilván ebben az esetben nem teljesül a kívánt tulajdonság, hiszen az $\underline{x}+\underline{y}$ vektor nincsen rajta az egyenesek egyikén sem, így nem sajátvektor. Tehát a mi esetünkben csak 0 vagy 1 sajátérték létezhet, és könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor teljesül a kívánt tulajdonság. Például a $\lambda$-nyújtások, azaz a $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(\underline{x}) = \lambda\underline{x}$ típusú transzformációk megfelelőek.

(c) Az előző pont alapján könnyen belátható, hogy csak a $\lambda$-nyújtások rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

**1.25. Feladat.** *Adjon példát olyan lineáris transzformációra $\mathbb{R}^3$-ban, melynek*

*(a) nincs sajátvektora.*
*(b) bármely két sajátvektorának az összege is sajátvektor.*
*(c) minden nem nulla vektor sajátvektora.*

*Megoldás.*

(a) Az $\mathbb{R}^3$-beli transzformációk karakterisztikus egyenlete egy harmadfokú egyenlet, melynek mindig van valós megoldása, amely a transzformáció sajátértéke. Tehát nincs olyan transzformáció $\mathbb{R}^3$-ban, amelynek nem létezik sajátértéke.
(b) Az 1.24. feladat (b) része alapján belátható, hogy az ilyen transzformációknak legfeljebb 1 sajátértéke lehet. Mivel azonban az előző pont szerint minden $\mathbb{R}^3$-beli transzformációknak van legalább 1 sajátértéke, ezért pontosan az 1 sajátértékkel rendelkező transzformációk a megfelelőek. Természetesen a $\lambda$-nyújtások ilyenek.
(c) Pontosan a $\lambda$-nyújtások ezek a transzformációk.

**1.26. Feladat.** *Határozzuk meg az alábbi mátrixokkal adott valós tér feletti lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait:*

$$(a)\quad \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -6 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad (c)\quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 12 & -12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (e)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (f)\quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -8 & 1 & 2 \\ -12 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

*Megoldás.* Az $A$ mátrixú lineáris transzformáció sajátértékeit megkapjuk, ha kiszámoljuk a $\det(A - \lambda E) = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásait. A $\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza az $(A - \lambda E)\underline{x} = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldásterével egyenlő.

(a) A transzformáció karakterisztikus polinomja:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) + 3 = \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Tehát a transzformáció sajátértékei a $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásai lennének, azonban az egyenletnek nincs valós megoldása.

(b) A karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & -8 \\ -6 & 8-\lambda & -14 \\ -3 & 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(8-\lambda)(-5-\lambda)+168+144-$$
$$-24(8-\lambda)+42(-2-\lambda)+24(-5-\lambda) = -\lambda^3+\lambda^2+4\lambda-4,$$

tehát az

$$-\lambda^3+\lambda^2+4\lambda-4=0$$

egyenletet kell megoldanunk. Harmadfokú egyenletre van megoldóképlet, azonban ezzel számolni igen nehézkes. Lehetőleg keressünk 1 gyököt próbálgatással (harmadfokú egyenletnek mindig van legalább 1 valós gyöke), ezután már csak egy másodfokú egyenletet kell megoldanunk. A próbálgatást kezdjük a 0-hoz közeli egész számokkal $(0,1,-1,2,-2,\dots)$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\lambda_1=1$ megoldása az egyenletnek, így $\lambda-1$ kiemelhető a polinomból:

$$-\lambda^3+\lambda^2+4\lambda-4=(\lambda-1)(-\lambda^2+4).$$

Így a másik két megoldást a $-\lambda^2+4=0$ másodfokú egyenletből kapjuk: $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=2$. Tehát a transzformáció sajátértékei: $-2,1,2$.

A $-2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} -2-(-2) & 4 & -8 \\ -6 & 8-(-2) & -14 \\ -3 & 3 & -5-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogén egyenlet megoldásával kapjuk meg. Gauss-féle eliminációval számolva:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -14 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -6 & 10 & -14 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát az eredeti egyenletrendszer ekvivalens a

$$\begin{aligned} -3x_1+3x_2-3x_3 &= 0 \\ 4x_2-8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel. Az $x_3$ vektort válasszuk egy tetszőleges $t$ valós számnak. Innen $x_2 = 2t$ és $x_1 = t$, tehát

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

azaz a $-2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok altere az $(1, 2, 1)$ vektor által generált altér.

Hasonlóan kapjuk, hogy az 1 sajátérték sajátvektorainak altere az $\mathcal{L}\{(0, 2, 1)\}$, a 2 sajátérték sajátvektorainak altere pedig az $\mathcal{L}\{(1, 1, 0)\}$ altér.

(c) A transzformáció karakterisztikus egyenlete $-\lambda^3+3\lambda^2-4 = 0$. Könnyen látható, hogy $\lambda_1 = -1$ megoldás, továbbá

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4) = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2,$$

tehát a másik sajátérték a $\lambda_2 = 2$ kétszeres algebrai multiplicitással. A $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok megkeresésére a

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 12 & -12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogén egyenletrendszert kell megoldani. Gauss-eliminációt végezve:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 12 & -12 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Azonnal látható, hogy az egyenletrendszer megoldása az

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}),$$

így a $\lambda_2 = 2$-höz tartozó sajátvektorok altere a $\mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ altér. Hasonlóan kapjuk, hogy a $\lambda_1 = -1$-hez tartozó sajátvektorok altere a $\mathcal{L}\{(1, 2, 4)\}$ altér.

(d) A transzformáció karakterisztikus egyenlete $-x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0$. Látható, hogy $\lambda_1 = 1$ megoldás, továbbá

$$-x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = -(x - 1)(x^2 - x + 3).$$

Az $x^2 - x + 3 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív, így nincs megoldása a valós számok halmazán. Tehát a transzformációnak csak a $\lambda = 1$ a sajátértéke, a sajátvektorok pedig a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogén egyenletrendszer megoldásai. Gauss-eliminációt alkalmazva:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

melyből kapjuk, hogy a sajátvektorok altere a $\mathcal{L}\{(1,-2,0)\}$ altér.

(e) Karakterisztikus polinom: $-\lambda^3 - \lambda$, sajátértékek: $-1, 0, 1$.
$\lambda_1 = -1$ sajátvektorainak altere: $\mathcal{L}\{(1,3,2)\}$.
$\lambda_2 = 0$ sajátvektorainak altere: $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$.
$\lambda_3 = 1$ sajátvektorainak altere: $\mathcal{L}\{(1,1,0)\}$.

(f) Karakterisztikus polinom: $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda$, sajátértékek: $0, 3$.
$\lambda_1 = 0$ sajátvektorainak altere: $\mathcal{L}\{(1,2,3)\}$.
$\lambda_2 = 3$ sajátvektorainak altere: $\mathcal{L}\{(1,0,4),(0,1,1)\}$.

**1.27. Feladat.** *Határozzuk meg a következő lineáris transzformációk karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátaltereit. Vizsgáljuk meg a diagonalizálhatóságot, és teljesülése esetén adjunk meg sajátvektorokból álló bázist, továbbá azt az $S$ mátrixot, amellyel $S^{-1}AS$ diagonális alakú, ahol $A$ jelöli a transzformáció természetes bázisra vonatkozó mátrixát.*

*(a)* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to (4x+y+z, x+2y+z, -3x-y)$;
*(b)* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to (-x, -6x+11y+9z, 6x-12y-10z)$;
*(c)* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to (3y+3z, -2x+y+2z, x-z)$;
*(d)* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to (x-y+3z, 3x+5y-3z, 2z)$;
*(e)* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to (-9x+14z, -7x-2y+14z, -7x+12z)$;
*(f)* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to (x+y+2z, 10x+2y-10z, -6x+y+9z)$.

*Megoldás.* Egy lineáris transzformáció mátrixa akkor és csak akkor diagonalizálható, ha létezik sajátvektorokból álló bázis. Ebben a sajátvektorokból álló bázisban $\varphi$ mátrixa olyan, hogy a főátlóban a megfelelő sajátértékek állnak. Ha tehát a természetes bázisból áttérünk a sajátvektorokból álló bázisra, akkor a bázistranszformáció mátrixának oszlopaiban az új bázis koordinátái állnak. A feladat elsősorban ennek az $S$ mátrixnak a meghatározása, amennyiben létezik.

(a) $\varphi(1,0,0)=(4,1,-3)$, $\varphi(0,1,0)=(1,2,-1)$ és $\varphi(0,0,1)=(1,1,0)$, így a transzformáció mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Az 1.26 feladatban leírt módon számolva kapjuk, hogy a karakterisztikus polinom a $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6$ polinom, melynek zérushelyei, így a transzformáció sajátértékei az $1,2,3$ számok. Az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok altere az $\mathcal{L}\{(0,1,-1)\}$ altér, a 2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok altere az $\mathcal{L}\{(-1,1,1)\}$ altér és a 3 sajátértékhez tartozó sajátvektorok altere az $\mathcal{L}\{(-1,0,1)\}$ altér.

Nyilvánvalóan a mátrix diagonalizálható, ugyanis a spektrum teljes, továbbá mindhárom sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyaránt 1, tehát megegyeznek. Egy sajátvektorokból álló bázist alkot a $(0,1,-1),(-1,1,1),(-1,0,1)$ vektorok rendszere, hiszen különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek. A feladat elején leírtak alapján tehát

$$S=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) $\varphi(1,0,0)=(-1,-6,6)$, $\varphi(0,1,0)=(0,11,-12)$ továbbá $\varphi(0,0,1)=(0,9,-10)$, így a transzformáció mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -6 & 11 & 9\\ 6 & -12 & -10\end{pmatrix}.$$

A transzformáció karakterisztikus polinomja a $-\lambda^3+3\lambda+2$ polinom. Két sajátértéke van, a $-1$ kétszeres algebrai multiplicitással, továbbá a 2 egyszeres algebrai multiplicitással. A $-1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok altere az $\mathcal{L}\{(3,0,2),(2,1,0),\}$ altér, tehát a geometriai multiplicitása is 2. A 2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok altere a $\mathcal{L}\{(0,1,-1)\}$ altér. A transzformáció mátrixa tehát diagonalizálható, hiszen a spektrum teljes és a sajátértékek geometriai és algebrai multiplicitása egyenlő. A $\{(3,0,2),(2,1,0),(0,1,-1)\}$ vektorrendszer sajátvektorokból álló bázis, így

$$S=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(c) $\varphi(1,0,0)=(0,-2,1)$, $\varphi(0,1,0)=(3,1,0)$ és $\varphi(0,0,1)=(3,2,-1)$, így a transzformáció mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

A transzformáció karakterisztikus polinomja a $-\lambda^3-2\lambda-3$ polinom, melynek csak egy valós gyöke van, a $-1$. A $-1$ sajátérték algebrai multiplicitása egyszeres, így a transzformáció spektruma nem teljes, ezért mátrixa nem diagonalizálható. A sajátvektorok altere a $\mathcal{L}\{(0,-1,1)\}$ altér.

(d) $\varphi(1,0,0)=(1,3,0)$, $\varphi(0,1,0)=(-1,5,0)$ és $\varphi(0,0,1)=(3,-3,2)$, így a transzformáció mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 3 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

A transzformáció karakterisztikus polinomja a $-\lambda^3+8\lambda^2-20\lambda+16$ polinom. Két sajátérték van, a 2 kétszeres, a 4 pedig egyszeres algebrai multiplicitású. A 4 sajátértékhez tartozó sajátvektorok altere a $\mathcal{L}\{(1,-3,0)\}$ altér. A 2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok altere a $\mathcal{L}\{(-1,1,0)\}$ altér, tehát a geometriai multiplicitása 1, mely nem egyezik meg az algebrai multiplicitással, így a transzformáció mátrixa nem diagonalizálható.

(e) A transzformáció karakterisztikus polinomja $-\lambda^3+\lambda^2+16\lambda+20$, sajátértéke a $-2$ kétszeres algebrai multiplicitással, melynek sajátaltere: $\mathcal{L}\{(0,1,0),(2,0,1)\}$, továbbá az 5 egyszeres algebrai multiplicitással, melynek sajátaltere: $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$. Így

$$S=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(f) A transzformáció karakterisztikus polinomja $-\lambda^3+12\lambda^2-41\lambda+42$, sajátértéke a 2, melynek sajátaltere: $\mathcal{L}\{(1,-1,1)\}$, a 3, melynek sajátaltere: $\mathcal{L}\{(1,0,1)\}$, továbbá a 7, melynek sajátaltere: $\mathcal{L}\{(0,-2,1)\}$. Így

$$S=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

**1.28. Feladat.** *Vizsgáljuk meg, hogy diagonalizálhatóak-e az alábbi mátrixok $\mathbb{C}$ felett.*

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} -i & 1-i & 1+i \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

*Megoldás.* A komplex számok teste felett minden $n$-edfokú egyenletnek multiplicitást is számolva pontosan $n$ darab gyöke van, így itt a spektrum mindig teljes. Ezért egy mátrix diagonalizálhatósága csak attól függ, hogy a sajátértékek geometriai és algebrai multiplicitása megegyezik vagy sem.

(a) A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 9).$$

Látható, hogy a $\lambda_1 = 0$ a mátrix sajátértéke. A $\lambda^2 - 4\lambda + 9 = 0$ egyenlet megoldása további két sajátértéket ad meg:

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 + (\sqrt{16-36})_{1,2}}{2} = 2 + (\sqrt{-5})_{1,2} = \begin{cases} 2 - \sqrt{5}i \\ 2 + \sqrt{5}i \end{cases}$$

Mivel a mátrixnak 3 darab különböző sajátértéke van, így azok algebrai és a geometriai multiplicitása szükségképpen 1, tehát egyenlőek. Ezért a mátrix diagonalizálható.

(b) A mátrix karakterisztikus polinomja $(-i-\lambda)^2(i-\lambda)$, melyről azonnal leolvasható, hogy két sajátérték van, a $\lambda_1 = i$ egyszeres, a $\lambda_2 = -i$ kétszeres algebrai multiplicitással. Azt kell csak megvizsgálnunk, hogy a $\lambda_2$ sajátérték geometriai multiplicitása 1 vagy 2. Ehhez meg kell oldanunk a

$$\begin{pmatrix} -i-(-i) & 1-i & 1+i \\ 0 & -i-(-i) & 0 \\ 0 & 0 & i-(-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert. Azonnal leolvasható a megoldáshalmaz:

$$\begin{pmatrix} z1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \qquad (t \in \mathbb{C}).$$

Így a $\lambda_2$ sajátérték sajátaltere a $\mathcal{L}\{(1,0,0)\}$ altér, így geometriai multiplicitása 1, mely nem egyezik meg az algebrai multiplicitással. Ezért a mátrix nem diagonalizálható.

**1.29. Feladat.** *Milyen $\alpha$ esetén diagonalizálhatóak az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ felett?*

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

*Megoldás.*

(a) Az $A$ mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - (\alpha+1)\lambda - \alpha^2 + \alpha = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa $[-(1+\alpha)]^2 - 4(-\alpha^2+\alpha) = 5\alpha^2 - 2\alpha + 1$, mely mindig pozitív, ezért minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén két különböző sajátértéke van a mátrixnak, így szükségképpen azok algebrai és geometriai multiplicitása 1, azaz megegyezik. Az $A$ mátrix tehát minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén diagonalizálható.

(b) A $B$ mátrix karakterisztikus polinomja $(1-\lambda)(\lambda^2 - \alpha)$. A mátrix spektruma akkor teljes, ha $\alpha \geq 0$. Amennyiben $\alpha > 0$, 3 különböző sajátérték van, az 1, a $\sqrt{\alpha}$ és a $-\sqrt{\alpha}$, és ezek algebrai és geometriai multiplicitása is 1, így ebben az esetben a mátrix diagonalizálható.
Ha $\alpha = 0$, akkor két sajátérték van, az 1 és a 0. A 0 algebrai multiplicitása 2, így meg kell vizsgálni, hogy mennyi a geometriai multiplicitása. Az 1.26 feladatban leírt módon számolva kapjuk, hogy a 0 sajátérték sajátaltere a $\mathcal{L}\{(0,1,0)\}$ altér, tehát a geometriai multiplicitás csak 1, így a mátrix $\alpha = 0$ esetén nem diagonalizálható.
Összefoglalva, $B$ diagonalizálható pontosan akkor, ha $\alpha > 0$.

**1.30. Feladat.** *Legyen $A$ $3\times3$-as diagonalizálható mátrix. Mit mondhatunk $A$ determinánsáról, ha*

*(a) $A$-nak a 0 sajátértéke;*
*(b) $A$-nak két sajátértéke van, az 1 és a 2.*
*(c) $A$ sajátértékei: $-1, 2, 3$.*

*Megoldás.* Mivel $A$ diagonalizálható, ezért determinánsa egyenlő sajátértékeinek szorzatával minden sajátértéket annyiszor véve, amennyi az algebrai multiplicitása (diagonalizálható mátrixnál ez egyenlő a geometriai multiplicitással).

(a) $\det A = 0$;
(b) $\det A = 2$ vagy $\det A = 4$.
(c) $\det A = -6$.

**1.31. Feladat.** *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Számítsuk ki az $A$ mátrix $n$-edik hatványát:*

$$(a)\quad A = \begin{pmatrix} -11 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -12 & 4 & 14 \end{pmatrix} \quad (b)\quad A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

*Megoldás.* Ha egy mátrix diagonális alakú, akkor az $n$-edik hatványa olyan diagonális mátrix, melynek diagonálisában az eredeti mátrix megfelelő elemének $n$-edik hatványa szerepel. Ezért egy diagonalizálható $A$ mátrix esetén érdemes a hozzá hasonló $D$ diagonális mátrixot megkeresni, hiszen ekkor $D = S^{-1}AS$, így $A = SDS^{-1}$, ezért $A^n = SD^nS^{-1}$.

(a) Az 1.26 feladatban leírt módon számolva kapjuk, hogy az $A$ mátrix sajátértéke az 0, melynek sajátaltere $\mathcal{L}\{(-2,1,-2)\}$, az 1, melynek sajátaltere $\mathcal{L}\{(1,3,0)\}$,továbbá a 2, melynek sajátaltere $\mathcal{L}\{(1,0,1)\}$. Tehát a mátrix diagonalizálható, a hozzá hasonló diagonális mátrix átlójában a sajátértékek szerepelnek, így $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Az 1.27 feladat alapján $S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, melynek inverze $S^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Tehát

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6\cdot 2^n & 2^{n+1} & -1+7\cdot 2^n \\ 3 & 0 & -3 \\ -6\cdot 2^n & 2\cdot 2^n & 7\cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Az $A$ mátrix sajátértéke az 1, melynek sajátaltere $\mathcal{L}\{(-1,1,1)\}$, továbbá a $-1$, melynek sajátaltere $\mathcal{L}\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$. Tehát a mátrix diagonalizálható és $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Ha $n$ páros, akkor $D^n = E$, így $A^n = SES^{-1} = SS^{-1} = E$.
Ha $n$ páratlan, akkor $D^n = D$, ezért $A^n = SDS^{-1}$. Az $S$ mátrix a $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix, melynek inverze $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Tehát, ha $n$ páratlan, akkor

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

**1.32. Feladat.** *Melyek igazak az alábbi állítások közül?*

(a) *Ha $A + B = E$, akkor $A$-nak és $B$-nek ugyanazok a sajátvektorai.*
(b) *Ha $AB = 0$, akkor $A$-nak és $B$-nek ugyanazok a sajátvektorai.*
(c) *Ha $\lambda$ sajátértéke $A$-nak, akkor $\lambda^2$ sajátértéke $A^2$-nek.*
(d) *Ha $0$ sajátértéke $A^2$-nek, akkor $0$ sajátértéke $A$-nak.*

*Megoldás.*

(a) Legyen $\underline{x}$ sajátvektora $A$-nak. Ekkor létezik olyan $\lambda$ sajátérték, melyre $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, így $(A + B)\underline{x} = A\underline{x} + B\underline{x} = \lambda\underline{x} + B\underline{x}$. Viszont $A + B = E$, így teljesül az $(A + B)\underline{x} = \underline{x}$ egyenlőség is, ezért $\underline{x} = \lambda\underline{x} + B\underline{x}$, így $B\underline{x} = (1-\lambda)\underline{x}$, azaz $\underline{x}$ a $B$ mátrix $1-\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátértéke. Hasonlóan kapjuk, hogy a $B$ mátrix sajátvektorai is sajátvektorai az $A$ mátrixnak, tehát az állítás igaz.

(b) Az állítás nyilván nem igaz, hiszen például ha $A$ a nullmátrix, akkor minden vektor sajátvektora, és az egyenlőség tetszőleges $B$ mátrix esetén fennáll, így nyilván olyannál is, amelynek nem minden vektor sajátvektora.

(c) Mivel $\lambda$ sajátértéke $A$-nak, ezért létezik olyan $\underline{x}$ vektor, melyre $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$. Ekkor azonban $A^2\underline{x} = A \cdot A\underline{x} = A\lambda\underline{x} = \lambda A\underline{x} = \lambda \cdot \lambda\underline{x} = \lambda^2\underline{x}$, azaz $\lambda^2$ sajátértéke $A^2$-nek, tehát az állítás igaz.

(d) Mivel $0$ sajátértéke $A^2$-nek, így létezik olyan $\underline{x}$ sajátvektor, melyre $A^2\underline{x} = 0\underline{x}$, azaz $A(A\underline{x}) = \underline{0}$. Amennyiben az $\underline{x}$ vektor nem a 0-hoz tartozó sajátvektora az $A$ mátrixnak, akkor $A\underline{x} \neq \underline{0}$, így $A(A\underline{x}) = \underline{0}$ miatt az $A\underline{x}$ vektor a $0$ sajátértékhez tartozó sajátvektora $A$-nak. Tehát vagy az $\underline{x}$ vektor, vagy az $A\underline{x}$ vektor a 0-hoz tartozó sajátvektora az $A$ mátrixnak, ezért az állítás igaz.

**1.33. Feladat.** *Adjunk példát olyan nem hasonló mátrixokra, melyek karakterisztikus polinomja megegyezik.*

*Megoldás.* Legyen $A$ és $B$ két mátrix, melyek karakterisztikus polinomja megegyezik. Ekkor nyilván a sajátértékek is megegyeznek. Amennyiben mindkét mátrix diagonalizálható lenne, akkor mindketten hasonlóak volnának ugyanazon diagonális mátrixszal, így egymással is. Kézenfekvő tehát olyan mátrixokat keresni, amelyek közül $A$ diagonalizálható, $B$ pedig nem. Mivel a karakterisztikus polinom közös, $A$ diagonalizálhatósága miatt a spektrum teljes. $B$ nem diagonalizálható, ezért a sajátértékek valamelyikének geometriai multiplicitása a $B$ mátrix esetén kevesebb, mint az algebrai.

Az egyszerűség kedvéért legyenek a mátrixok $2 \times 2$ típusúak. Nyilvánvaló, hogy a $E$ egységmátrix sajátértéke az 1, melynek algebrai és geometriai multiplicitása is 2. Az egységmátrixhoz semelyik tőle különböző mátrix sem hasonló, hiszen $S^{-1}ES = E$ bármely $S$ reguláris mátrix esetén. Így például az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nem hasonló hozzá, de karakterisztikus polinomja ugyanúgy a $\lambda^2 - 2\lambda + 1$. (Az 1 sajátérték itt ugyanúgy kétszeres algebrai multiplicitású, de a geometriai multiplicitása csak 1.)

# 2. fejezet

# Euklideszi és unitér terek

## 1. Lineáris, bilineáris és kvadratikus formák

**2.1. Feladat.** *A definíció alapján ellenőrizze, hogy az alábbi leképezések lineáris formák-e!*

*1.* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$,
*2.* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2, x_3) = x_2 + 1$,
*3.* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2$,
*4.* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$,
*5.* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 4x_3$,
*6.* $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4$.

*Megoldás.*

1. Egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér lineáris formáinak értékkészlete $\mathbb{R}$, így ez a leképezés lineáris ugyan, de nem lineáris forma.
2. Nem lineáris forma, nem teljesül például a homogenitás:

$$L(\lambda\underline{x}) = \lambda x_2 + 1 \neq \lambda L(\underline{x}) = \lambda(x_2 + 1).$$

   De az additivitás sem teljesül, sőt, a nullvektor képe sem nulla.
3. Nem lineáris, hiszen például a homogenitás nem teljesül:

$$L(\lambda\underline{x}) = (\lambda x_1)^2 \neq \lambda L(\underline{x}) = \lambda(x_1^2).$$

4. Lineáris forma, hiszen egyrészt additív: tetszőleges $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\begin{aligned} L(\underline{x} + \underline{y}) &= x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = \\ L(\underline{x}) + L(\underline{y}) &= x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3, \end{aligned}$$

   és homogén: bármely $\lambda$ valós szám és bármely $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$L(\lambda\underline{x}) = \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda L(\underline{x}) = \lambda(x_1 + x_2 + x_3).$$

5. Igen.

6. Igen.

**2.2. Feladat.** *Írjuk fel a természetes bázisra vonatkozó bázis előállítását az előző feladatban szereplő leképezések közül azoknak, amik lineáris formák voltak!*

*Megoldás.* Egy lineáris forma bázis előállítását a forma bázisvektorokon felvett értékei adják.

1. Az $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ természetes bázisra vonatkozó bázis előállítása 1,1,1, hiszen

$$\begin{aligned} L(1,0,0) &= 1+0+0 = 1, \\ L(0,1,0) &= 0+1+0 = 1, \\ L(0,0,1) &= 0+0+1 = 1. \end{aligned}$$

   A bázis előállítás jelentése hasonló a leképezés mátrixának jelentéséhez, például ennek a lineáris formának a hatása megegyezik az (1 1 1) mátrixszal való szorzás hatásával:

$$L(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3.$$

2. Az $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 4x_3$ forma bázis előállítása 2,0,-4, hiszen

$$\begin{aligned} L(1,0,0) &= 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 2, \\ L(0,1,0) &= 0, \\ L(0,0,1) &= -4. \end{aligned}$$

3. Az $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ forma természetes bázisra vonatkozó előállítása: -1,-1,-1,-1.

**2.3. Feladat.** *Mely lineáris formák (természetes bázisra vonatkozó) bázis előállításait adtuk meg az alábbiakban? Írjuk fel az $\underline{x}$ vektornak az adott lineáris forma általi képét!*

1. $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *bázis előállítása* $1, 2, 3$ *és* $\underline{x} = (4, 3, 2)$,
2. $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *bázis előállítása* $0, 0, -2$ *és* $\underline{x} = (1, 1, 1)$,
3. $L_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *bázis előállítása* $1, 2, 1, 2$ *és* $\underline{x} = (3, 3, 2, 2)$.

*Megoldás.*

1. $L_1(x_1, x_2, x_3) = L_1(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3) = x_1 \underbrace{L(\underline{e}_1)}_{1} + x_2 \underbrace{L(\underline{e}_2)}_{2} + x_3 \underbrace{L(\underline{e}_3)}_{3} =$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3$, és
$$L(4,3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 16.$$
2. $L_2(x_1, x_2, x_3) = -2x_3$ és $L(1,1,1) = -2$.
3. $L_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$ és $L(3,3,2,2) = 3+6+2+4 = 15$.

**2.4. Feladat.** *Lineáris formák-e az alábbi leképezések? Ha igen, adjuk meg bázis előállításukat a kanonikus bázisra vonatkozóan!*

1. $L_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$, $L_1(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_0x$,
2. $L_2 : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$, $L_2(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2 - a_1 + a_0$,
3. $L_3 : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$, $L_3(p) = p(2)$,
4. $L_4 : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$, $L_4(p) = \int_0^2 p(x)dx$,
5. $L_5 : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $L_5(A) = \det(A)$,
6. $L_6 : \mathcal{M}_{3\times 3} \to \mathbb{R}$, $L_5(A) = tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

*Megoldás.*

1. Nem, hiszen a képtér nem $\mathbb{R}$.
2. Igen, hiszen additív: tetszőleges $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ és $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ legfeljebb másodfokú polinomok esetén
$$\begin{aligned} L_2(p+q) &= \big((a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)\big) \\ &= L_2\big((a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)\big) \\ &= 2(a_2+b_2) - (a_1+b_1) + (a_0+b_0) \ = \\ L_2(p) + L_2(q) &= 2a_2 - a_1 + a_0 + 2b_2 - b_1 + b_0, \end{aligned}$$
és hasonlóan igazolható a homogenitás is. Az $x^2, x, 1$ bázisra vonatkozó előállítás: $2, -1, 1$, mert $L_2(x^2) = 2$, $L_2(x) = -1$, és $L_2(1) = 1$.
3. $L_3$ lineáris forma, hiszen additív:
$$\begin{aligned} L_3(p+q) &= \big((a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)\big) \\ &= L_3\big((a_3+b_3)x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)\big) \\ &= 8(a_3+b_3) + 4(a_2+b_2) + 2(a_1+b_1) + (a_0+b_0) \\ L_3(p) + L_3(q) &= p(2) + q(2) \\ &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 + 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0, \end{aligned}$$

és homogén:

$$\begin{aligned} L_3(\lambda p) &= L_3(\lambda a_3x^3+\lambda a_2x^2+\lambda a_1x+\lambda a_0) \\ &= 8\lambda a_3+4\lambda a_2+2\lambda a_1+\lambda a_0 \ = \\ \lambda L_3(p) &= \lambda p(2) \ = \ \lambda(8a_3+4a_2+2a_1+a_0). \end{aligned}$$

A bázis előállítás: $8,4,2,1$.

4. Az $L_4(p) = L_4(a_2x^2+a_1x+a_0) = \int_0^2 p(x)dx$ leképezés lineáris, mely az integrál ismert tulajdonságaiból következik:

$$\begin{aligned} \int_0^2 p(x)+q(x)dx &= \int_0^2 p(x)dx + \int_0^2 q(x)dx \\ \int_0^2 \lambda p(x)dx &= \lambda \int_0^2 p(x)dx \end{aligned}$$

A leképezés linearitása onnan is látható, hogy

$$\begin{aligned} L_4(p) &= \int_0^2 a_2x^2+a_1x+a_0dx = \left[a_2\frac{x^3}{3}+a_1\frac{x^2}{2}+a_0x\right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3}a_2+2a_1+2a_0. \end{aligned}$$

Innen a bázis előállítás is leolvasható: $\frac{8}{3},2,2$.

5. Nem lineáris a leképezés, hiszen általában sem $|A+B| = |A|+|B|$ sem $|\lambda A| = \lambda|A|$ nem teljesül.
6. Egy négyzetes mátrix főátlójában álló elemek összegét a mátrix nyomának (trace) nevezzük. Ez a leképezés lineáris, hiszen homogén:

$$tr(\lambda A) = \lambda a_{11}+\lambda a_{22}+\lambda a_{33} = \lambda tr(A),$$

és hasonlóan látható, hogy teljesül az additivitás is. A bázis előállítás az $E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},\dots,E_{33}$ bázisra vonatkozóan (itt $E_{ij}$ jelöli azt a mátrixot, aminek $i$. sorának $j$. eleme 1, a többi elem nulla $(i,j = 1,2,3)$):

$$1,0,0,0,1,0,0,0,1,$$

ezek a számok rendre az $E_{11},E_{12},\dots,E_{33}$ mátrixokon felvett értékei az $L_6$ lineáris formának, azaz a főátlóban lévő elemek összegei.

**2.5. Feladat.** *Adjon példát $\mathbb{R}^3$-nak olyan nem triviális lineáris formájára, amely*

1. *az (1,2,3) vektorhoz 4-et rendel,*
2. *az (1,1,0) és az (1,0,1) vektorokhoz nullát rendel,*
3. *az (1,1,0) vektorhoz 1-et, az (1,0,1) vektorhoz 2-t rendel!*

*Megoldás.*

1. Az $\mathbb{R}^3$ vektortér egy általános lineáris formája
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3$$
alakú. Keresünk tehát olyan $l_1, l_2, l_3$ valós számokat (a bázis előállítást), hogy $l_1 + 2l_2 + 3l_3 = 4$. Ha tehát például a bázis előállítás $2, 1, 0$, akkor a $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2$ lineáris forma rendelkezni fog ezzel a tulajdonsággal, de természetesen végtelen sok ilyen leképezés van.
2. Keressük a
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3$$
leképezést úgy, hogy
$$\begin{aligned}\varphi(1,1,0) &= 0\\ \varphi(1,0,1) &= 0\end{aligned}$$
teljesüljön, ami azt jelenti, hogy $l_1 + l_2 = 0$ és $l_1 + l_3 = 0$. A lehetséges megoldások tehát a $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 - x_3$ leképezés és konstansszorosai.
3. Az előző feladathoz hasonlóan, most
$$\begin{aligned}\varphi(1,1,0) &= l_1 + l_2 &= 1\\ \varphi(1,0,1) &= l_1 + l_3 &= 2\end{aligned}$$
feltételnek kell teljesülnie, tehát $l_2 = 1 - l_1$ és $l_3 = 2 - l_1$. Például $l_1 = 1$ választással a $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$ lineáris forma adódik.

**2.6. Feladat.** *Adjon meg egy bázist a $V^*$ duális téren, ha:*

*1.* $V = \mathbb{R}^3$,
*2.* $V = \mathcal{P}_2$,
*3.* $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$.

*Megoldás.* A $V$ valós számtest feletti vektortér $V^*$ duális terét az összes $V \to \mathbb{R}$ lineáris formák alkotják. A duális tér dimenziója megegyezik $V$ dimenziójával.

1. $\mathbb{R}^3$ lineáris formái $\varphi(x_1, x_2, x_3) = l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3$ alakúak, és a lineáris formák vektortere illetve a számhármasok vektortere között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adhatunk meg, ha minden $\varphi$ lineáris formához hozzárendeljük az $(l_1, l_2, l_3)$ bázis előállítását. Így a duális tér egy bázisát adják azok az $m_1, m_2, m_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineáris formák,

amiknek a bázis előállításuk rendre (1,0,0), (0,1,0) és (0,0,1), azaz

$$\begin{aligned} m_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1 \\ m_2(x_1,x_2,x_3) &= x_2 \\ m_3(x_1,x_2,x_3) &= x_3. \end{aligned}$$

Látható, hogy az összes lineáris forma előállítható mint $m_1, m_2, m_3$ lineáris kombinációja.

2. $\mathcal{P}_2$ lineáris formái $\varphi(a_2x^2 + a_1x + a_0) = l_1a_2 + l_2a_1 + l_3a_0$ alakúak. A duális terének egy bázisát adják azok az $m_1, m_2, m_3 : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ lineáris formák, amiknek a bázis előállításuk rendre (1,0,0), (0,1,0) és (0,0,1), azaz

$$\begin{aligned} m_1(a_2x^2 + a_1x + a_0) &= a_2 \\ m_2(a_2x^2 + a_1x + a_0) &= a_1 \\ m_3(a_2x^2 + a_1x + a_0) &= a_0. \end{aligned}$$

3. $\mathcal{M}_{2\times 2}$ lineáris formái

$$\varphi(A) = \varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = l_1a_{11} + l_2a_{12} + l_3a_{21} + l_4a_{22}$$

alakúak, és a duális tér egy bázisát adják például az $m_1, m_2, m_3, m_4 : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ lineáris formák, ahol

$$\begin{aligned} m_1(A) &= a_{11} \\ m_2(A) &= a_{12} \\ m_3(A) &= a_{21} \\ m_4(A) &= a_{22}. \end{aligned}$$

**2.7. Feladat.** *Adott egy $B : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris forma és $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ vektorok. A bilineáris formák definíciója alapján bontsuk fel az alábbi kifejezéseket $cB(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ alakú kifejezések összegére, ahol $c$ valós konstans, $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ pedig az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektorok valamelyike.*

1. $B(3\underline{x}, \underline{y})$,
2. $B(3\underline{x}, 3\underline{x})$,
3. $B(\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y})$,
4. $B(3\underline{x} + 2\underline{y} - \underline{z}, \underline{x} - \underline{y} + 2\underline{z})$,
5. $B(2\underline{x} - 2\underline{y} + 3\underline{z}, 4\underline{x} + 2\underline{y} - \underline{z})$.

*Megoldás.*

1. Mivel $B$ az első változójában homogén, így $B(3\underline{x},\underline{y}) = 3B(\underline{x},\underline{y})$.
2. Mivel $B$ az első és a második változójában is homogén, így
$$B(3\underline{x},3\underline{x}) = 3B(\underline{x},3\underline{x}) = 9B(\underline{x},\underline{x}).$$
3. Mivel $B$ első változójában additív:
$$B(\underline{x}+\underline{y},\underline{x}+\underline{y}) = B(\underline{x},\underline{x}+\underline{y}) + B(\underline{y},\underline{x}+\underline{y}),$$
és az így kapott két tagot tovább bonthatjuk, mert a bilineáris formák a második változóban is additívak:
$$B(\underline{x},\underline{x}+\underline{y}) + B(\underline{y},\underline{x}+\underline{y}) = B(\underline{x},\underline{x}) + B(\underline{x},\underline{y}) + B(\underline{y},\underline{x}) + B(\underline{y},\underline{y}).$$
4. Alkalmazva a homogenitást és additivitást:
$B(3\underline{x}+2\underline{y}-\underline{z},\underline{x}-\underline{y}+2\underline{z}) = B(3\underline{x},\underline{x}-\underline{y}+2\underline{z})+B(2\underline{y},\underline{x}-\underline{y}+2\underline{z})+B(-\underline{z},\underline{x}-\underline{y}+2\underline{z}) = B(3\underline{x},\underline{x}) + B(3\underline{x},-\underline{y}) + B(3\underline{x},2\underline{z}) + B(2\underline{y},\underline{x}) + B(2\underline{y},-\underline{y}) + B(2\underline{y},2\underline{z}) + B(-\underline{z},\underline{x}) + B(-\underline{z},-\underline{y}) + B(-\underline{z},2\underline{z}) = 3B(\underline{x},\underline{x}) - 3B(\underline{x},\underline{y}) + 6B(\underline{x},\underline{z}) + 2B(\underline{y},\underline{x}) - 2B(\underline{y},\underline{y}) + 4B(\underline{y},\underline{z}) - B(\underline{z},\underline{x}) + B(\underline{z},\underline{y}) - 2B(\underline{z},\underline{z})$.
5. $B(2\underline{x}-2\underline{y}+3\underline{z},4\underline{x}+2\underline{y}-\underline{z}) = 8B(\underline{x},\underline{x})+4B(\underline{x},\underline{y})-2B(\underline{x},\underline{z})-8B(\underline{y},\underline{x})-4B(\underline{y},\underline{y}) + 2B(\underline{y},\underline{z}) + 12B(\underline{z},\underline{x}) + 6B(\underline{z},\underline{y}) - 3B(\underline{z},\underline{z})$.

**2.8. Feladat.** *Bilineáris formák-e az alábbi leképezések?*

1. $B_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $B_1\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$,
2. $B_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $B_2\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = x_1+y_1$,
3. $B_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $B_3\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = x_1y_1$,
4. $B_4 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $B_4\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = 5x_1y_1 + 2x_2y_3$,
5. $B_5 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $B_5\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = 5x_1y_1 + 2x_2y_3 + x_3y_1^2$.

*Megoldás.*

1. Nem, egy bilineáris forma értékkészlete nem lehet $\mathbb{R}^2$.
2. Nem, egyik tulajdonság sem teljesül. Például nem homogén az első változóban:
$$\begin{aligned} B_2\big(\lambda(x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) &= \lambda x_1 + y_1, \\ \lambda B_2\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) &= \lambda(x_1+y_1). \end{aligned}$$
3. Igen. Első változójában additív:
$$B_3(\underline{x},\underline{y}) + B_3(\underline{z},\underline{y}) = x_1y_1 + z_1y_1,$$
$$B_3(\underline{x}+\underline{z},\underline{y}) = B_3\big((x_1,x_2)+(z_1,z_2),(y_1,y_2)\big) = (x_1+z_1)y_1,$$

első változójában homogén:

$$\lambda B_3(\underline{x},\underline{y}) = \lambda x_1 y_1,$$
$$B_3(\lambda\underline{x},\underline{y}) = B_3\big((\lambda x_1,\lambda x_2),(y_1,y_2)\big) = (\lambda x_1)y_1,$$

és teljesen hasonlóan a második változójában is additív és homogén.

4. Igen. Első változójában additív:

$$B_4\big((x_1,x_2,x_3)+(z_1,z_2,z_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = 5(x_1+z_1)y_1 + 2(x_2+z_2)y_3,$$
$$B_4(\underline{x},\underline{y}) + B_4(\underline{z},\underline{y}) = 5x_1y_1 + 2x_2y_3 + 5z_1y_1 + 2z_2y_3,$$

első változójában homogén:

$$B_4(\lambda\underline{x},\underline{y}) = B_4\big((\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = 5\lambda x_1y_1 + 2\lambda x_2y_3,$$
$$\lambda B_4(\underline{x},\underline{y}) = B_4\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = \lambda(5x_1y_1 + 2x_2y_3).$$

Az additivitást és a homogenitást most is ellenőrizhetjük egyidejűleg, például a második változóban való linearitást most igazoljuk egyetlen kifejezésben:

$$\begin{aligned} B_4(\underline{x},\lambda\underline{y}+\mu\underline{z}) &= B_4((x_1,x_2,x_3),(\lambda y_1+\mu z_1,\lambda y_2+\mu z_2,\lambda y_3+\mu z_3)) \\ &= 5x_1(\lambda y_1+\mu z_1) + 2x_2(\lambda y_3+\mu z_3) \\ &= \lambda(5x_1y_1+2x_2y_3) + \mu(5x_1z_1+2x_2z_3) \\ &= \lambda B_4(\underline{x},\underline{y}) + \mu B_4(\underline{x},\underline{z}). \end{aligned}$$

5. Nem. Például nem homogén a második változóban:

$$\begin{aligned} B_5(\underline{x},\lambda\underline{y}) &= B_5\big((x_1,x_2,x_3),(\lambda y_1,\lambda y_2,\lambda y_3)\big) \\ &= 5\lambda x_1y_1 + 2\lambda x_2y_3 + x_3(\lambda y_1)^2, \\ \lambda B_5(\underline{x},\underline{y}) &= \lambda(5x_1y_1 + 2x_2y_3 + x_3y_1^2). \end{aligned}$$

**2.9. Feladat.** *Írja fel a $B_1, B_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bilineáris formák mátrixát a természetes bázisra vonatkozóan, és számítsa ki az $(1,2,3),(-1,2,-1)$ vektorpáron felvett értékeiket!*

*1.* $B_1((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 4x_1y_3 - x_2y_1 - 2x_2y_2 + 6x_2y_3 + x_3y_3$,

*2.* $B_2((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - 4x_1y_3 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_2 - 5x_3y_3$.

*Megoldás.* A bilineáris forma mátrixa a formának a bázisvektor-párokon felvett értékeit tartalmazza.

1. Itt például a mátrix második sorának harmadik eleme

$$B_1((0,1,0),(0,0,1)) = 6x_2y_3 = 6.$$

Tehát $B$ mátrixa:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

és így $B_1(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top B \underline{y}$ miatt

$$\begin{aligned} B_1((1,2,3),(-1,2,-1)) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -21. \end{aligned}$$

Természetesen ez ugyanazt jelenti, mintha a bilineáris formának a feladatban szereplő felírása alapján számolnánk: $B_1((1,2,3),(-1,2,-1)) = 2\cdot1\cdot(-1)+3\cdot1\cdot2+4\cdot1\cdot(-1)-2\cdot(-1)-2\cdot2\cdot2+6\cdot2\cdot(-1)+3\cdot(-1) = -21$.

2. A bilineáris forma mátrixa:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix},$$

és

$$B_2((1,2,3),(-1,2,-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 12.$$

**2.10. Feladat.** *Írja fel azt a $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bilineáris formát, aminek mátrixa a természetes bázisban*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

*és számítsa ki $B((1,1,1),(4,2,1))$ és $B((4,2,1),(1,1,1))$ értékét!*

*Megoldás.* $B((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_1 + 3x_3y_3$, és

$$B((1,1,1),(4,2,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 15.$$

Mivel ez egy szimmetrikus bilineáris forma, így $B((4,2,1),(1,1,1)) = 15$.

**2.11. Feladat.** *Igaz-e, hogy ha egy bilineáris forma mátrixa szimmetrikus valamely bázisra vonatkozóan, akkor minden bázisban szimmetrikus lesz?*

*Megoldás.* Igen, hiszen ha a forma mátrixa valamely bázisban $B = B^\top$, akkor tetszőleges $S$ bázistranszformációs mátrix esetén a bilineáris forma mátrixa az új bázisban $S^\top BS$, ami szintén szimmetrikus mátrix:

$$(S^\top BS)^\top = S^\top B^\top (S^\top)^\top = S^\top BS.$$

**2.12. Feladat.** *Kvadratikus formák-e az alábbi leképezések? Ha igen, adja meg azt a szimmetrikus bilineáris formát, amiből a kvadratikus forma származik, azaz a poláris formáját!*

1. $Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Q_1(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$,
2. $Q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$,
3. $Q_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_3(x_1, x_2) = 2x_1x_2$,
4. $Q_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_4(x_1, x_2) = x_1^2$,
5. $Q_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q_5(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3$.
6. $Q_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q_6(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3 + 2x_1x_3$.

*Megoldás.* A feladat megválaszolásánál vegyük figyelembe, hogy valamely $B$ szimmetrikus bilineáris formából származó kvadratikus forma: $Q(\underline{x}) = B(\underline{x}, \underline{x})$. Ha például a $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris forma esetén $B((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ felírásában az $x_1y_2$ együtthatója 2, akkor $x_2y_1$ együtthatója is 2, és így a $B$-ből származó $Q$ kvadratikus forma ( tehát $Q((x_1, x_2)) = B((x_1, x_2), (x_1, x_2))$ ) felírásában $x_1x_2$ együtthatója 4 lesz.

1. Nem, hiszen az értékkészlet nem egy számtest.
2. Nem.
3. Igen, a szimmetrikus bilineáris forma amiből $Q_3$ származik megkapható az alábbi módon:
$$B(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2}(Q_3(\underline{x} + \underline{y}) - Q_3(\underline{x}) - Q_3(\underline{y})),$$
de szükségtelen ezt kiszámolnunk, hiszen világos, hogy
$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1.$$
Valóban, ebben $\underline{y}$ helyére is $\underline{x}$-et írva $Q_3$ adódik.
4. Igen, és $Q_4$ poláris formája:
$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1.$$
5. Igen, és $Q_5$ poláris formája:

$$\begin{aligned} B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &= x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \\ & \quad 3x_2y_3 + 3x_3y_2 - x_1y_3 - x_3y_1. \end{aligned}$$

6. Igen, és $Q_6$ poláris formája:

$$B((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 4x_2y_2 - x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + \\ -\frac{3}{2}x_2y_3 - \frac{3}{2}x_3y_2 + x_1y_3 + x_3y_1.$$

**2.13. Feladat.** *Írjuk fel az előző feladatban szereplő kvadratikus formák mátrixát, és számítsuk ki az* $(1,2)$*, illetve az* $(1,2,3)$ *vektoron felvett értéküket.*

*Megoldás.* A $Q$ kvadratikus forma $C$ mátrixa megegyezik a poláris formájának mátrixával. Ha a forma az $\mathbb{R}^n$ vektortéren van értelmezve, akkor $Q(\underline{x})$ kiszámítható az alábbi módon is: $Q(\underline{x}) = \underline{x}^\top C\underline{x}$.

1. A $Q_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_3(x_1,x_2) = 2x_1x_2$ kvadratikus forma mátrixa és $Q_3((1,2))$ kiszámítása:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q((1,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4.$$

2. A $Q_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_3(x_1,x_2) = x_1^2$ kvadratikus forma mátrixa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és $Q_4((1,2)) = 1^2 = 1$.
3. A $Q_5(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3$ forma mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

és

$$Q_5((1,2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 46,$$

vagy közvetlenül is számolhatunk:

$$Q_5((1,2,3)) = 1^2 + 2\cdot 2^2 + 3^2 - 2 + 6\cdot 6 - 6 = 46.$$

4. A $Q_6(x_1,x_2,x_3) = 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3 + 2x_1x_3$ forma mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & -1 \end{pmatrix},$$

és $Q_6((1,2,3)) = 3$.

**2.14. Feladat.** *Mit mondhatunk az alábbi kvadratikus formákról definitség szempontjából a főminor-determinánsok alapján?*

1. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2$,
2. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2$,
3. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$,
4. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
5. $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$,
6. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$,
7. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$.

*Megoldás.* $Q$ pozitív definit, ha minden nem nulla vektoron felvett értéke pozitív, és $Q$ pozitív szemidefinit, ha minden vektoron nemnegatív értéket vesz fel, de van nem nulla vektor, amit a nullába képez. Hasonlóan definiálható a negatív eset, és ha pozitív és negatív értéket is felvesz a forma, akkor indefinit. Egy Jacobitól származó tétel szerint, ha a kvadratikus forma mátrixában a főminor-determinánsokat $\triangle_1, \dots, \triangle_n$ jelöli, és ezek egyike sem nulla, akkor létezik bázis, amelyben a kvadratikus forma az alábbi négyzetösszeg alakú:

$$Q(\underline{x}) = \frac{\triangle_1}{1}x_1^2 + \frac{\triangle_2}{\triangle_1}x_2^2 \dots \frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}}x_n^2.$$

Ennek következménye, hogy a forma pontosan akkor lesz pozitív definit, ha ezek a hányadosok mind pozitívak, és akkor negatív definit, ha mind negatívok.

1. Ez a kvadratikus forma elve normál alakú. Világos, hogy pozitív szemidefinit, hiszen $Q(\underline{x}) \geq 0$ minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ esetén, de van olyan nem nulla vektor, amihez a nullát rendeli hozzá, például $Q(0, 1, 0) = 0$.
2. Ez a kvadratikus forma eleve kanonikus alakú, és pozitív definit, mert $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 \geq 0$, és $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 = 0$ csak akkor, ha $\underline{x} = \underline{0}$.
3. Ez a normál alakú kvadratikus forma indefinit, hiszen pozitív és negatív értékeket is felvehet, például $Q(1, 0, 0) = 1$ és $Q(0, 1, 0) = -1$.
4. Írjuk fel a forma $C$ mátrixát, és vizsgáljuk meg a főminor-determinánsokat:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\triangle_1 = |1| = 1, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \triangle_3 = |C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1.$$

Mivel $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ mind pozitív, így $Q$ pozitív definit.

5. Írjuk fel a főminor-determinánsokat:

$$\triangle_1 = |-1| = -1, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2, \quad \triangle_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3.$$

Mivel $\triangle_1 = -1$, $\dfrac{\triangle_2}{\triangle_1} = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\triangle_3}{\triangle_2} = -\dfrac{2}{3}$ mind negatív, így $Q$ negatív definit.

6. A főminor-determinánsok:

$$\triangle_1 = |1| = 1, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad \triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -22.$$

Mivel $\triangle_1 = 1$, $\dfrac{\triangle_2}{\triangle_1} = -3$, $\dfrac{\triangle_3}{\triangle_2} = -\dfrac{22}{3}$, így a forma indefinit.

7. Mivel a második főminor-determináns:

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

így ez a módszer itt nem működik. A definitség eldönthető például a forma kanonikus alakra hozásával (lásd következő feladat).

**2.15. Feladat.** *Hozzuk kanonikus alakra az alábbi kvadratikus formákat! (Adjuk meg a bázist is, amiben ez a kanonikus alak előáll, és döntsük el, hogy milyen definit a kvadratikus forma!)*

1. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$,
2. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$,
3. $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3$,
4. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
5. $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$,
6. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2$,
7. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,
8. $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2$.
9. $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4$.

*Megoldás.* A feladat megoldásához a Lagrange módszert használjuk.

1. Az első lépésben a $Q$ kvadratikus formát felbontjuk két másik összegére úgy, hogy az első négyzetes alakú, a második pedig egy kétváltozós kvadratikus forma, amiben az $x_1$ változó már nem szerepel. Gyűjtsük tehát össze a $Q$ azon tagjait, amikben szerepel $x_1$, és ezt a kifejezést alakítsuk teljes négyzetté:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3.$$

Tehát

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 8x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 8x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 8x_3^2 + 12x_2x_3, \end{aligned}$$

és itt a négyzetes alakon kívül lévő tagokban valóban nem szerepel $x_1$. Most ezekre a tagokra vonatkozóan megismételjük az előző eljárást $x_2$-vel:

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 8x_3^2 + 12x_2x_3 \\ &= (\underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3}_{y_1})^2 - 3(\underbrace{x_2 - 2x_3}_{y_2})^2 + 4\underbrace{x_3^2}_{y_3} = y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2. \end{aligned}$$

Ezzel elértük, hogy a kvadratikus forma négyzetösszeg alakú (azaz kanonikus alakú), ha a régi $(x_1, x_2, x_3)$ koordinátákról áttérünk az $(y_1, y_2, y_3)$ új koordinátákra, ahol

$$\begin{array}{rcrrr} y_1 &=& x_1 & +x_2 & -2x_3 \\ y_2 &=& & x_2 & -2x_3 \\ y_3 &=& & & x_3 \end{array}$$

a koordinátatranszformáció egyenletrendszere, aminek mátrixos alakja a következő:

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}.$$

Keressük tehát azt a $(b)$ bázist, amire ha áttérünk az $(e)$ természetes bázisról, akkor a vektorok koordinátái a fenti módon változnak meg. A koordinátatranszformáció és a bázistranszformáció kapcsolatáról tanultak alapján, a fenti egyenletben szereplő mátrix nem más, mint az $(e) \to (b)$ bázistranszformáció $S$ mátrixának az inverze, így

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A feladat ezzel kész: az új bázis vektorai $S$ oszlopvektorai, ebben a bázisban $Q$ kanonikus alakú, a kanonikus alakban szereplő együtthatók 1,-3,4, tehát a forma indefinit.

Számításaink helyességét leellenőrizhetjük úgy, hogy kiszámítjuk az $S^\top CS$ mátrixot, ahol $C$ jelöli a $Q$ mátrixát a természetes bázisban:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

tehát megkaptuk $Q$ mátrixát az új bázisban, ami valóban diagonális alakú.

2. Hozzuk a kvadratikus formát négyzetösszeg alakra. Először elérjük, hogy $x_2$ ne szerepeljen négyzetes alakon kívül, majd a második lépésben elérjük, hogy $x_1$ is csak négyzetes alakokban szerepeljen (a kiinduló alakban nincs $x_1^2$, ezért kezdünk $x_2$-vel):

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3 \\ &= (x_2 - x_1 + x_3)^2 - x_1^2 + 6x_1x_3 \\ &= (x_2 - x_1 + x_3)^2 - (x_1 - 3x_3)^2 + 9x_3^2 = y_1^2 - y_2^2 + 9y_3^2. \end{aligned}$$

Látható, hogy a kvadratikus forma indefinit, és a bázistranszformáció mátrixa meghatározható az

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = S^{-1}\underline{x}.$$

egyenlet alapján:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát a $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(3,2,1)$ vektorokból álló bázisban a kvadratikus forma kanonikus alakú, azaz mátrixa diagonális, a főátlóban az 1,-1,9 számok szerepelnek.

3. Hasonlóan,

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{7}{8}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}x_2x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{7}{8}\left(x_2 + \frac{2}{7}x_3\right)^2 + \frac{10}{7}x_3^2 \\ &= 2y_1^2 + \frac{7}{8}y_2^2 + \frac{10}{7}y_3^2. \end{aligned}$$

A bázistranszformáció mátrixa:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -4/7 \\ 0 & 1 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ennek oszlopvektorai adják az új bázis vektorait, és a kvadratikus forma pozitív definit, mert a kanonikus alakban szereplő együtthatók mind pozitívak.

4. Írjuk fel $Q$-t négyzetösszeg alakban:

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \end{aligned}$$

A bázistranszformáció mátrixa:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ennek oszlopvektorai adják az új bázis vektorait. Itt a kanonikus alak egyben normál alak is, és az ebben szereplő együtthatók mind pozitívak, így a kvadratikus forma pozitív definit.

5. Az előzőekhez hasonlóan:

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= -x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 - 2\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{3}{2}x_3^2 = -y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{3}{2}y_3^2. \end{aligned}$$

A bázistranszformáció mátrixa:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ennek oszlopvektorai adják az új bázis vektorait. Itt a kanonikus alakban minden együttható negatív, így a kvadratikus forma negatív definit.

6. Most egy lépés után négyzetösszeg alakot kapunk:

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + 4x_3^2 = y_1^2 + 4y_3^2. \end{aligned}$$

Itt a koordinátatranszformációban $y_2 = x_2$, és $y_2$ együtthatója a kanonikus alakban nulla. A bázistranszformáció mátrixa:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

és a kvadratikus forma pozitív szemidefinit, mert a kanonikus alakban szereplő együtthatók: 1,0,4.

7. Ebben az esetben úgy kell négyzetösszeg alakra hoznunk $Q$-t, hogy egyetlen négyzetes tag sem szerepel eredetileg benne, azaz mátrixának főátlójában csak nullák állnak. Ekkor végrehajtunk egy olyan koordinátatranszformációt, aminek eredményeként az $x_1x_2$ tagból négyzetes tagok keletkeznek, és ezután alkalmazhatjuk az előzőekben már leírt módszert. Térjünk tehát át azon $y_1, y_2, y_3$ koordinátákra, amikre teljesül, hogy

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 + y_2 \\ x_2 & = & y_1 - y_2 \\ x_3 & = & y_3. \end{array}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= (y_1+y_2)(y_1-y_2) + (y_1+y_2)y_3 + (y_1-y_2)y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1+y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 \\ &= z_1^2 - z_2^2 - z_3^2. \end{aligned}$$

Megkaptuk tehát a négyzetösszeg alakot (ami most normál alak is egyben), de hogyan határozzuk meg a bázist, amiben a kvadratikus forma ilyen alakú lesz? Először $x$-koordinátákról $y$-okra tértünk át, majd az $y$-okról $z$-kre. Az alábbi összefüggéseket ismerjük:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{y} = P\underline{y} \quad \text{és} \quad \underline{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{y} = R\underline{y}.$$

Innen $\underline{x} = P\underline{y} = PR^{-1}\underline{z}$, és itt a régi koordinátákat fejeztük ki az újakkal, így a bázistranszformáció mátrixa:

$$S = PR^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzés céljából számítsuk ki az $S^\top CS$ mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tehát eredményeink helyesek, a kapott diagonális mátrix a kvadratikus forma új bázisbeli mátrixa.

8. Alkalmazzuk most is azt a koordinátatranszformációt, aminek egyenletrendszere

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 + y_2 \\ x_2 & = & y_1 - y_2 \\ x_3 & = & y_3. \end{array}$$

Ekkor $Q(\underline{x}) = 2x_1x_2 = 2y_1^2 - 2y_2^2$, és a bázistranszformáció mátrixa:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Valóban, ha kiszámoljuk az $S^\top CS$ mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Az első lépésben az $x_1$-es tagokat gyűjtjük össze, majd az $x_4$-es tagokat:

$$\begin{array}{rcl} Q(\underline{x}) & = & x_1^2 + x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4 \\ & = & (x_1+x_3)^2 - x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_4 \\ & = & (x_1+x_3)^2 + (x_4+x_2)^2 - x_2^2 - x_3^2 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + y_4^2, \end{array}$$

ahol

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1 + x_3 \\ y_2 & = & x_2 \\ y_3 & = & x_3 \\ y_4 & = & x_2 + x_4. \end{array}$$

Ebben az egyenletrendszerben az új koordináták vannak kifejezve a régiekkel, így a bázistranszformáció mátrixát az alapmátrix inverzeként kapjuk meg:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2.16. Feladat.** *Módosítsuk úgy az előző feladat 1. 2. és 8. pontjában szereplő kvadratikus formák kanonikus alakra hozásának eljárását úgy, hogy normál alakot kapjunk.*

*Megoldás.* A kvadratikus forma normál alakja olyan kanonikus alak, amelyben csak $+1, -1$ és 0 együtthatók szerepelhetnek.

1. A kanonikus alakra hozás során az alábbi négyzetösszeg alakot kaptuk:
$$Q(\underline{x}) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 3(x_2 - 2x_3)^2 + 4x_3^2$$
Vigyük be a zárójelek előtt szereplő 3 és 4 együtthatókat a zárójeleken belülre:
$$Q(\underline{x}) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (\sqrt{3}x_2 - 2\sqrt{3}x_3)^2 + (2x_3)^2 = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$
ahol
$$\begin{array}{rclll} y_1 & = & x_1 & +x_2 & -2x_3 \\ y_2 & = & & \sqrt{3}x_2 & -2\sqrt{3}x_3, \\ y_3 & = & & & 2x_3 \end{array}$$
így a bázistranszformáció mátrixa:
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$
2. Hasonlóan:
$$Q(\underline{x}) = (x_2 - x_1 + x_3)^2 - (x_1 - 3x_3)^2 + 9x_3^2 = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$
ahol a bázistranszformáció mátrixa:
$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} -1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$
3. Koordinátacsere után az alábbi alakot kaptuk:
$$Q(\underline{x}) = 2x_1x_2 = 2y_1^2 - 2y_2^2.$$
Ha azt a transzformációt hajtjuk végre, ahol
$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 & + & \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 & - & \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_3 & = & & & y_3, \end{array}$$
akkor
$$Q(\underline{x}) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = y_1^2 - y_2^2.$$

Ekkor a bázistranszformáció mátrixa:

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2.17. Feladat.** *Hogyan változik meg egy kvadratikus forma mátrixa, ha végrehajtunk egy olyan bázistranszformációt, aminek a mátrixa egy elemi oszlopátalakításhoz tartozó elemi mátrix?*

*Megoldás.* A kvadratikus forma mátrixán is végrehajtódik az elemi oszlopátalakítás, és egy ugyanilyen típusú sorátalakítás is. Lássunk először egy példát! Legyen $Q$ mátrixa valamely bázisban

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tekintsük például azt az elemi átalakítást, mikor egy mátrix második oszlopához hozzáadjuk az első oszlop kétszeresét. Az ehhez tartozó elemi mátrix:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha végrehajtjuk azt a bázistranszformációt, aminek mátrixa $\varepsilon$, akkor $Q$ mátrixa az új bázisban $\varepsilon^\top C\varepsilon$, azaz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

tehát az eredeti $C$ mátrixon végrehajtódik két elemi átalakítás: az első oszlop kétszeresének hozzáadása a második oszlophoz, és az első sor kétszeresének hozzáadása a második sorhoz. Ennek oka az, hogy az $\varepsilon$ mátrixszal való jobbról szorzás a megfelelő oszlop átalakítás végrehajtását jelenti, míg az $\varepsilon^\top$ mátrixszal való balról szorzás azon sorátalakítás végrehajtását jelenti, aminek mátrixa $\varepsilon^\top$. Ez természetesen tetszőleges $\varepsilon$ esetén is igaz.

**2.18. Feladat.** *Hozzuk kanonikus alakra az alábbi kvadratikus formákat eliminációval, az előző feladat alapján! Adjuk meg az új bázist is!*

1. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$,
2. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$,
3. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

*Megoldás.* Ha a kvadratikus forma mátrixa a természetes bázisra vonatkozóan $C$, és egymás után végrehajtjuk azon bázistranszformációkat, amiknek mátrixai az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ elemi mátrixok, akkor az új bázisban $Q$ mátrixa:

$$\varepsilon_n^\top \ldots \varepsilon_1^\top C \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)^\top C \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n.$$

Ha tehát elérjük, hogy ez a mátrix diagonális legyen, akkor abban a bázisban aminek elemei az $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ mátrix oszlopaiban találhatók, a $Q$ kanonikus alakú lesz. Kiindulunk tehát a $(C|E)$ mátrixból, és úgy eliminálunk, hogy $C$-n sor-oszlop átalakításokat végzünk (például ha a második sorhoz hozzáadjuk az első sor kétszeresét, akkor a második oszlophoz is hozzáadjuk az első oszlop kétszeresét), de $E$-n csak a sorátalakítást hajtjuk végre. Ha $C$ helyén diagonális mátrix alakul ki, akkor $E$ helyén a bázistranszformáció mátrixának transzponáltja fog szerepelni:

$$(C|E) \ \rightsquigarrow \ (D|S^\top).$$

1. Az első lépésben elérjük, hogy az aláhúzott értékek helyén nulla legyen. Kivonjuk $C$ első sorát a másodikból, és az első sor kétszeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz, ugyanúgy, ahogy az inverzszámításos szimultán Gauss eliminációnál csináltuk, tehát ezeket az átalakításokat $E$-n is végrehajtjuk. Ezután oszlopokra is végre kell ugyanezt hajtani (csak $C$-n), de mivel az első oszlop már $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alakú, így ez csak annyit jelent, hogy az első sor is $(1, 0, 0)$ lesz. A szimmetria miatt mindig ilyen könnyű dolgunk lesz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \underline{1} & -\underline{2} & 1 & 0 & 0 \\ \underline{1} & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -\underline{2} & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -8 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Azt kaptuk, hogy az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázisban $Q$ kanonikus alakú: $Q(\underline{y}) = y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2$. Ugyanazt az eredményt kaptuk, mint a 2.15 feladatnál, ez azonban nem szükségszerű. Hangsúlyozzuk azonban, hogy bárhogyan is hozzuk kanonikus alakra a kvadratikus formát, a pozitív, negatív és nulla együtthatók száma mindig ugyanannyi.

2. Most $C$-ben az első sort a második sorral, majd az első oszlopot a másodikkal megcseréljük, $E$-ben pedig csak a sorokat cseréljük. Ezután az előzőekhez hasonlóan folytatjuk az eliminációt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

3. Itt a sor-oszlop csere nem vezetne eredményre, az első sorhoz hozzáadjuk a második sort, és az első oszlophoz a másodikat:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

megszorozhatjuk 2-vel a második sort és oszlopot:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

# 2. Euklideszi terek

**2.19. Feladat.** *Definiálhatnak-e belső szorzást $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi bilineáris formák? Ha igen, akkor számítsuk ki az $\underline{x} = (1,2,3)$ vektor $||\underline{x}||_B$ normáját!*

*1.* $B\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$,
*2.* $B\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_2y_1 + x_3y_1 + x_3y_3$,
*3.* $B\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = 6x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_1 + x_3y_3$.

*Megoldás.* Egy bilineáris forma akkor definiálhat belső szorzást egy vektortéren, ha szimmetrikus, és a belőle származó kvadratikus forma pozitív definit.

1. Ennek a bilineáris formának a mátrixa az egységmátrix, ami szimmetrikus és valamennyi főminor-determinánsa pozitív, így ez belső szorzás. (Az $\mathbb{R}^n$ vektortéren alapértelemben ezt a bilineáris formát tekintjük belső

szorzásnak, és ekkor $(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top \underline{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.) Az $\underline{x} = (1, 2, 3)$ vektor normája:

$$||\underline{x}|| = \sqrt{B(\underline{x}, \underline{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

2. Ennek a bilineáris formának is szimmetrikus a mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de a $B$-ből származó kvadratikus forma nem pozitív definit, mert ennek a mátrixnak a második sarokminor-determinánsa negatív:

$$\triangle_1 = 2, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

3. Ezen bilineáris forma mátrixa szimmetrikus, és a főminor-determinánsok mind pozitívak:

$$\triangle_1 = 6, \quad \triangle_2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5, \quad \triangle_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

így $B$ segítségével definiálhatunk belső szorzást, és ekkor

$$||\underline{x}||_B^2 = (1\ 2\ 3) \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 35.$$

**2.20. Feladat.** *Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$-beli $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok normáját, távolságát és az általuk bezárt $\alpha$ szöget, ha*

1. $\underline{x} = (2, 1, 2)$, $\underline{y} = (-1, 2, 0)$,
2. $\underline{x} = (3, -1, 1)$, $\underline{y} = (1, 1, 1)$,
3. $\underline{x} = (0, 2, 0)$, $\underline{y} = (2, -1, 4)$.

*Megoldás.* Egy $\underline{x}$ vektor normája $\sqrt{(\underline{x}, \underline{x})}$, két vektor távolsága a különbségük normája, és két vektor által bezárt szög cosinusát megkapjuk, ha a belső szorzatukat elosztjuk a normáikkal.

1. $||\underline{x}|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, $||\underline{y}|| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,
   $d(\underline{x}, \underline{y}) = ||\underline{x} - \underline{y}|| = ||(3, -1, 2)|| = \sqrt{14}$,
   $\cos\alpha = \dfrac{(\underline{x}, \underline{y})}{||\underline{x}|| ||\underline{y}||} = \dfrac{2(-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0}{3\sqrt{5}} = 0$, tehát a két vektor merőleges.

2. $||(3,-1,1)|| = \sqrt{11}$, $||(1,1,1)|| = \sqrt{3}$,
   $||\underline{x}-\underline{y}|| = ||(2,-2,0)|| = 2\sqrt{2}$,
   $\cos\alpha = \frac{(\underline{x},\underline{y})}{||\underline{x}||||\underline{y}||} = \frac{3-1+1}{\sqrt{33}} = \sqrt{\frac{3}{11}}$.
3. $||(0,2,0)|| = 2$, $||(2,-1,4)|| = \sqrt{21}$,
   $||\underline{x}-\underline{y}|| = ||(-2,3,-4)|| = \sqrt{29}$,
   $\cos\alpha = \frac{(\underline{x},\underline{y})}{||\underline{x}||||\underline{y}||} = \frac{-2}{2\sqrt{21}} = -\frac{1}{\sqrt{21}}$.

**2.21. Feladat.** *Mit mondhatunk két adott vektor által bezárt szögről, ha tudjuk, hogy belső szorzatuk*

1. *nulla,*
2. *pozitív,*
3. *negatív?*

*Megoldás.*

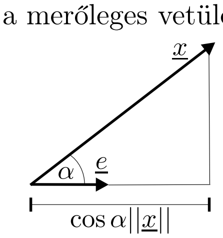
1. Két vektor pontosan akkor merőleges, ha belső szorzatuk nulla.
2. Ha a vektor belső szorzata pozitív, akkor az általuk bezárt szög cosinusa is pozitív, így ez hegyesszög.
3. Ekkor tompaszöget zárnak be.

**2.22. Feladat.** *Mi* $(\underline{x},\underline{e})$ *geometriai jelentése az* $\mathbb{R}^n$ *téren, ha* $||\underline{e}|| = 1$*?*

*Megoldás.* Ha $\alpha$ jelöli az $\underline{x}$ és $\underline{e}$ által bezárt szöget, akkor

$$\cos\alpha = \frac{(\underline{x},\underline{e})}{||\underline{x}||},$$

így $(\underline{x},\underline{e}) = ||\underline{x}||\cos\alpha$, tehát az $\underline{x}$ vektor $\underline{e}$ irányú egyenesre vett merőleges vetületének hossza. (Magát a merőleges vetületet az $(\underline{x},\underline{e})\underline{e}$ vektor adja.)




**2.23. Feladat.** *Határozzuk meg az* $\underline{x}$ *vektor* $\underline{e}$ *irányba eső merőleges vetületét, ha*

1. $\underline{x} = (3,-1,2)$, $\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$,
2. $\underline{x} = (5,5,-3)$, $\underline{e} = (1,2,-1)$,
3. $\underline{x} = (6,2,6,2)$, $\underline{e} = (1,1,1,1)$.

*Megoldás.*

1. Mivel $\underline{e}$ egységvektor, így a vetületet $\underline{x}' = (\underline{x}, \underline{e})\underline{e}$ adja:

$$\begin{aligned}\underline{x}' &= \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

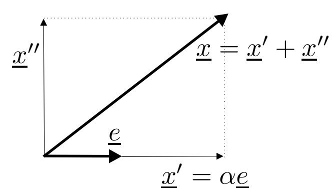
   (A jobb áttekinthetőség érdekében most $< >$ zárójellel jelöltük a skaláris szorzatot. Emlékezzünk, hogy a belső szorzás bilineáris, így a skalár kiemelhető mindkét változójából, itt az $1/\sqrt{3}$ számot kihoztuk a zárójel elé!) Ellenőrizhetjük is, hogy helyesen számoltunk-e. Ha a vetületet $\underline{x}'$ jelöli, akkor $\underline{x}'' := \underline{x} - \underline{x}'$ merőleges $\underline{x}'$-re. Valóban, $\underline{x}'' = (5/3, -7/3, 2/3)$ és $\underline{x}'$ belső szorzata nulla.
2. (a) Most $\underline{e}$ nem egységhosszú, így először lenormáljuk. Ez azt jeleni, hogy elosztjuk a hosszával, hogy egy vele egyező irányú de már 1 normájú vektort kapjuk:

$$\underline{e}' := \frac{\underline{e}}{||\underline{e}||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Most már $\underline{e}'$ segítségével megkaphatjuk a vetületet:

$$(\underline{x}, \underline{e}')\underline{e}' = \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{18}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   (b) Másképp is számolhatunk: tudjuk, hogy a vetület $\underline{e}$ konstansszorosa.




   Keressük tehát azt az $\alpha \neq 0$ valós számot, amire igaz, hogy ha $\underline{x}' = \alpha\underline{e}$, és $\underline{x}'' = \underline{x} - \underline{x}'$, akkor $\underline{x}'$ és $\underline{x}''$ merőlegesek, azaz a belső szorzatuk nulla:

$$0 = (\underline{x}', \underline{x}'') = (\alpha\underline{e}, \underline{x} - \alpha\underline{e}) = \alpha(\underline{e}, \underline{x}) - \alpha^2(\underline{e}, \underline{e}) =$$

$$\alpha \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle - \alpha^2 \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{||\underline{e}||^2} = 18\alpha - 6\alpha^2.$$

Innen $\alpha = 3$ és a merőleges vetület: $\underline{x}' = 3\underline{e}$.

3. Keressük azt az $\alpha \neq 0$ valós számot, amire $\underline{x}' = \alpha\underline{x}$ és $\underline{x}'' = \underline{x} - \underline{x}'$ ortogonálisak, tehát

$$0 = (\alpha\underline{e}, \underline{x} - \alpha\underline{e}) = \alpha(\underline{e}, \underline{x}) - \alpha^2||\underline{e}||^2 = 16\alpha - 4\alpha^2.$$

Innen $\alpha = 4$, és a merőleges vetület $(4, 4, 4, 4)$.

**2.24. Feladat.** *Ha tudjuk, hogy* $||\underline{x}|| = 3$, $||\underline{y}|| = 5$, *és* $(\underline{x}, \underline{y}) = 1$, *akkor mivel egyenlő* $||\underline{x} + \underline{y}||$*?*

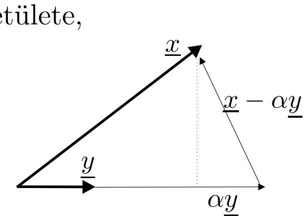
*Megoldás.* Mivel

$$\begin{aligned} ||\underline{x} + \underline{y}||^2 &= (\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{x}) + 2(\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{y}, \underline{y}) \\ &= ||\underline{x}||^2 + 2(\underline{x}, \underline{y}) + ||\underline{y}||^2 = 9 + 2 + 25 = 36, \end{aligned}$$

így $||\underline{x} + \underline{y}|| = 6$.

**2.25. Feladat.** *Milyen* $\alpha$ *szám esetén lesz az* $\underline{x} - \alpha\underline{y}$ *vektor minimális normájú, ha* $\underline{x} = (-1, 10, 7)$, $\underline{y} = (-1, 2, 3)$*?*

*Megoldás.* (a) Akkor lesz minimális normájú, ha $\alpha\underline{y}$ éppen az $\underline{x}$ vektor $\underline{y}$ irányban vett merőleges vetülete,




tehát ha $0 = (\underline{x} - \alpha\underline{y}, \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y}) - \alpha||\underline{y}||^2 = 42 - \alpha 14$. Innen $\alpha = 3$.

(b) Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha kiszámoljuk, hogy mennyi $||\underline{x} - \alpha\underline{y}||^2$:

$$\begin{aligned} ||(-1 + \alpha, 10 - \alpha 2, 7 - \alpha 3)||^2 &= (-1 + \alpha)^2 + (10 - 2\alpha)^2 + (7 - 3\alpha)^2 \\ &= 14\alpha^2 - 84\alpha + 150 \\ &= 14(\alpha - 3)^2 + 24. \end{aligned}$$

Látható, hogy ez a kifejezés $\alpha = 3$ esetén minimális.

**2.26. Feladat.** *Milyen szöget zárnak be az* $\underline{x}$ *és* $\underline{y}$ *egységvektorok, ha tudjuk, hogy* $\underline{x} + 2\underline{y}$ *és* $5\underline{x} - 4\underline{y}$ *merőlegesek egymásra?*

*Megoldás.* Mivel $\cos\alpha = \frac{(\underline{x},\underline{y})}{||\underline{x}||||\underline{y}||}$ és $\underline{x}$, $\underline{y}$ hossza 1, így csak $(\underline{x},\underline{y})$-t kell kiszámolnunk. Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= (\underline{x}+2\underline{y}, 5\underline{x}-4\underline{y}) = 5(\underline{x},\underline{x}) + 10(\underline{y},\underline{x}) - 4(\underline{x},\underline{y}) - 8(\underline{y},\underline{y}) \\ &= 5||\underline{x}||^2 + 6(\underline{x},\underline{y}) - 8||\underline{y}||^2 = 6(\underline{x},\underline{y}) - 3. \end{aligned}$$

Innen $\cos\alpha = (\underline{x},\underline{y}) = 1/2$, tehát 60°-os szöget zárnak be.

**2.27. Feladat.** *Mely vektorok lesznek merőlegesek az $\underline{n}$ vektorra a megadott Euklideszi terekben? Milyen geometriai alakzatot alkotnak ezek a vektorok?*

*1.* $\underline{n} = (1,2) \in \mathbb{R}^2$,
*2.* $\underline{n} = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$,
*3.* $\underline{n} = (1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$,
*4.* $\underline{n} = (1,-1,-2,1) \in \mathbb{R}^4$.

*Megoldás.* Ha egy vektor merőleges $\underline{n}$-re, akkor a vektor tetszőleges skalárszorosai is azok lesznek, illetve két $\underline{n}$-re merőleges vektor összege is merőleges lesz $\underline{n}$-re, így az ilyen vektorok egy alteret fognak alkotni.

1. Keressük azon $\underline{x} = (x_1, x_2)$ vektorokat, amelyekre $(\underline{n},\underline{x}) = 0$, azaz

$$n_1x_1 + n_2x_2 = x_1 + 2x_2 = 0.$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, ami egy egyenletből áll, és megoldásai az alábbi vektorok:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

tehát a $(-2,1)$ irányú origón átmenő egyenes pontjai. A fenti egyenlet az $(1,2)$ normálvektorú, $\underline{0}$-n átmenő egyenes normálvektoros egyenlete.

2. Keressük azon $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektorokat, amelyekre $(\underline{n},\underline{x}) = 0$, azaz

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = x_3 = 0.$$

Ezen homogén lineáris egyenlet megoldásai az alábbi vektorok:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

tehát az $[x,y]$ sík pontjai. A fenti egyenlet a $(0,0,1)$ normálvektorú, $\underline{0}$-n átmenő sík normálvektoros egyenlete.

3. A keresett vektorokat az alábbi egyenlet adja meg:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

Ezen homogén lineáris egyenlet megoldásai az alábbi vektorok:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

tehát az $(1,0,1)$, $(-2,1,0)$ vektorok által generált altér, ami egy origón átmenő sík.

4. Keressük azon $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vektorokat, amelyekre

$$(\underline{n}, \underline{x}) = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 = x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,$$

Innen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_3, \qquad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R},$$

tehát egy három dimenziós altér.

Általánosságban elmondható, hogy egy $n$-dimenziós Euklideszi térben adott vektorra merőleges vektorok egy $(n-1)$-dimenziós alteret alkotnak, azaz egy origón átmenő hipersíkot.

**2.28. Feladat.** *Írjuk fel az $\underline{n}$ normálvektorú, $\underline{r}$-re illeszkedő sík egyenletét $\mathbb{R}^3$-ban!*

*1.* $\underline{n} = (1,2,3)$, $\underline{r} = (1,1,1)$,
*2.* $\underline{n} = (-2,1,4)$, $\underline{r} = (2,3,-1)$,
*3.* $\underline{n} = (1,1,1)$, $\underline{r} = (1,1,1)$.

*Állapítsuk meg, hogy a $\underline{z} = (2,-1,2)$ vektor eleme-e a síkok valamelyikének!*

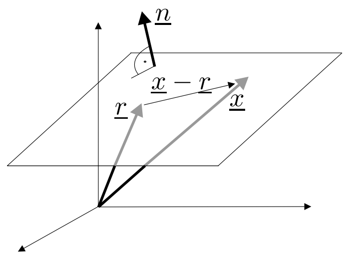
*Megoldás.* Egy $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektor pontosan akkor lesz eleme az $\underline{n}$ normálvektorú és $\underline{r}$-re illeszkedő síknak, ha az $\underline{x} - \underline{r}$ vektor merőleges az $\underline{n}$ normálvektorra, azaz ha teljesül, hogy $(\underline{x} - \underline{r}, \underline{n}) = \underline{0}$. Átrendezés után

$$(\underline{x}, \underline{n}) = (\underline{r}, \underline{n})$$

adódik, ami koordinátákkal írva:

$$x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 = r_1n_1 + r_2n_2 + r_3n_3.$$

(A középiskolás tananyagban szerepelt az egyenes normálvektoros egyenlete, ami analóg a fenti egyenlettel: $x_1n_1 + x_2n_2 = r_1n_1 + r_2n_2$.)




1. Helyettesítsük be a megfelelő koordinátákat a fenti egyenletbe:
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6.$$
Mivel a $(2, -1, 2)$ vektor koordinátái teljesítik az egyenletet, így $\underline{z}$ eleme a síknak.
2. A keresett egyenlet: $-2x_1 + x_2 + 4x_3 = -5$, és $\underline{z}$ nem eleme a síknak.
3. Az egyenlet: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, és $\underline{z}$ eleme a síknak.

**2.29. Feladat.** *Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami illeszkedik az alábbi három pontra!*

1. $\underline{a} = (3, 2, 1)$, $\underline{b} = (2, 1, 2)$, $\underline{c} = (0, 0, 5)$,
2. $\underline{a} = (-1, 1, 1)$, $\underline{b} = (2, 2, 0)$, $\underline{c} = (-3, 1, -1)$,
3. $\underline{a} = (-5, 1, 1)$, $\underline{b} = (0, -2, 0)$, $\underline{c} = (-2, 1, 4)$.

*Megoldás.*

1. Keresünk egy olyan $\underline{n}$ vektort, ami merőleges a síkra, így merőleges a $\underline{b} - \underline{a} = (-1, -1, 1)$ és a $\underline{c} - \underline{a} = (-3, -2, 4)$ vektorra is, tehát
$$\begin{aligned} -n_1 - n_2 + n_3 &= 0 \\ -3n_1 - 2n_2 + 4n_3 &= 0. \end{aligned}$$
Ha ezt az egyenletrendszert megoldjuk, akkor azt kapjuk, hogy $\underline{n} = (2, -1, 1)t, \quad t \in \mathbb{R}$. Válasszuk $t$-t 1-nek, ekkor a sík normálvektora $(2, -1, 1)$, és a keresett egyenlet $(\underline{x}, \underline{n}) = (\underline{a}, \underline{n})$, azaz
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 5.$$
2. Hasonlóan, $\underline{b} - \underline{a} = (3, 1, -1)$, $\underline{c} - \underline{a} = (-2, 0, -2)$, és a sík normálvektora megkapható az
$$\begin{aligned} 3n_1 + n_2 - n_3 &= 0 \\ -2n_1 \qquad - 2n_3 &= 0 \end{aligned}$$
egyenletrendszerből: $\underline{n} := (-1, 4, 1)$. A sík egyenlete
$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 6.$$

3. Most $\underline{b} - \underline{a} = (5, -3, -1)$, $\underline{c} - \underline{a} = (3, 0, 3)$, az egyenletrendszerre pedig

$$\begin{array}{rrrcl} 5n_1 & -3n_2 & -n_3 & = & 0 \\ 3n_1 & & +3n_3 & = & 0 \end{array}$$

adódik. Legyen $\underline{n} = (-1, -2, 1)$, így a sík egyenlete: $-x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$.

**2.30. Feladat.** *Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$-beli $\underline{r}$ pontra illeszkedő és $\underline{v}$ irányvektorú egyenes egyenletrendszerét!*

*1.* $\underline{r} = (1, 2, -1)$, $\underline{v} = (1, 3, 1)$,
*2.* $\underline{r} = (-1, 0, 4)$, $\underline{v} = (-1, 2, 3)$,
*3.* $\underline{r} = (-1, 3, 4)$, $\underline{v} = (2, -1, 0)$,
*4.* $\underline{r} = (1, 0, 0)$, $\underline{v} = (1, 0, 0)$.

*Megoldás.* $\mathbb{R}^3$-ban egy egyenest nem egy, hanem két egyenlettel lehet jellemezni. Egy $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ pont akkor és csak akkor lesz eleme az egyenesnek, ha $\underline{x} = \underline{r} + t\underline{v}$ valamely $t$ valós szám esetén. Ez a három koordinátára egy-egy egyenletet jelent:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & r_1 + tv_1 \\ x_2 & = & r_2 + tv_2 \\ x_3 & = & r_3 + tv_3. \end{array}$$

Ezekből $t$-t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{x_1 - r_1}{v_1} = \frac{x_2 - r_2}{v_2} = \frac{x_3 - r_3}{v_3},$$

ha $\underline{v}$-nek nincs nulla koordinátája, ez az egyenes kanonikus egyenletrendszere.

1. Az egyenes egyenletrendszere:

$$x_1 - 1 = \frac{x_2 - 2}{3} = x_3 + 1,$$

ami egy két egyenletből álló lineáris egyenletrendszerrel egyenértékű. Ugyanez az egyenes tehát megadható például az alábbi egyenletrendszerrel is:

$$\begin{array}{rrrcl} 3x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ x_1 & & -x_3 & = & 2. \end{array}$$

2. Az egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x_1 + 1}{-1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3 - 4}{3},$$

és ebből például az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & -x_2 & & = & 2 \\ & 3x_2 & -2x_3 & = & -8 \end{array}$$

(A két egyenlet egy-egy síkot ad meg, az egyenes tehát ezen két sík metszete. Természetesen más egyenletrendszer is jellemezheti ugyanezen egyenest.)

3. Most $\underline{v}$-nek van nulla koordinátája, ezért tekintsük először a paraméteres alakot:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1+2t \\ x_2 &= 3-t \\ x_3 &= 4, \end{aligned}$$

tehát az egyenes egyenletrendszere

$$\frac{x_1+1}{2} = \frac{x_2-3}{-1}, \quad x_3 = 4.$$

4. Ez az egyenes az úgynevezett $x$-tengely. A paraméteres egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1+t \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0, \end{aligned}$$

tehát $x_1$ tetszőleges lehet, és az egyenest meghatározó két egyenlet:

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

**2.31. Feladat.** *Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárással ortonormáljuk az alábbi vektorrendszereket!*

*1.* $\underline{b}_1 = (1,2,1),\ \underline{b}_2 = (-1,2,0),\ \underline{b}_3 = (2,-1,1),$
*2.* $\underline{b}_1 = (1,1,1),\ \underline{b}_2 = (0,1,2),\ \underline{b}_3 = (2,3,1),$
*3.* $\underline{b}_1 = (1,1,1),\ \underline{b}_2 = (1,1,2),\ \underline{b}_3 = (1,2,3),$
*4.* $\underline{b}_1 = (1,2,1),\ \underline{b}_2 = (2,1,2),\ \underline{b}_3 = (-1,1,1),$
*5.* $\underline{b}_1 = (0,1,0,1),\ \underline{b}_2 = (-1,2,0,1),\ \underline{b}_3 = (2,-1,1,0).$

*Megoldás.* Az ortonormált vektorrendszer első elme $\underline{e}_1 = \frac{\underline{b}_1}{||\underline{b}_1||}$, a $k$-adik elemet pedig az első $k-1$ elem ismertében $\underline{e}_k = \frac{\underline{e}'_k}{||\underline{e}'_k||}$ adja, ahol

$$\underline{e}'_k = \underline{b}_k - (\underline{b}_k, \underline{e}_1)\underline{e}_1 - \cdots - (\underline{b}_k, \underline{e}_{k-1})\underline{e}_{k-1}.$$

1. Helyettesítsük be a megfelelő vektorokat a képletbe:

$$\begin{aligned}
\underline{e}_1 &= \frac{\underline{b}_1}{||\underline{b}_1||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\\
\underline{e}_2' &= \underline{b}_2 - (\underline{b}_2,\underline{e}_1)\underline{e}_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\left\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\1\\-1/2\end{pmatrix},\\
\underline{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix},\\
\underline{e}_2' &= \underline{b}_3 - (\underline{b}_3,\underline{e}_1)\underline{e}_1 - (\underline{b}_3,\underline{e}_2)\underline{e}_2\\
&= \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{14}\left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{-9}{14}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix},\\
\underline{e}_3 &= \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. $\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$

3. $\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$

4. $\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$

5. $\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\\-1\end{pmatrix}.$

**2.32. Feladat.** *Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ban egy olyan ortogonális bázist, amelynek egyik vektora $b_1$, ahol*

1. $\underline{b}_1 = (2, -1, 1)$,
2. $\underline{b}_1 = (0, 1, -1)$!

*Megoldás.* Három lineárisan független vektorból Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárással tudunk ortogonális bázist készíteni. Az adott $\underline{b}_1$ vektorhoz kell tehát találnunk még két vektort úgy, hogy együtt $\mathbb{R}^3$ egy bázisát adják.

1. Válasszunk ki a $\underline{b}_1, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ vektorrendszerből egy bázist úgy, hogy $\underline{b}_1$ benne maradjon. Világos, hogy $\underline{b}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ lineárisan függetlenek, alkalmazzuk tehát az ortogonalizációs eljárást:

$$\begin{aligned} \underline{b}_2' &= \underline{e}_2 - \left(\underline{e}_2, \frac{\underline{b}_1}{||\underline{b}_1||}\right) \frac{\underline{b}_1}{||\underline{b}_1||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \underline{b}_3' &= \underline{e}_3 - \left(\underline{e}_3, \frac{\underline{b}_1}{||\underline{b}_1||}\right) \frac{\underline{b}_1}{||\underline{b}_1||} - \left(\underline{e}_3, \frac{\underline{b}_2}{||\underline{b}_2||}\right) \frac{\underline{b}_2}{||\underline{b}_2||} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   mivel itt a vektorokat nem kell normálnunk, egy megfelelő ortogonális bázist alkotnak a $\underline{b}_1 = (2, -1, 1)$, $(2, 5, 1)$, $(-1, 0, 2)$ vektorok.
2. Hasonlóan, most $\underline{b}_1, \underline{e}_1, \underline{e}_2$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban, és ebből Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárással készíthető ortogonális bázis: $(0, 1, -1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$.

**2.33. Feladat.** *Adjunk meg ortonormált bázist az alábbi alterekben:*

1. $H_1 = \mathcal{L}((-1, 2, 1), (1, 0, 3))$,
2. $H_2 = \mathcal{L}((1, -1, 2), (2, 1, 0), (0, -3, 4))$,
3. $H_3 = \mathcal{L}((1, -1, 0, 1), (1, -3, 4, 3), (0, 2, 0, 2), (2, -4, 4, 4))$.

*Megoldás.* Először az alteret generáló vektorrendszerből ki kell választani egy bázist, majd alkalmazható a Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás.

1. Mivel ez a két vektor lineárisan független, így az ortonormált bázis $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ ahol:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Eliminációval válasszunk ki egy lineárisan független vektorrendszert:
$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix},$$
tehát az első két vektor $H_2$ egy bázisát adja. Alkalmazzuk a Gram-Schmidt eljárást, és a kapott ortonormált bázist az $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$ és az $\frac{1}{\sqrt{174}}(11,7,-2) akat$ vektorok adják.
3. Eliminációval azt kapjuk, hogy az első három vektor a $H_3$ altér egy bázisát adja, ezen vektorokra alkalmazva az ortogonalizációs eljárást az alábbiakat kapjuk: $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{42}}(-2,-1,6,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$.

**2.34. Feladat.** *Az $\mathbb{E}$ 9-dimenziós Euklideszi térben $H$ egy 4-dimenziós altér. Mennyi $H$ ortogonális komplementerének a dimenziója?*

*Megoldás.* Mivel $H \oplus H^\top = \mathbb{E}$, így $\dim H^\top = 5$.

**2.35. Feladat.** *Adjuk meg egy-egy bázisát az alábbi alterek ortogonális komplementerének!*

*1.* $H_1 = \mathcal{L}(2,-1,3)$,
*2.* $H_2 = \mathcal{L}((1,-3,2),(4,1,0))$,
*3.* $H_3 = \mathcal{L}((0,1,-1,0),(1,2,1,-1),(1,0,0,-1),(-1,1,-1,1))$.

*Megoldás.* Egy $\underline{x}$ vektor pontosan akkor lesz eleme az altér ortogonális komplementerének, ha az alteret generáló vektorok mindegyikére merőleges.

1. Itt $\underline{x} \in H_1^\top$, ha $((x_1,x_2,x_3),(2,-1,3)) = 0$, tehát a
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$
egy egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ennek megoldástere lesz az ortogonális komplementer.
$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\ 0\\ 1\end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix}1/2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} t_2, \qquad t_1,t_2 \in \mathbb{R}.$$
Tehát a $H_1^\top$ altér egy bázisát adják a $(-3,0,2),(1,2,0)$ vektorok. (Ellenőrizhetjük, hogy az eredményként kapott vektoroknak és a $H_1$ alteret generáló vektornak a belső szorzata valóban nulla.)
2. A $H_2^\top$ altér elemei azok a vektorok lesznek, amelyek mindkét $H_2$-t generáló vektorra merőlegesek, tehát ezekkel vett belső szorzatuk nulla:
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0\\ 4x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Innen $(x_1, x_2, x_3) = (-2/13, 8/13, 1)t$, ahol $t \in \mathbb{R}$, tehát az $(-2, 8, 13)$ vektor bázis $H_2^\top$-ben.

3. Hasonlóan, az

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 \qquad &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad\qquad - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása után azt kapjuk, hogy $H_3^\top = \mathcal{L}(1, 0, 0, 1)$.

**2.36. Feladat.** *Adjunk meg ortogonális bázist az alábbi alterek ortogonális komplementerében!*

1. $H_1 = \mathcal{L}(1, 2, -1)$,
2. $H_2 = \mathcal{L}((1, -2, 0, 1), (1, 2, 1, 0))$,
3. $H_3 = \mathcal{L}((1, -1, 2, 0), (2, -1, 0, -1), (0, -1, 4, 1))$.

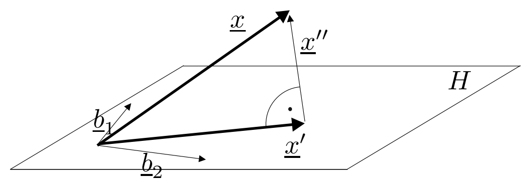
*Megoldás.* Az előző feladathoz hasonlóan kell eljárnunk, de a kapott vektorokat még ortonogonalizálnunk kell a Gram-Schmidt eljárással.

1. Az $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ egyenlet megoldásterét a $(-2, 1, 0), (1, 0, 1)$ vektorok generálják, ezekre alkalmazva az ortogonalizációs eljárást azt kapjuk, hogy
$$H_1^\top = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 5)\right).$$
Ez egyben ortonormált bázis is.
2. A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása után
$$H_2^\top = \mathcal{L}((-2, -1, 4, 0), (-2, 1, 0, 4)),$$
és ezen két vektor ortonogonalizálása után azt kapjuk, hogy
$$H_2^\top = \mathcal{L}\left((-2, -1, 4, 0), (-12, 8, -4, 28)\right).$$
3. Első lépésben $(2, 4, 1, 0), (1, 1, 0, 1)$ adódik, majd ortogonalizálás után $(2, 4, 1, 0), (3, -1, -2, 7)$.

**2.37. Feladat.** *Adjuk meg az $\underline{x}$ vektor merőleges vetületét a $H = \mathcal{L}(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ altérre, ahol*

1. $\underline{x} = (-3, 7, 2)$, $H = \mathcal{L}((1, 2, 1), (-1, 0, 2))$,
2. $\underline{x} = (3, 7, 6)$, $H = \mathcal{L}((1, 1, -1), (2, 0, 3)$,
3. $\underline{x} = (2, 5, -3, -3)$, $H = \mathcal{L}((5, 4, -1, -2), (3, -1, 2, 1))$.

*Megoldás.* Az $\underline{x}'$ vektor akkor lesz az $\underline{x}$ merőleges vetülete, ha egyrészt $\underline{x}' \in H$ (tehát előáll a $H$-t generáló vektorok lineáris kombinációjaként), másrészt az $\underline{x}'' := \underline{x} - \underline{x}'$ vektor merőleges $H$-ra (azaz merőleges a $H$-t generáló $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ vektorokra).




Keressük tehát azokat az $\alpha_1, \alpha_2$ konstansokat, amelyekre teljesül, hogy ha $\underline{x}' = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2$, akkor az $\underline{x} - \underline{x}'$ vektor merőleges $\underline{b}_1$-re és $\underline{b}_2$-re is. Ekkor

$$0 = (\underline{x} - \alpha_1 \underline{b}_1 - \alpha_2 \underline{b}_2, \underline{b}_1) = (\underline{x}, \underline{b}_1) - \alpha_1(\underline{b}_1, \underline{b}_1) - \alpha_2(\underline{b}_2, \underline{b}_1),$$

és hasonló egyenlet teljesül $\underline{b}_2$-re is. Innen a keresett konstansok meghatározhatóak.

1. Helyettesítsük tehát be a megfelelő vektorokat az

$$\begin{aligned} \alpha_1(\underline{b}_1, \underline{b}_1) + \alpha_2(\underline{b}_2, \underline{b}_1) &= (\underline{x}, \underline{b}_1) \\ \alpha_1(\underline{b}_1, \underline{b}_2) + \alpha_2(\underline{b}_2, \underline{b}_2) &= (\underline{x}, \underline{b}_2) \end{aligned}$$

egyenletrendszerbe:

$$\begin{aligned} 6\alpha_1 + \alpha_2 &= 13 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 &= 7. \end{aligned}$$

Innen $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$, és így a merőleges vetület: $\underline{x}' = 2\underline{b}_1 + \underline{b}_2 = (1, 4, 4)$.

2. Hasonlóan, most

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 - \alpha_2 &= 4 \\ -\alpha_1 + 13\alpha_2 &= 24, \end{aligned}$$

innen $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, és így a merőleges vetület: $\underline{x}' = 2\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 = (6, 2, 4)$.

3. Az egyenletrendszer most

$$\begin{aligned} 46\alpha_1 + 7\alpha_2 &= 39 \\ 7\alpha_1 + 15\alpha_2 &= -8, \end{aligned}$$

$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1$, és a merőleges vetület: $\underline{x}' = \underline{b}_1 - \underline{b}_2 = (2, 5, -3, -3)$.

**2.38. Feladat.** *Számítsuk ki az $\underline{x}$ vektor távolságát a $H$ altértől az előző feladat adataival! Hogyan határozható meg az $\underline{x}$ vektornak a $H$ altérrel bezárt szöge?*

*Megoldás.* Az előző feladat megoldásának jelöléseivel a távolságot az $\underline{x}'' = \underline{x} - \underline{x}'$ vektor normája adja, a keresett szög pedig az $\underline{x}$ és az $\underline{x}'$ által bezárt szög.

1. $\underline{x}'' = (-3, 7, 2) - (1, 4, 4) = (-4, 3, -2)$ és $||\underline{x}''|| = \sqrt{29}$. Az altérrel bezárt $\alpha$ szög:
$$\alpha = \arccos \frac{(\underline{x}, \underline{x}')}{||\underline{x}|| ||\underline{x}'||} = \frac{33}{\sqrt{62}\sqrt{33}},$$
vagy másképpen a derékszögű háromszög segítségével
$$\alpha = \arccos \frac{||\underline{x}'||}{||\underline{x}||} = \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{62}}.$$
2. $\underline{x}'' = (-3, 5, 2)$ és $||\underline{x}''|| = \sqrt{38}$, $\cos\alpha = \sqrt{56}/\sqrt{94}$.
3. $\underline{x}'' = (0, 0, 0, 0)$ és $||\underline{x}''|| = 0$, mert az $\underline{x}$ vektor eleme az altérnek. Természetesen $\alpha = 0$.

**2.39. Feladat.** *Mennyi az $\underline{x} = (4, -3, 8)$ vektor távolsága attól a síktól, amelynek egyenlete $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6$?*

*Megoldás.*

1. A sík normálvektora $\underline{n} = (1, -2, 3)$. Keressük azon $\underline{x}' = (x_1, x_2, x_3)$ pontját a síknak, amire teljesül, hogy $\underline{x}' + \alpha\underline{n} = \underline{x}$ valamilyen $\alpha$ valós szám esetén (tehát szemléletesen $\underline{x}'$ az $\underline{x}$ pontból a síkra állított merőleges egyenes metszéspontja a síkkal.) Tehát
$$(x_1, x_2, x_3) + \alpha(1, -2, 3) = (4, -3, 8),$$
innen $x_1 = 4 - \alpha$, $x_2 = -3 + 2\alpha$, $x_3 = 8 - 3\alpha$. Mivel $\underline{x}'$ teljesíti a sík egyenletét $\alpha = 2$ adódik, és a keresett távolság $||2\underline{n}|| = \sqrt{56}$.
2. Másik lehetőség, hogy visszavezetjük a feladatot egy altértől vett távolság meghatározására. A sík egy reprezentánsvektora például az $\underline{r} = (0, 0, 2)$ vektor. A keresett távolság megegyezik az $\underline{x} - \underline{r}$ vektornak a $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ egyenletű síktól vett távolságával, ez pedig már altér.

# 3. Euklideszi terek lineáris operátorai

**2.40. Feladat.** *A $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris operátor mátrixa a természetes bázisra vonatkozóan $A$. Mi a $\varphi^*$ adjungált operátor mátrixa?*

*Megoldás.* $\varphi^*$ mátrixa $A^\top$, hiszen
$$(A\underline{x}, \underline{y}) = (\varphi(\underline{x}), \underline{y}) \doteq (\underline{x}, \varphi^*(\underline{y})) = (\underline{x}, A^*\underline{y})$$

teljesül minden $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$ esetén. A kanonikus belső szorzat esetén $(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a}^\top \underline{b}$, így

$$(A\underline{x})^\top \underline{y} = \underline{x}^\top A^\top \underline{y} = \underline{x}^\top A^* \underline{y},$$

azaz $A^* = A^\top$. (Ez az összefüggés tetszőleges ortonormált bázis esetén teljesül, ekkor ugyanis a belső szorzás mátrixa az $E$ egységmátrix.)

**2.41. Feladat.** *A $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris operátorok mátrixa a természetes bázisra vonatkozóan $A$ illetve $B$, és $\varphi_1$ önadjungált operátor, $\varphi_2$ pedig ortogonális operátor. Az alábbi állítások közül melyek igazak, és melyek hamisak?*

1. *$A$ szimmetrikus.*
2. *$B$ szimmetrikus.*
3. *$B^{-1} = B^\top$.*
4. *$\det B = 1$.*
5. *$A$ nem lehet ortogonális mátrix.*
6. *$\varphi_1$ minden sajátértéke valós.*
7. *$\varphi_2$-nek van valós sajátértéke.*
8. *$\varphi_1$ sajátvektorai egymásra merőlegesek.*
9. *$B$ oszlopvektorai egymásra merőlegesek.*
10. *$A$ diagonalizálható mátrix.*
11. *$B$ diagonalizálható mátrix.*
12. *$\underline{x}$ és $B\underline{x}$ normája megegyezik.*

*Megoldás.*

1. Igaz.
2. Nem feltétlenül igaz, például az $\mathbb{R}^2$-beli origó körüli forgatás mátrixa:
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$
3. Igaz.
4. Nem igaz. Az állítás helyesen: $\det B = +1$ vagy $-1$.
5. De lehet. Például az identikus transzformáció mátrixa (az egységmátrix) szimmetrikus és ortogonális is.
6. Igaz.
7. Nem igaz. Például az $\mathbb{R}^2$-beli origó körüli forgatásnak nincs valós sajátértéke.
8. Nem igaz. Helyesen: $\varphi_1$ különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai merőlegesek egymásra.
9. Igaz. Sőt, egységhosszúak is, és ugyanez igaz sorvektoraira is.
10. Igaz.
11. Nem feltétlenül igaz.

12. Igaz.

**2.42. Feladat.** *Írjuk fel a $\varphi$ lineáris operátor természetes bázisra vonatkozó mátrixát. Állapítsuk meg, hogy $\varphi$ önadjungált illetve ortogonális operátor-e!*

1. *$\varphi$ az $\mathbb{R}^2$-beli $y$ tengelyre tükrözés,*
2. *$\varphi$ az $\mathbb{R}^3$-beli origóra tükrözés,*
3. *$\varphi$ az $\mathbb{R}^3$-beli $[x, y]$-síkra való merőleges vetítés,*
4. *$\varphi$ az $\mathbb{R}^2$-beli origó körüli $\alpha$ szögű forgatás,*
5. *$\varphi$ az $\mathbb{R}^2$-beli origó középpontú háromszoros nagyítás.*

*Megoldás.* Az önadjungált operátorok mátrixa ortonormált bázisban szimmetrikus, az ortogonális operátorok mátrixa pedig ortogonális mátrix, azaz sorai (oszlopai) egymásra merőleges egységvektorok.

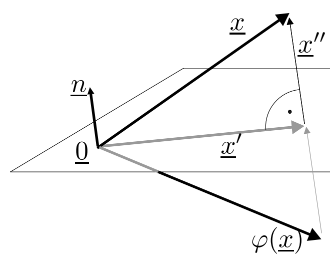
1. A transzformáció mátrixa oszlopaiban tartalmazza a bázisvektorok képének koordinátáit: Mivel $\varphi(1, 0) = (-1, 0)$ és $\varphi(0, 1) = (0, 1)$, így a keresett mátrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ez az operátor önadjungált is és ortogonális is. A mátrix diagonális, a természetes bázis itt sajátvektorokból álló orotonormált bázis is egyben.
2. Az operátor mátrixa:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
önadjungált és ortogonális is.
3. Az operátor mátrixa:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
tehát önadjungált operátor, de nem ortogonális.
4. Most $\varphi$ mátrixa
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$
ez ortogonális mátrix. Valóban, sorvektorai egységhosszúak $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ miatt, és merőlegesek egymásra, mert belső szorzatuk nulla.
5. Mivel az operátor mátrixa
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

így ez szimmetrikus, de nem ortogonális transzformáció.

**2.43. Feladat.** *Írjuk fel a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris operátor mátrixát, ha $\varphi$ az $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ egyenletű síkra való tükrözés. Önadjungált illetve ortogonális-e ez az operátor?*

*Megoldás.* Az ortogonális felbontás szerint $\underline{x} = \underline{x}' + \underline{x}''$, ahol $\underline{x}'$ az $\underline{x}$ merőleges vetülete a síkra, $\underline{x}''$ pedig az $\underline{x}$ merőleges vetülete az $\underline{n}$ irányú egyenesre, ahol $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$ a sík normál-egységvektora. A 2.23 feladat alapján $\underline{x}'' = (\underline{x}, \underline{n})\underline{n}$, így

$$\varphi(\underline{x}) = \underline{x} - 2\underline{x}'' = \underline{x} - 2(\underline{x}, \underline{n})\underline{n}.$$




Innen

$$\begin{aligned}
\varphi(1,0,0) &= (1,0,0) - 2\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1) = (2/3, -2/3, -1/3),\\
\varphi(0,1,0) &= (0,1,0) - \frac{2}{3}(1,2,1) = (-2/3, -1/3, -2/3),\\
\varphi(0,0,1) &= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,2,1) = (-1/3, -2/3, 2/3),
\end{aligned}$$

így az operátor mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

tehát ez egy szimmetrikus és ortogonális operátor.

**2.44. Feladat.** *Írjuk fel a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris operátor mátrixát, ha $\varphi$ az $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ egyenletű síkra való merőleges vetítés. Önadjungált illetve ortogonális-e ez az operátor?*

*Megoldás.* Az előző feladat jelöléseivel:

$$\varphi(\underline{x}) = \underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}'' = \underline{x} - (\underline{x}, \underline{n})\underline{n},$$

ahol $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,-3)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\varphi(1,0,0) &= (1,0,0) - \frac{1}{11}(1,1,-3) = (10/11, -1/11, 3/11),\\
\varphi(0,1,0) &= (0,1,0) - \frac{1}{11}(1,1,-3) = (-1/11, 10/11, 3/11),\\
\varphi(0,0,1) &= (0,0,1) - \frac{-}{3}11(1,1,-3) = (3/11, 3/11, 2/11),
\end{aligned}$$

és a keresett mátrix

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -1 & 3\\ -1 & 10 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Ez egy önadjungált operátor.

**2.45. Feladat.** *Diagonalizáljuk a $\varphi$ önadjungált operátor mátrixát, és adjuk meg azt az ortonormált bázist, amelyben $\varphi$ mátrixa diagonális alakú, ha $\varphi$ mátrixa a természetes bázisra vonatkozóan*

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix} \qquad (5)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad (6)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 7 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

*Megoldás.* Először a lineáris transzformációknál tanult módon meghatározzuk a leképezés karakterisztikus egyenletét. Ebből megkapjuk a sajátértékeket, majd meghatározzuk a sajátértékekhez tartozó sajátaltereket. Mivel önadjungált operátorokról van szó, minden sajátérték valós, mindig létezik sajátvektorokból álló bázis, sőt, sajátvektorokból álló ortonormált bázis is. Ennek megadásához a kapott sajátvektorokat normáljuk, illetve többdimenziós sajátaltér esetén Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárást alkalmazunk.

1. Határozzuk meg a sajátértékeket:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-4)(\lambda-2),$$

   tehát a sajátértékek a 2 és a 4. A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az alábbi egyenletrendszerből határozhatóak meg:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0\\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned},$$

tehát $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(1,-1)$. A $\lambda = 4$ esetben

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned},$$

tehát $\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}(1,1)$. Látható, hogy a két altér vektorai merőlegesek egymásra, ezen alterekből kell kiválasztani egységhosszú vektorokat. A keresett sajátvektorokból álló ortonormált bázis: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. A bázistranszformáció $S$ mátrixa ekkor ortogonális mátrix, és $S^{-1}AS = S^{\top}AS$ diagonális:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. A karakterisztikus polinom $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, és három különböző sajátérték van: 1,2,3. A sajátértékekhez tartozó sajátalterek egymásra ortogonálisak:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(-1,1,0), \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(0,0,1), \quad \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}(1,1,0),$$

tehát a bázistranszformáció ortogonális mátrixa (ennek oszlopaiban szerepelnek a sajátvektorokból álló ortonormált bázis vektorai):

$$S = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. A karakterisztikus polinom $x^3 - 12x + 16$, a sajátértékek: -4,2,2. A sajátértékekhez tartozó sajátalterek:

$$\mathcal{L}_{-4} = \mathcal{L}(1,0,1), \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}((-1,0,1),(0,1,0)).$$

Mivel itt az $\mathcal{L}_2$ altér generáló vektorai ortogonálisak, rögtön felírhatjuk a sajátvektorokból álló ortonormált bázist:

$$(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),(0,1,0).$$

4. A karakterisztikus polinom $x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, a sajátértékek: 4,1,1. A sajátértékekhez tartozó sajátalterek:

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}(-1,-1,1), \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}((-1,1,0),(1,0,1)).$$

Mivel itt az $\mathcal{L}_1$ altér generáló vektorai nem ortogonálisak, így Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárással meghatározunk egy ortonormált bázist ebben az altérben: $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$. Tehát

$$S = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

5. A karakterisztikus polinom $x^3-3x^2$, a sajátértékek: 3,0,0, a sajátalterek:

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}(1,1,1), \quad \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}((-1,0,1),(-1,1,0)).$$

Mivel itt az $\mathcal{L}_0$ altér generáló vektorai nem ortogonálisak, így Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárással meghatározunk egy ortonormált bázist ebben az altérben: $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$. Tehát

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

6. A karakterisztikus polinom $x^3 - 9x^2 + 14x$, a sajátértékek: 0,7,2. A keresett ortonormált bázis:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), (0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1).$$

**2.46. Feladat.** *Mi a geometriai jelentése annak a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonális operátornak, amelynek valós sajátértékei pontosan:*

(1) $1,1,1$, (2) $1,1,-1$, (3) $1,-1,-1$, (4) $-1,-1,-1$,
(5) $1$, (6) $-1$

*Megoldás.* Ha három valós sajátérték van, akkor létezik ortonormált bázis, melyben $\varphi$ mátrixa diagonális, főátlóban ezen sajátértékekkel.

1. Identikus leképezés.
2. Síkra tükrözés (A bázis három egymásra merőleges sajátvektora közül kettő fix marad, egy ellentétes irányú lesz $\varphi$ hatására).
3. Egyenesre tükrözés.
4. Origóra tükrözés.
5. Csak egy valós sajátérték van (és az 1), így ez egy tengely körüli forgatás.
6. Forgatva tükrözés.

**2.47. Feladat.** *Mi a geometria jelentése a $\varphi$ ortogonális operátornak, ha a természetes bázisra vonatkozó mátrixa:*

(1) $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

*Megoldás.*

1. Ez a mátrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ alakú, ahol $\alpha = 60°$, tehát ez egy origó körüli $\alpha$ szögű forgatás.
2. Határozzuk meg a mátrix karakterisztikus polinomját és a sajátértékeket: $x^3-x^2-x+1$, illetve $-1, 1, 1$. Ez tehát egy síkra tükrözés. Megkaphatjuk a sík normálvektorát, ha meghatározzuk a $-1$-hez tartozó sajátvektorokat: $\mathcal{L}_{-1} = (1, -2, 1)$, tehát $\varphi$ az $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ egyenletű síkra tükrözés. (Az 1-hez tartozó sajátalteret éppen ennek a síknak a vektorai adják, ezek $\varphi$ fixpontjai.)
3. A karakterisztikus polinom $x^3-2x^2+2x-1 = (x-1)(x^2-x+1)$, tehát csak egy valós sajátérték van, ez tehát egy tengely körüli forgatás, a tengely vektorait (ezek fixen maradnak) az 1-hez tartozó sajátvektorok adják: $\mathcal{L}_1 = (1, 1, 1)$. Eszerint az invariáns sík egyenlete $x_1+x_2+x_3 = 0$, ebben a síkban $\varphi$ origó körüli forgatásként hat. Mi a forgatás szöge? Az egyszerűség kedvéért vegyünk egy vektort az invariáns síkból, például az $\underline{x} = (0, -1, 1)$-et, és nézzük meg mi lesz a $\varphi$ általi képe:
$$\varphi(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
A forgatás szöge az $\underline{x}$ és $\varphi(\underline{x})$ által bezárt szög: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, tehát $\alpha = 60°$.
4. A karakterisztikus polinom $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$, tehát az egyetlen valós sajátérték $-1$. A leképezés forgatva tükrözés, az invariáns sík normálvektora $(1, 0, 0)$, mert $\mathcal{L}_{-1} = \mathcal{L}(1, 0, 0)$. Tehát az $[y, z]$-síkban forgatásként hat $\varphi$, enne szöge $90°$, hiszen például $\underline{x} = (0, 1, 0)$ esetén $\varphi(\underline{x}) = (0, 0, 1)$. Ha az eredeti mátrixot megfigyeljük, felfedezhetjük benne a $90°$-os forgatás $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixát. A leképezés tehát az $[y, z]$-síkra való tükrözés, és az $x$-tengely körüli $90°$-os forgatás együttese.

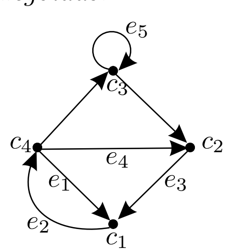
# 3. fejezet
# Gráfelmélet

## 1. Gráfelméleti alapfogalmak

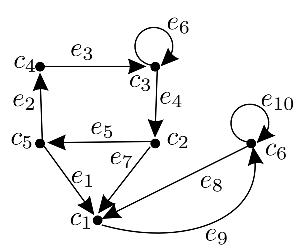
**3.1. Feladat.** *Rajzolja fel a $G = (E, \varphi, C)$ irányított gráfot, ha*

1. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, $\varphi(e_1) = (c_4, c_1)$, $\varphi(e_2) = (c_1, c_4)$, $\varphi(e_3) = (c_2, c_1)$, $\varphi(e_4) = (c_4, c_2)$, $\varphi(e_5) = (c_3, c_3)$.
2. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$, $\varphi(e_1) = (c_5, c_1)$, $\varphi(e_2) = (c_5, c_4)$, $\varphi(e_3) = (c_4, c_3)$, $\varphi(e_4) = (c_3, c_2)$, $\varphi(e_5) = (c_2, c_5)$, $\varphi(e_6) = (c_3, c_3)$, $\varphi(e_7) = (c_2, c_1)$, $\varphi(e_8) = (c_6, c_1)$, $\varphi(e_9) = (c_1, c_6)$, $\varphi(e_{10}) = (c_6, c_6)$.
3. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, \}$, $\varphi(e_1) = (c_2, c_1)$, $\varphi(e_2) = (c_1, c_3)$, $\varphi(e_3) = (c_3, c_2)$, $\varphi(e_4) = (c_1, c_3)$, $\varphi(e_5) = (c_4, c_4)$, $\varphi(e_6) = (c_4, c_4)$.

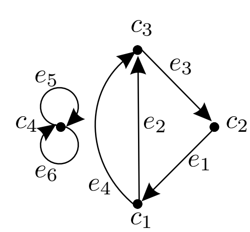
*Megoldás.*



1.



2.



3.

**3.2. Feladat.** *Adja meg a 3.1. feladatban szereplő gráfok csúcsainak ki-fokát és be-fokát.*

*Megoldás.* Egy irányított gráf $c$ csúcsának *ki-foka* azon élek száma, amelyeknek $c$ a kezdőpontja, *be-foka* pedig a csúcsba irányuló élek száma. A ki-fok jele $\delta_{\mathrm{ki}}(c)$, a be-fok jele $\delta_{\mathrm{be}}(c)$.

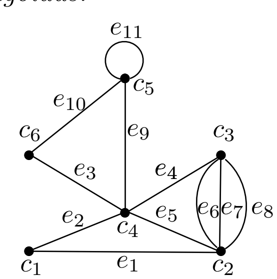
1. $\delta_{\mathrm{ki}}(c_1) = 1$, $\delta_{\mathrm{ki}}(c_2) = 1$, $\delta_{\mathrm{ki}}(c_3) = 2$, $\delta_{\mathrm{ki}}(c_4) = 3$, $\delta_{\mathrm{be}}(c_1) = 2$, $\delta_{\mathrm{be}}(c_2) = 2$, $\delta_{\mathrm{be}}(c_3) = 2$, $\delta_{\mathrm{be}}(c_4) = 1$.

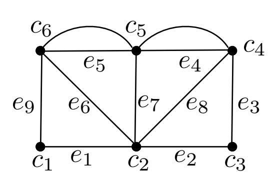
2. $\delta_{\text{ki}}(c_1) = 1$, $\delta_{\text{ki}}(c_2) = 2$, $\delta_{\text{ki}}(c_3) = 2$, $\delta_{\text{ki}}(c_4) = 1$, $\delta_{\text{ki}}(c_5) = 2$, $\delta_{\text{ki}}(c_6) = 2$. $\delta_{\text{be}}(c_1) = 3$, $\delta_{\text{be}}(c_2) = 1$, $\delta_{\text{be}}(c_3) = 2$, $\delta_{\text{be}}(c_4) = 1$, $\delta_{\text{be}}(c_5) = 1$, $\delta_{\text{be}}(c_6) = 2$.
3. $\delta_{\text{ki}}(c_1) = 2$, $\delta_{\text{ki}}(c_2) = 1$, $\delta_{\text{ki}}(c_3) = 1$, $\delta_{\text{ki}}(c_4) = 2$, $\delta_{\text{be}}(c_1) = 1$, $\delta_{\text{be}}(c_2) = 1$, $\delta_{\text{be}}(c_3) = 2$, $\delta_{\text{be}}(c_4) = 2$.

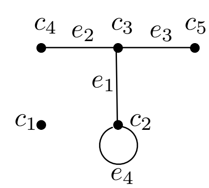
**3.3. Feladat.** *Rajzolja fel a $G = (E, \varphi, C)$ irányítatlan gráfot, ha*

1. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$, $\varphi(e_1) = (c_1, c_2)$, $\varphi(e_2) = (c_1, c_4)$, $\varphi(e_3) = (c_4, c_6)$, $\varphi(e_4) = (c_3, c_4)$, $\varphi(e_5) = (c_2, c_4)$, $\varphi(e_6) = (c_2, c_3)$, $\varphi(e_7) = (c_3, c_2)$, $\varphi(e_8) = (c_2, c_3)$, $\varphi(e_9) = (c_4, c_5)$, $\varphi(e_{10}) = (c_5, c_6)$, $\varphi(e_{11}) = (c_5, c_5)$.
2. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$, $\varphi(e_1) = (c_1, c_2)$, $\varphi(e_2) = (c_2, c_3)$, $\varphi(e_3) = (c_3, c_4)$, $\varphi(e_4) = (c_4, c_5)$, $\varphi(e_5) = (c_5, c_6)$, $\varphi(e_6) = (c_2, c_6)$, $\varphi(e_7) = (c_2, c_5)$, $\varphi(e_8) = (c_2, c_4)$, $\varphi(e_9) = (c_1, c_5)$.
3. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$, $\varphi(e_1) = (c_2, c_3)$, $\varphi(e_2) = (c_3, c_4)$, $\varphi(e_3) = (c_3, c_5)$, $\varphi(e_4) = (c_2, c_2)$.

*Megoldás.*

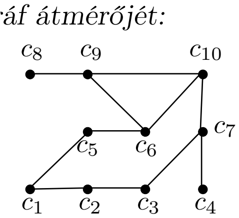


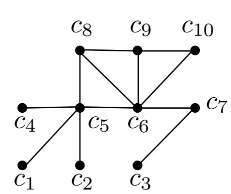


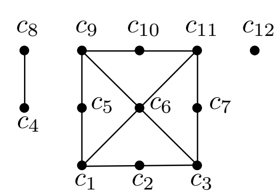



1. 2. 3.

**3.4. Feladat.** *Állapítsa meg az alábbi gráfok csúcsainak fokát, továbbá a gráf átmérőjét:*








1. 2. 3.

*Megoldás.* Egy $G$ gráf $c$ csúcsának fokán a csúcsára illeszkedő élek számát értjük. Jele $\delta(c)$. Egy $G$ gráf átmérője a csúcsok távolságának maximuma, melyet $\operatorname{diam}(G)$-vel jelölünk.

1. $\delta(c_4) = \delta(c_8) = 1$, $\delta(c_1) = \delta(c_2) = \delta(c_3) = \delta(c_5) = 2$, $\delta(c_6) = \delta(c_7) = \delta(c_9) = \delta(c_{10}) = 3$. $\mathrm{diam}(G) = d(c_2, c_8) = 5$.
2. $\delta(c_1) = \delta(c_2) = \delta(c_3) = \delta(c_4) = 1$, $\delta(c_7) = 2$, $\delta(c_8) = \delta(c_9) = \delta(c_{10}) = 3$, $\delta(c_5) = \delta(c_6) = 5$. $\mathrm{diam}(G) = d(c_1, c_3) = d(c_2, c_3) = d(c_4, c_3) = 4$.
3. $\delta(c_12) = 0$, $\delta(c_4) = \delta(c_8) = 1$, $\delta(c_2) = \delta(c_5) = \delta(c_7) = \delta(c_{10}) = 2$, $\delta(c_1) = \delta(c_3) = \delta(c_9) = \delta(c_{11}) = 3$, $\delta(c_5) = 4$. $\mathrm{diam}(G) = \infty$, hiszen például $c_1$ és $c_5$ között nincsen út, így távolságuk végtelen.

**3.5. Feladat.** *Igazoljuk, hogy egy $G$ gráf akkor és csak akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszúságú kört. (Egy gráf páros gráf, ha csúcsait két részre oszthatjuk úgy, hogy a gráf minden éle az egyik részből a másikba vezet, azaz fehér és fekete színnel kiszínezhetőek a csúcsai úgy, hogy minden él két különböző színű csúcsot köt össze.)*

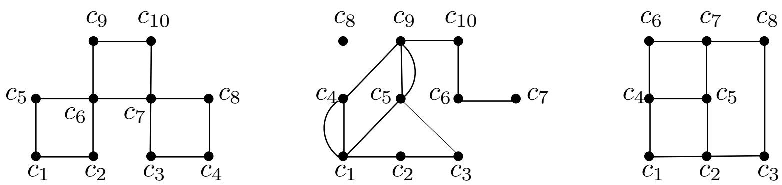
*Megoldás.* Az, hogy páros gráf nem tartalmazhat páratlan hosszúságú kört, nyilvánvaló, hiszen a gráf bármely körének bejárásakor felváltva fordulnak elő a fehér illetve fekete színű csúcsok.

Azt, hogy páratlan hosszúságú kört nem tartalmazó gráf páros, a csúcsok száma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Az állítás nyilvánvalóan igaz $n = 1$ csúcspontú gráfra. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden $n = k$ csúcspontú gráfra ($k \in \mathbb{N}$), ebből látjuk be, hogy teljesül minden $k+1$ csúcspontú gráfra is. Legyen tehát $G$ egy $k+1$ csúcspontból álló gráf, amelyben nincsen páratlan hosszúságú kör. Töröljük $G$-nek egy tetszőlegesen választott $c$ csúcsát a hozzá illeszkedő élekkel együtt. Az így keletkezett $G'$ gráfnak $k$ csúcsa van, továbbá szintén nem tartalmaz páratlan hosszúságú kört, így az indukciós feltevés szerint páros gráf.

Színezzük ki $G'$ csúcsait fehérekre és feketékre a megfelelő módon. Belátjuk, hogy $c$-nek $G'$ ugyanazon $K$ komponensébe eső szomszédai azonos színűek. Indirekt tegyük fel ugyanis, hogy $c$-nek két szomszédja, $s_1$ és $s_2$ a $K$ komponensben vannak, és $s_1$ fehér, $s_2$ pedig fekete. A $K$ komponens összefüggő, így van benne $s_1$-et $s_2$-vel összekötő $L$ út, melynek hossza páratlan, hiszen végpontjai különböző színűek, és $G'$ párossága miatt minden szomszéd különböző színű. Azonban a $(c, s_1)$ és $(c, s_2)$ éleket az $L$ úthoz csatolva $G$-nek egy páratlan hosszúságú körét kapjuk, ez pedig lehetetlen.

Tehát a komponenseket kiszínezhetjük úgy, hogy $c$ minden szomszédja fehér legyen, így $c$-t feketének tekintve a $G$ gráf párosságát kifejező színezést kaptunk. Ezzel az állítást beláttuk.

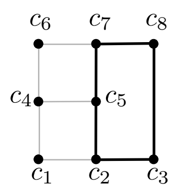
**3.6. Feladat.** *Páros gráfok-e az alábbi gráfok? Ha igen, adjuk meg a csúcsok egy diszjunkt felosztását.*



1. 2. 3.

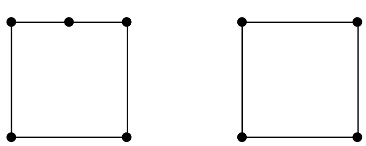
*Megoldás.* A megoldásban felhasználjuk a 3.5. feladatot.

1. Könnyen látható, hogy a gráf körei csak 4, 8 vagy 12 élből állhatnak, így a gráf páros. A csúcsok egy felosztása: $C_1 = \{c_1, c_3, c_6, c_8, c_{10}\}$, $C_2 = \{c_2, c_4, c_5, c_7, c_9\}$.
2. Könnyen látható, hogy a gráf körei csak 2, 4 vagy 6 élből állhatnak, így a gráf páros. A csúcsok egy felosztása: $C_1 = \{c_1, c_3, c_6, c_8, c_9\}$, $C_2 = \{c_2, c_4, c_5, c_7, c_{10}\}$.
3. Az ábrán látható, hogy a gráfnak van páratlan hosszúságú köre:

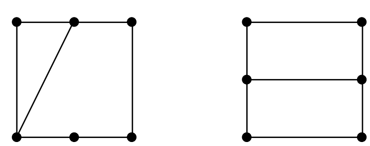



Tehát a gráf nem páros.

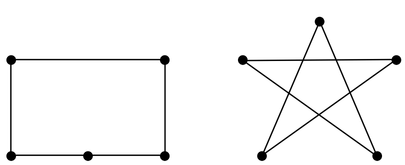
**3.7. Feladat.** *Izomorfak-e az alábbi gráfok? Ha igen, írjuk fel a csúcsok és élek közötti megfeleltetést.*



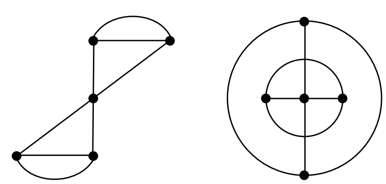
1.



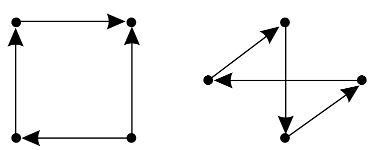
2.



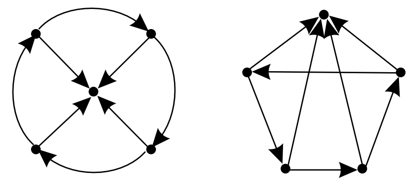
3.



4.



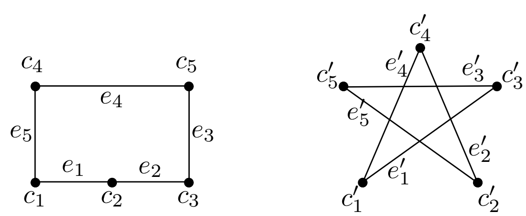
5.



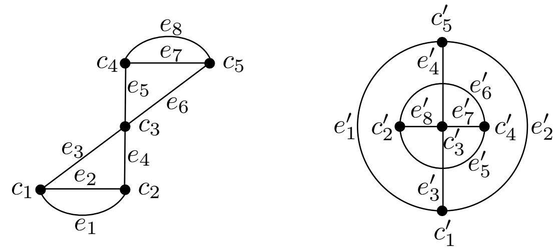
6.

*Megoldás.* A $G = (E, \varphi, C)$ és a $G' = (E', \varphi', C')$ gráf izomorfak, ha léteznek olyan $\alpha : E \to E'$ és $\beta : C \to C'$ bijektív leképezések, melyekre teljesül, hogy tetszőleges, a $c_1$ és $c_2$ csúcsokat összekötő $e$ él $\alpha(e)$ képe a $\beta(c_1)$ és $\beta(c_2)$ csúcsokat köti össze (irányított gráf esetén az irányítottságot is megőrizve, tehát ha az $e$ él a $c_1$ csúcsba mutat, akkor az $\alpha(e)$ él a $\beta(c_1)$ csúcsba mutat). Két gráf izomorfiája szemléletesen azt jelenti, hogy az egyik gráfból a csúcsok elmozgatásával (az éleket tetszőlegesen hajlítva és nyújtva) elő tudom állítani a másikat.

1. A két gráf nem izomorf, hiszen az első gráfnak több csúcspontja van mint a másodiknak, így a csúcspontok között nem adható meg $\beta$ bijektív leképezés.
2. Nyilvánvaló, hogy egy gráf egy $n$ hosszúságú körének az $\alpha$ és $\beta$ leképezések által megfeleltetett, úgynevezett izomorf képe szintén egy $n$ hosszúságú kör. Mivel az első gráfban van 3 hosszúságú kör, csak olyan gráffal lehet izomorf, amiben van 3 hosszúságú kör. Tehát a két gráf nem izomorf.
3. A két gráf izomorf. A csúcsok és élek közötti megfeleltetés felírásához jelöljük el a gráfok csúcsait és éleit:

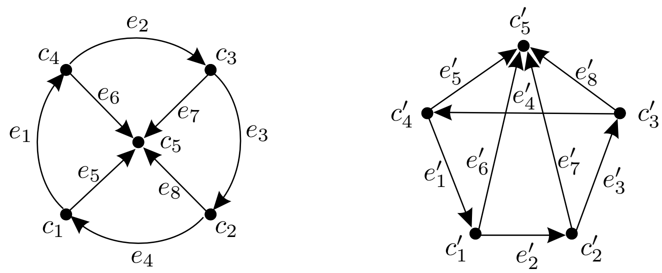
   
   

   Az élek megfeleltetése: $\alpha(e_1) = e'_1$, $\alpha(e_2) = e'_3$, $\alpha(e_3) = e'_5$, $\alpha(e_4) = e'_2$, $\alpha(e_5) = e'_4$. A csúcsok megfeleltetése: $\beta(c_1) = c'_1$, $\beta(c_2) = c'_3$, $\beta(c_3) = c'_5$, $\beta(c_4) = c'_2$, $\beta(c_5) = c'_4$.
4. A két gráf izomorf. A csúcsok és élek közötti megfeleltetés felírásához jelöljük el a gráfok csúcsait és éleit:



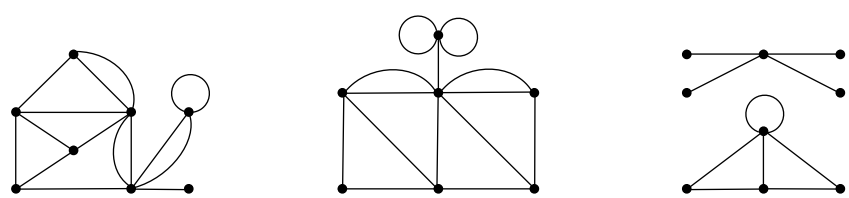
Az élek megfeleltetése: $\alpha(e_1) = e_1'$, $\alpha(e_2) = e_2'$, $\alpha(e_3) = e_3'$, $\alpha(e_4) = e_4'$, $\alpha(e_5) = e_7'$, $\alpha(e_6) = e_8'$, $\alpha(e_7) = e_5'$, $\alpha(e_8) = e_6'$. A csúcsok megfeleltetése: $\beta(c_1) = c_1'$, $\beta(c_2) = c_5'$, $\beta(c_3) = c_3'$, $\beta(c_4) = c_4'$, $\beta(c_5) = c_2'$.

5. A két gráf nem izomorf, hiszen az első gráfnak van olyan csúcsa, amely irányába nem mutat él, míg a másodiknak nincs ilyen csúcsa.
6. A két gráf izomorf. A csúcsok és élek közötti megfeleltetés felírásához jelöljük el a gráfok csúcsait és éleit:



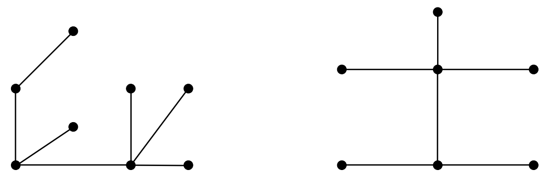
Az élek megfeleltetése: $\alpha(e_1) = e_1'$, $\alpha(e_2) = e_2'$, $\alpha(e_3) = e_3'$, $\alpha(e_4) = e_4'$, $\alpha(e_5) = e_5'$, $\alpha(e_6) = e_6'$, $\alpha(e_7) = e_7'$, $\alpha(e_8) = e_8'$. A csúcsok megfeleltetése: $\beta(c_1) = c_4'$, $\beta(c_2) = c_3'$, $\beta(c_3) = c_2'$, $\beta(c_4) = c_1'$, $\beta(c_5) = c_5'$.

**3.8. Feladat.** *Adja meg az alábbi gráfok egy feszítőfáját:*



1. 2. 3.

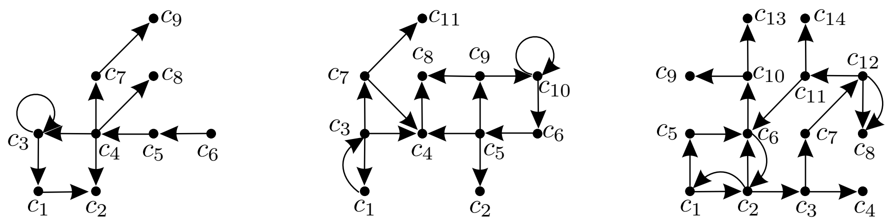
*Megoldás.*



1. 2.

A harmadik gráf nem összefüggő, így nincs feszítőfája.

**3.9. Feladat.** *Adja meg az alábbi irányított gráfok gyökereit:*

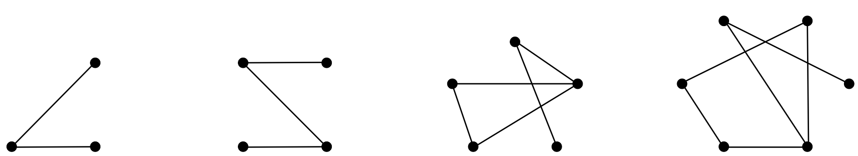



1. 2. 3.

*Megoldás.*

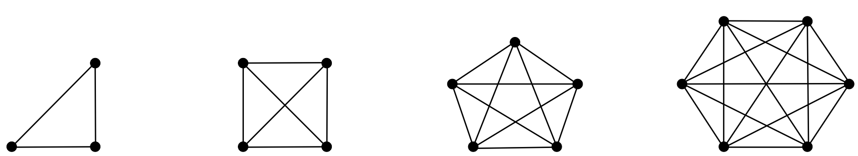
1. A $c_6$ csúcsba nem vezet irányított út, így csak ő lehet gyökér. Könnyű leellenőrizni, hogy belőle mindenhova el lehet jutni, tehát a $c_6$ csúcs az egyetlen gyökér.
2. A gráfnak nincs gyökere.
3. A gráf gyökerei a $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_5$, $c_6$, $c_7$, $c_{11}$, $c_{12}$ csúcsok.

**3.10. Feladat.** *Adjuk meg az alábbi egyszerű gráfok komplementerfáit:*



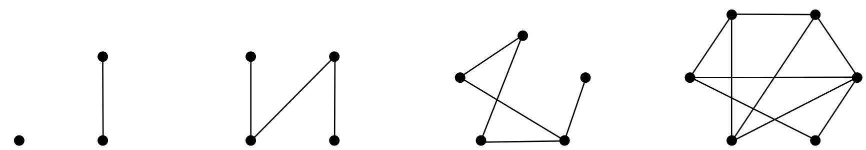
1. 2. 3. 4.

*Megoldás.* A gráfokból alkotható teljes gráfok:



1. 2. 3. 4.

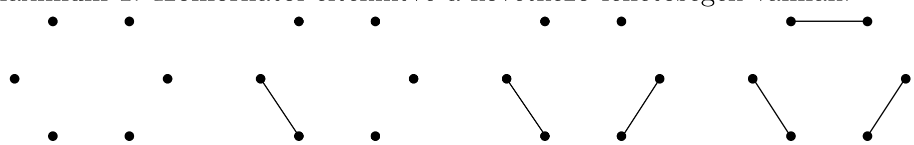
Így a komplementer gráfok:



1. 2. 3. 4.

**3.11. Feladat.** *Hány olyan 6 csúcspontú egyszerű gráf van (izomorfiától eltekintve), amelyben minden pont foka legalább 4?*

*Megoldás.* A feladatnak megfelelő gráfok áttekinthetetlenül sok élt tartalmaznak, azonban komplementereik keveset. Így áttérünk a komplementerek vizsgálatára, és felhasználjuk azt, hogy a keresett gráfok száma nyilvánvalóan megegyezik a komplementereik számával. A teljes 6-gráfban minden pont foka 5, így a keresett gráfok komplementereiben minden csúcs fokszáma maximum 1. Izomorfiától eltekintve a következő lehetőségek vannak:



1. 2. 3. 4.

Tehát összesen 4 féle gráf van, amely a kívánt tulajdonsággal rendelkezik.

**3.12. Feladat.** *Igazoljuk, hogy*

(a) *legalább két csúcsot tartalmazó egyszerű gráfnak van két azonos fokú csúcsa.*
(b) *legalább két csúcsot tartalmazó összefüggő gráfnak kevesebb éle van, mint csúcsa, akkor van a gráfnak elsőfokú csúcsa.*
(c) *$n$ csúcspontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$.*
(d) *amennyiben egy legfeljebb $2n$ csúcspontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább $n$, akkor a gráf összefüggő.*
(e) *ha egy $n$ csúcsú gráfnak legalább $n+1$ éle van, akkor van a gráfnak legalább 3-adfokú pontja.*
(f) *ha egy összefüggő gráf minden csúcsának foka 2, akkor a gráf kör.*
(g) *egy $n$ csúcspontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.*
(h) *ha egy $n$ csúcspontú gráfnak legalább $n$ éle van, akkor van a gráfban kör.*
(i) *egy összefüggő $n$ csúcspontú gráf pontosan akkor fagráf, ha éleinek száma $n-1$.*
(j) *egy $n$ csúcspontú $n$ élű összefüggő gráf pontosan 1 kört tartalmaz.*

*Megoldás.*

(a) Legyen az $n$ csúcsú $G$ gráf egyszerű. Mivel egyszerű gráfban nincsen hurokél és párhuzamos élek, ezért bármely csúcsot csak a többi $n-1$ csúccsal köthet össze maximum egy ál, így a csúcs fokszáma $\leq n-1$. Tehát a fokszámok a következőek lehetnek:

$$0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Azonban, ha $G$-ben van izolált pont, akkor nem lehet $n-1$-edfokú pont, hiszen ez az összes többi ponttal, így az izolált ponttal is szomszédos lenne, amely nem lehetséges. Tehát a következő fokszámok fordulhatnak elő $G$-ben:

$$0, 1, 2, \ldots, n-2 \text{ vagy } 1, 2, 3, \ldots n-1.$$

Mindkét esetben legfeljebb $n-1$ különböző fokszám lehetséges, így a gráf $n$ darab csúcsa közül szükségképpen lesz legalább 2, amelyek fokszáma megegyezik. (Ezt az úgynevezett *skatulyaelv* alapján mondhatjuk: Ha $n-1$-nél több tárgyak $n-1$ dobozba rakunk be, akkor legalább 1 dobozba egynél több tárgyat raktunk.)

(b) Legyen az $n$ csúcsú $G$ gráf összefüggő. Indirekt tegyük fel, hogy $G$-nek nincs elsőfokú csúcsa. Mivel $G$-nek nincsen izolált pontja sem, minden pont foka legalább 2, így a fokszámok összege $\geq 2n$. Ekkor azonban a fokszámok összege legalább $n$, hiszen az élek száma éppen a fokszámok összegének fele. Tehát ellentmondásra jutottunk, melynek oka az indirekt feltevés volt.

(c) A teljes $n$-gráf minden csúcsának foka $n-1$, így a fokszámok összege $n(n-1)$. A kézfogási tétel alapján az élek száma éppen a fokszámok összegének fele, melyből következik az állítás.

(d) Indirekt tegyük fel, hogy a kívánt tulajdonságokkal rendelkező $G$ gráf több komponensből áll. Ekkor van olyan komponens, amelynek nincsen $n$-nél több pontja. Mivel a gráf egyszerű, ebben a komponensben egy csúcs fokszáma maximum $n-1$ lehet, amely ellentmond a feladat fokszám kikötésének.

(e) Ha az $n$ csúcsú $G$ gráf minden pontjának foka legfeljebb 2, akkor $G$-ben a fokszámok összege legfeljebb $2n$, így az élek száma legfeljebb $n$, ellentétben a feladat feltevésével.

(f) A feladat az összefüggőség felhasználásával az élek bejárásából adódik.

(g) Az állítást $n$-szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Az állítás $n=1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén az állítás igaz, azaz minden $k$ csúcsú összefüggő gráfnak van $k-1$ éle.

Legyen $G$ egy $k+1$ csúcspontú összefüggő gráf. Ha $G$-nek nincsen $k+1$ éle, akkor a feladat $(b)$ része alapján van elsőfokú pontja. Egy ilyen pontot a hozzá illeszkedő éllel törölve egy $k$ csúcspontú összefüggő gráfot kapunk, amelynek indukciós feltevésünk szerint van $k-1$ éle, ami a törölt éllel együtt adja, hogy $G$-nek van $k$ éle. Ezzel az állítást beláttuk.

(h) Az állítást $n$-szerinti teljes indukcióval igazoljuk. $n = 1$-re az állítás nyilvánvalóan teljesül. Tegyük fel, hogy valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén az állítás igaz, azaz minden $k$ pontú és legalább $k$ élű gráfban van kör.

Legyen $G$ egy $k+1$ élű gráf, melyben legalább $k+1$ él van. A feladat igazolásához azt kell tehát belátni, hogy $G$ tartalmaz kört. Tekintsünk $G$-ben egy $L$ leghosszabb utat (olyan utat, amelyben az élek száma maximális).

Ha az $L$ út valamely $c_1$ végpontja $G$-nek nem elsőfokú útja, akkor máris adódik, hogy $G$-ben van kör. Ugyanis ha veszünk egy olyan $c_1$ végpontú $e$ élt, amely nincs benne az $L$ útban, annak másik, $c_2$ végpontja szükségképpen olyan csúcs, amelyen az $L$ út áthalad, hiszen ellenkező esetben az $L$ utat növelni tudnánk az $e$ éllel, amely ellentmondana $L$ maximalitásának. Így az $L$ út $c_1$-ből $c_2$-be vezető része kiegészítve az $e$ éllel egy kört alkot.

Ha $L$ végpontjai elsőfokúak, akkor töröljük $G$-nek valamely elsőfokú csúcsát a hozzá tartozó éllel együtt. Az így kapott gráfnak $k$ pontja van és legalább $k$ éle, amely az indukciós állítás szerint tartamaz kört. Ez a kör azonban benne van $G$-ben is, mellyel az állítást beláttuk.

(i) Az állítás a feladat $(g)$ és $(h)$ részének következménye.

(j) A feladat $(h)$ része szerint a gráfunk tartalmaz kört. Jelöljünk el egy kört $K$-val. Nyilvánvaló, hogy ha a gráfból kiveszünk egy olyan élt, mely benne van $K$-ban, az összefüggőséget nem rontjuk el. Tehát az így kapott összefüggő $n$ csúcsú gráfnak $n-1$ éle van, amely a feladat $(i)$ része alapján fa, azaz nem tartalmaz kört. A fentiekből már adódik, hogy a gráfnak csak egy köre van, $K$.

**3.13. Feladat.** *Egy társaság bizonyos tagjai kézfogással köszöntötték egymást. Bizonyítsuk be, hogy páros azoknak a száma, akik páratlan sok emberrel fogtak kezet.*

*Megoldás.* Képezzünk egy gráfot, amelynek pontjai a társaság tagjainak felelnek meg, a gráf egy éle pedig jelentse azt, hogy a végpontjainak megfelelő emberek kezet fogtak egymással. Nyilván egy ember annyi emberrel fogott kezet, ahány él illeszkedik a neki megfelelő csúcsra, ami nem más, mint a csúcs fokszáma. Azt kell tehát bizonyítanunk a feladat állításának belátásához, hogy a gráf páratlan fokszámú csúcsainak száma páros, amely a kézfogási tétel következménye.

**3.14. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan* 7 *tagú társaság, ahol rendre* $5, 5, 5, 4, 3, 1, 1$ *ismerőse van az embereknek.*

*Megoldás.* A feladatnak megfelelő gráf csúcsai jelöljék a társaság tagjait. Két csúcs akkor legyen összekötve, ha a megfelelő tagok ismerik egymást. Tehát azt kell bebizonyítanunk, hogy nincs olyan egyszerű gráf, amely csúcsainak fokszáma rendre $5, 5, 5, 4, 3, 1, 1$. Belátjuk, hogy az olyan 7 csúcspontból álló gráfokban, melyekben 5 fokszámú csúcsokból 3 van, maximum 1 darab elsőfokú csúcs lehetséges. Legyenek ugyanis az 5 fokszámú csúcsok $c_1$, $c_2$ és $c_3$. Ezen csúcsok mindegyike a gráfnak csak 1 csúcsával nem szomszédos. Indirekt tegyük fel, hogy két darab első fokú csúcs van, $s_1$ és $s_2$. Mivel $\delta(c_1) = 5$, ezért $c_1$ az $s_1$ és $s_2$ csúcsok valamelyikével szomszédos. Legyen ez a csúcs az $s_1$. $c_2$ szintén szomszédos $s_1$ és $s_2$ valamelyikével, de ez csak $s_2$ lehet, hiszen $\delta(s_1) = 1$ és $s_1$ szomszédos $c_1$-gyel. Viszont $c_3$ is szomszédos $s_1$ és $s_2$ valamelyikével, amely lehetetlen. Ezzel az állítást beláttuk.

**3.15. Feladat.** *Egy sakkversenyen bármely két játékos legfeljebb egyszer játszott egymással. Bizonyítsuk be, hogy a verseny bármely pillanatában volt két versenyző, akik addig ugyanannyi mérkőzést játszottak le.*

*Megoldás.* A feladatnak megfelelő gráf csúcsai jelöljék a játékosokat. Két csúcs akkor legyen összekötve, ha a megfelelő játékosok játszottak egymással. Látható, hogy a feladat a 3.12. feladat ($a$) részével azonos.

**3.16. Feladat.** *Egy futball bajnokságon $n$ csapat vett részt, és mindenki játszott mindenkivel. Hány mérkőzés volt összesen?*

*Megoldás.* A feladatnak megfelelő gráf csúcsai jelöljék a csapatokat, két csúcs akkor legyen összekötve, ha a megfelelő csapatok játszottak egymással. A kérdés tehát az, hogy az $n$ csúcspontú teljes gráfunknak hány éle van, amely a 3.12. feladat ($c$) része alapján $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

**3.17. Feladat.** *Egy futball bajnokságban* 18 *csapat vesz részt. Minden hétvégén lezajlik egy forduló, amelyben valamilyen párosításban kilenc mérkőzést rendeznek. Igazoljuk, hogy* 8 *forduló után van legalább* 3 *olyan csapat, amelyek egyáltalán nem játszottak még egymással.*

*Megoldás.* Rendeljük azt a gráfot a feladathoz, melynek csúcsai a csapatokat reprezentálják, továbbá két csúcs akkor van összekötve, ha a csapatok már játszottak egymással. A feladat tehát három olyan csúcs keresése, amelyek egyike sem szomszédos a másik kettővel. Legyen $c$ egy tetszőleges csúcs, és legyenek $c_1, c_2, \ldots, c_9$ azok a csúcsok, amelyekkel nem szomszédos.

Belátjuk, hogy ezen kilenc csúcs között van 2 olyan, amelyeket egymással nem köt össze él, tehát a $c$ csúcs és ezen két csúcs a kívánt tulajdonságúak.

Indirekt tegyük fel, hogy nincs két olyan csúcs a $c_1, c_2, \ldots, c_9$ pontok között, amelyek egymással nem szomszédosak, tehát a gráfban ez a 9 csúcs egy különálló, 9-szögpontú teljes gráfot alkot. (Azért mondhatjuk, hogy különálló, mert tudjuk, hogy a gráfban minden csúcs foka pontosan 8.) Ez azt jelenti, hogy ez a 9 csapat nem játszott meccset a többi csapattal, ami lehetetlen, hiszen egy adott fordulóban mindenki pályára lép, és a 9 csapatot lehetetlen egymás között párosítani. Ezzel az állítást beláttuk.

**3.18. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy ha $2n$ számú telefonközpont mindegyikének van a többiek közül legalább $n$-nel közvetlen összeköttetése, akkor bármely két központ között létesíthető telefonkapcsolat.*

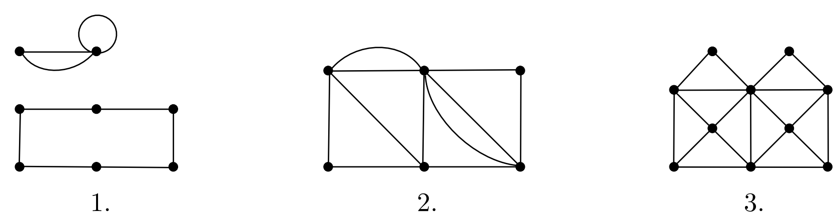
*Megoldás.* Legyen $G$ olyan gráf, melynek csúcsai a telefonközpontoknak felelnek meg, két csúcs pedig akkor van összekötve, ha a megfelelő központoknak van egymással közvetlen kapcsolata. Így megfogalmazva, a feladat a 3.12. feladat ($d$) részével azonos.

**3.19. Feladat.** *Egy kosárlabda bajnokságra $n$ csapat nevezett be. Eddig $n+1$ mérkőzés zajlott le. Igazoljuk, hogy van olyan csapat, amely legalább 3 mérkőzést játszott.*

*Megoldás.* A feladat a 3.12. feladat ($e$) részének következménye.

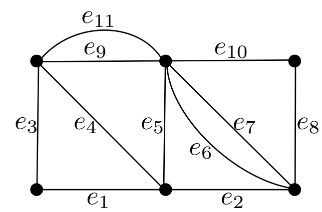
## 2. Euler-kör, Euler-vonal, Hamilton-kör

**3.20. Feladat.** *Euler gráfok-e az alábbi gráfok? Ha igen, adjuk meg egy zárt Euler-vonalukat.*




*Megoldás.* Felhasználjuk azt a tételt, miszerint egy gráf akkor és csak akkor Euler-gráf, ha összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

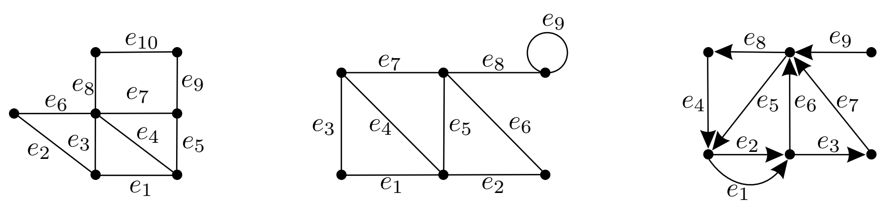
1. A gráf nem összefüggő, így nem Euler-gráf.
2. A gráf összefüggő, továbbá minden csúcsának foka páros, így Euler-gráf. Egy zárt Euler-vonal megadásához jelöljük el a gráf éleit:




A gráf egy zárt Euler-vonala: $\{e_1, e_2, e_8, e_{10}, e_7, e_6, e_5, e_4, e_9, e_{11}, e_3\}$.

3. A gráf nem Euler-gráf, hiszen van páratlan fokszámú csúcsa.

**3.21. Feladat.** *Írja fel az alábbi gráfok egy Euler-vonalát. Hány Euler-vonala van a gráfoknak?*



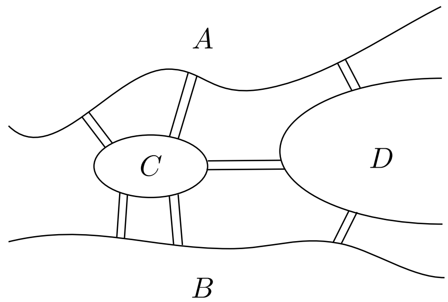

1. 2. 3.

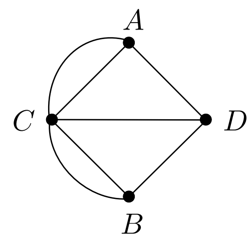
*Megoldás.* A feladatban felhasználjuk, hogy amennyiben egy gráfnak van Euler-vonala, akkor csak az Euler-vonalban szereplő első és az utolsó csúcs fokszáma lehet páratlan, hiszen a többi csúcs esetén, ha oda "bemegy" a vonal, akkor onnan tovább is kell mennie.

1. A gráfnak 4 darab páratlan fokszámú csúcsa van, így nem létezik Euler-vonala.
2. A gráf egy Euler-vonalának első és utolsó csúcsa csak a gráf bal felső vagy jobb felső csúcsa lehet, hiszen ezek fokszáma páratlan. Nyilvánvalóan irányítatlan gráf esetén, ha egy Euler-vonal éleinek sorrendjét megfordítjuk, akkor ismét Euler-vonalat kapunk, így ha felírjuk az összes jobb felső csúcsból kiindulót, azok éleinek sorrendjét megfordítva megkapjuk a bal felső csúcsból kiindulókat is. A jobb felső csúcsból a bal felső csúcsba 16 Euler-vonal húzható, tehát a gráfnak összesen 32 darab Euler-vonala van. Pár példa: $\{e_9, e_8, e_7, e_3, e_1, e_2, e_6, e_5, e_4\}$, $\{e_9, e_8, e_5, e_2, e_6, e_7, e_4, e_1, e_3\}$, $\{e_9, e_8, e_6, e_2, e_4, e_3, e_1, e_5, e_7\}$.
3. Természetesen definiálható irányított gráfok esetén is az Euler-vonal, ekkor az élek irányítottsága nyilván korlátozza a lehetőségeket. A gráf Euler-vonalainak kezdő csúcsa a jobb felső csúcs, hiszen oda nem vezet él. Befejező csúcsa pedig szükségképpen az $e_9$ él végpontja, mivel annak fokszáma páratlan. A gráfnak 8 darab Euler-vonala van, például: $\{e_9, e_8, e_4, e_2, e_6, e_5, e_1, e_3, e_7\}$, $\{e_9, e_5, e_1, e_3, e_7, e_8, e_4, e_2, e_6\}$.

**3.22. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy a nevezetes königsbergi hét híd mindegyikén pontosan egyszer áthaladó sétaút nem létezik.*

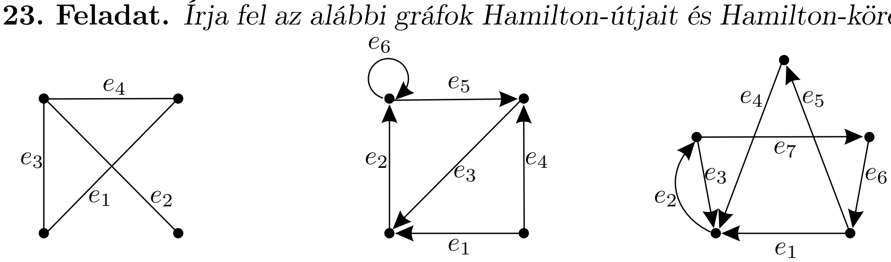
*Megoldás.* A feladathoz elkészítünk egy gráfot a következőképpen: feleltessünk meg a folyó két partjának és a szigeteknek a gráf egy-egy csúcsát, és legyenek az összekötő élek az egyes hidaknak megfelelőek:




A feladat tehát egyenértékű a gráfunk egy Euler-vonalának megkeresésével. Azonban a gráfnak mind a négy csúcsa páratlan fokszámú, így az előző feladatban leírtak miatt nincsen Euler-vonala.

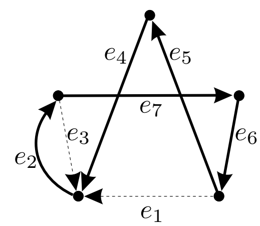
**3.23. Feladat.** *Írja fel az alábbi gráfok Hamilton-útjait és Hamilton-köreit:*




1. 2. 3.

*Megoldás.*

1. A gráf Hamilton-útjai: $\{e_2, e_4, e_1\}$, $\{e_2, e_3, e_1\}$,$\{e_1, e_4, e_2\}$, $\{e_1, e_3, e_2\}$. Hamilton-köre nem létezik a gráfnak, hiszen a jobb alsó csúcs fokszáma 1, így nem lehet tagja egy körnek sem.
2. Irányított gráfok esetén a Hamilton-út és Hamilton-kör definíciója analóg az irányítatlan gráfos definícióval, azonban az élek irányítottsága miatt az utak és körök száma kevesebb. A gráf bal alsó csúcsába nem mutat él, így a Hamilton-utak csak onnan indulhatnak. Két Hamilton-út van: $\{e_1, e_2, e_5\}$, $\{e_4, e_3, e_2\}$. Hamilton-köre viszont nincs a gráfnak, hiszen a jobb alsó csúcsba nem vezet él, így ez a csúcs nem szerepelhet körben.
3. A gráf Hamilton-útjai: $\{e_5, e_4, e_2, e_7\}$, $\{e_4, e_2, e_7, e_6\}$, $\{e_2, e_7, e_6, e_5\}$, $\{e_7, e_6, e_5, e_4\}$, $\{e_6, e_5, e_4, e_2\}$.
   A gráfnak van Hamilton-köre is, az $\{e_5, e_4, e_2, e_7, e_6\}$ élsorozat:




**3.24. Feladat.** *Igazoljuk, hogy*

*(a) ha a $G$ összefüggő gráfból $k$ számú pontjának a hozzájuk illeszkedő élekkel együtt való törlése révén keletkezett $k$-nál több komponensű, akkor $G$-nek nincs Hamilton köre. Továbbá, ha e törlés révén $k+1$-nél több komponensből álló gráfot nyerünk, akkor $G$-nek nincsen Hamilton-útja sem.*

*(b) ha egy $G$ egyszerű gráfban minden csúcspont foka legalább $k \geq 2$, akkor van a gráfban egy legalább $k+1$ hosszúságú kör.*

*(c) ha a $G$ összefüggő gráf $G'$ részgráfja nem tartalmazza $G$ minden pontját, akkor van $G$-nek olyan $G'$-be nem tartozó éle, amelynek egyik végpontja $G'$-beli, a másik nem.*

*(d) ha egy $G$ összefüggő gráf $K$ köréből egy élt törölve, a gráf egy $L$ leghosszabb útját kapjuk, akkor $K$ Hamilton-köre a gráfnak.*

*(e) ha egy $n$ csúcsú $G$ egyszerű gráf egy $L$ leghosszabb útja két végpontjának fokszám összege legalább $n$, akkor van a gráf leghosszabb útjai között olyan, amelynek végpontjai szomszédosak.*

*(f) ha egy $n$ csúcspontú ($n \geq 3$) $G$ egyszerű gráf bármely két nem szomszédos pontjának fokszám összege legalább $n$, akkor van a gráfnak Hamilton-köre* **(Ore tétele)**.

*(g) ha egy $n$ csúcspontú ($n \geq 3$) $G$ egyszerű gráf minden csúcsának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor van a gráfnak Hamilton-köre* **(Dirac tétele)**.

*Megoldás.*

(a) Egy összefüggő gráf $k$ számú csúcsát törölve a gráf bármely köre legfeljebb $k$ komponensre, útjai pedig legfeljebb $k+1$ komponensre esnek szét. Mivel a Hamilton-kör illetve Hamilton-út tartalmazza a gráf minden pontját, adódik az állítás.

(b) Legyen $L$ egy leghosszabb út $G$-ben. Jelöljük $L$ csúcsait sorrendben $c_1, c_2, \ldots, c_l$-lel. A $c_1$ csúcs minden szomszédja $L$-ben van, hiszen $L$ leghosszabb út. De $c_1$-nek legalább $k$ szomszédja van, így van olyan $c_j$ szomszédja is, melyre $j \geq k+1$. Ekkor azonban $L$-nek a $c_1$ és $c_j$ közötti részútja a $(c_1, c_j)$ éllel kiegészítve egy $k$-nál hosszabb kört alkot.

(c) Legyen $c_1$ $G$-nek egy $G'$-beli, $c_2$ pedig egy nem $G'$-beli pontja. $c_1$-ből vezet egy $L$ út $c_2$-be, hiszen $G$ összefüggő. A $c_1$ pontból kiindulva haladjunk $L$ élein addig, amíg $G'$-be kerülünk. Nyilván az utoljára bejárt él a kívánt tulajdonságú.

(d) Amennyiben $K$ nem tartalmazza $G$ minden pontját, akkor a feladat $(c)$ állítása szerint van olyan $e = (c_1, c_2)$ él, amelynél $c_1$ $K$-beli, $c_2$ pedig nem $K$-beli. Ha a $K$ élei közül elhagyunk egy $c_1$-hez illeszkedőt és hozzávesszük $e$-t, akkor egy olyan utat kapunk, amely az $L$ út hosszánál nagyobb, amely ellentmond annak, hogy $L$ leghosszabb út. Így $K$ áthalad $G$ minden pontján, azaz Hamilton-kör.

(e) Jelöljük $L$ csúcsait sorrendben $c_1, c_2, \ldots, c_l$-lel. Legyen

$$A := \{c \mid c \text{ a } G \text{ olyan csúcsa, mely nem szomszédos } c_l\text{-el}\}$$

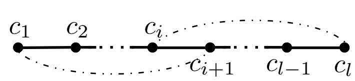
és

$$B := \big\{c_k \mid c_{k+1} \text{ szomszédja } c_1\text{-nek } (k \in \{1, 2, \ldots l-1\})\big\}.$$

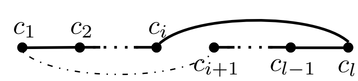
A feladat feltétele szerint $\delta(c_1) + \delta(c_l) \geq n$, azaz $\delta(c_l) \geq n - \delta(c_1)$. Tehát $c_l$ $G$-nek legfeljebb $\delta(c_1)$ számú csúcsával nem szomszédos, azaz $|A| \leq \delta(c_1)$, továbbá $c_l \in A$.

A $c_1$ csúcs minden szomszédja $L$-ben van, hiszen $L$ leghosszabb út. Ezért $|B| = \delta(c_1)$ és $c_l \notin B$, hiszen $c_l$ az utolsó csúcs a sorozatban, így nem lehet $c_1$ egy szomszédja előtt.

A fentiek alapján van olyan eleme $B$-nek, amely nincs benne $A$-ban. Legyen ez a csúcs a $c_i$ csúcs ($c_i \in \{1, 2, \ldots l-1\}$). Tehát $c_i$ olyan szomszédja $c_l$-nek, amelynek az $L$ útban lévő $c_{i+1}$ szomszédja a $c_1$-nek is szomszédja. Ezért, ha az $L$ útból elhagyjuk a $(c_i, c_{i+1})$ élt és hozzávesszük a $(c_i, c_l)$ élt, akkor a kívánt utat állítottuk elő, azaz olyan $l$ hosszúságú (így leghosszabb) $L'$ utat, amelynek végpontjai szomszédosak. Az elmondottakat a következő ábra szemlélteti:



$L$

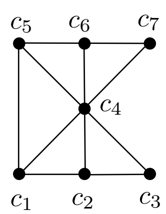


$L'$

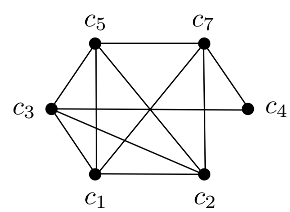
(f) Ha $G$ nem volna összefüggő, akkor különböző komponensbe tartozó két pontja nem lenne szomszédos és nem lenne olyan csúcs sem, amelybe mindkét csúcsból él vezet, így az ilyenek fokszám összege legfeljebb $n-2$ lenne, amely ellent mondana a feltevésünknek. Tehát $G$ összefüggő. Jelöljük $L$-lel $G$ egy leghosszabb útját. Ha $L$ végpontjai szomszédosak, akkor a feladat $(d)$ része szerint van $G$-nek Hamilton-köre (az $L$ út és az út végpontjait összekötő él). Ha $L$ végpontjai nem szomszédosak, akkor ezek fokszám összege legalább $n$, így a feladat $(e)$ része szerint van olyan leghosszabb út $G$-ben, amelynek végpontjai szomszédosak, amiből a $(d)$ rész miatt ismét adódik, hogy van a gráfnak Hamilton-köre.

(g) Az állítás a feladat $(f)$ részéből azonnal adódik.

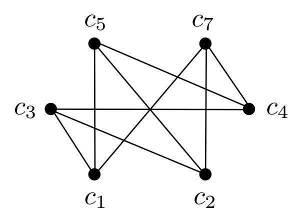
**3.25. Feladat.** *Állapítsuk meg, teljesítik-e az alábbi gráfok Ore és Dirac tételét, továbbá amennyiben létezik, adjuk meg egy Hamilton-körüket:*



1.

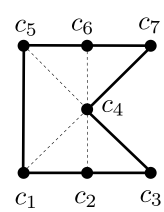


2.

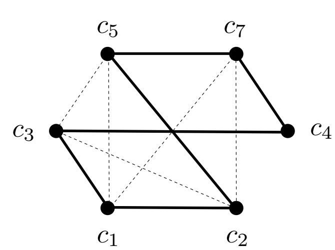


3.

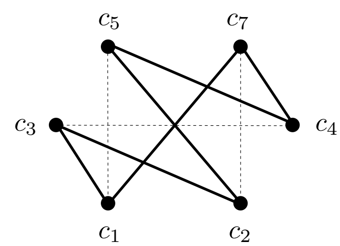
1. *A gráf rendje* 7, *ezért Dirac tételét nem teljesíti, hiszen az csak páros csúcsszámú gráfokra alkalmazható. Nem teljesül Ore tétele sem, ugyanis például a* $c_3$ *és* $c_7$ *egymással nem szomszédos csúcsok fokának összege csak* 4. *A gráfnak viszont létezik Hamilton-köre:*




2. *A gráf rendje* 6, *viszont a* $c_4$ *csúcs foka csak* 2, *így Dirac tétele nem teljesül. Azonban minden más csúcs foka* 4, *így Ore tétele teljesül, tehát a gráfnak van Hamilton-köre. Például:*




3. *A gráf rendje* 6, *és minden csúcsának foka* 3, *így Dirac és Ore tétele egyaránt teljesül, azaz a gráfnak van Hamilton-köre. Például:*




**3.26. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy ha egy társaság minden tagja ismeri a társaságnak legalább $k$ tagját ($k \geq 2$), akkor leültethető közülük legalább $k+1$ egyetlen kerek asztal körül úgy, hogy mindenkinek ismerőse legyen a szomszédja.*

*Megoldás.* Legyen $G$ egy olyan gráf, melynek csúcsai a társaság tagjainak felelnek meg. Két csúcs akkor van összekötve, ha a két tag ismeri egymást. A feladat tehát megmutatni, hogy ebben a gráfban van egy $k+1$ hosszúságú kör, amely a 3.24. feladat ($b$) részéből következik.

**3.27. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy ha egy 8 tagú társaság minden tagja ismeri a társaságnak legalább 4 tagját, akkor valamennyien leültethetők egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenkinek ismerőse legyen a szomszédja.*

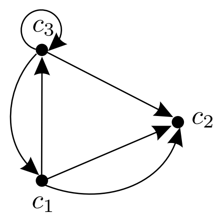
*Megoldás.* Az előző feladatban leírt gráffal dolgozva azt kell belátnunk, hogy a gráfnak van Hamilton-köre, amely a 3.24. feladat ($g$) részéből következik.

**3.28. Feladat.** *Legyen $n$ egy páratlan szám és legyen adott egy $n \times n$-es "sakktábla". Igazoljuk, hogy egy lóval lóugrásokban nem tudjuk bejárni a sakktáblát úgy, hogy a kiindulási helyre érkezzünk a végén, és közben minden mezőt csak egyszer érintünk.*

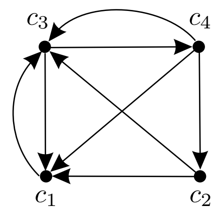
*Megoldás.* Legyenek a $G$ gráf csúcspontjai a sakktábla mezőinek megfelelőek. Két csúcs akkor legyen összekötve, ha a megfelelő mezőkről el lehet jutni 1 lólépésben egymásra. A feladat a tekintett gráfról belátni, hogy nincsen Hamilton-köre. Azt kell csak észreveni, hogy fehér mezőről csak feketére tudunk eljutni lóugrásban, és viszont. Így a $G$ gráf egy Hamilton-körét bejárva fekete mezőnek megfelelő csúcsot fehérnek megfelelő követ, és viszont, ezért páros sok csúcsnak kellene lennie. Azonban ez nem teljesül, hiszen a $G$ gráfnak $n^2$ számú csúcsa van, ami páratlan.

# 3. Gráfok csúcsmátrixa

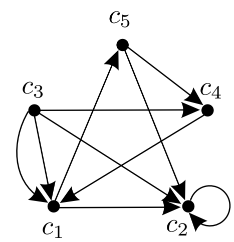
**3.29. Feladat.** *Írjuk fel az alábbi gráfok csúcsmátrixát:*




1.




2.




3.

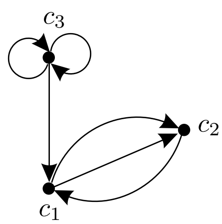
*Megoldás.* Az $n$ csúcsú irányított gráf csúcsmátrixa azon $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix, melynek $a_{ij}$ általános eleme egyenlő a $c_i$ csúcsból a $c_j$ csúcsba vezető élek számával.

1. A gráf csúcsmátrixa
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. A gráf csúcsmátrixa
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. A gráf csúcsmátrixa
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

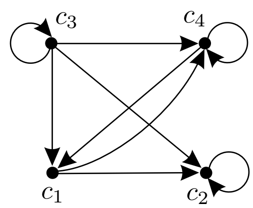
**3.30. Feladat.** *Ábrázoljuk az alábbi csúcsmátrixú gráfokat:*

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

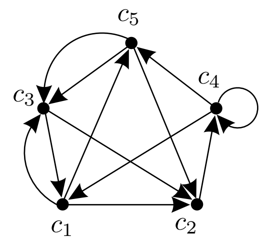
*Megoldás.*




1.




2.




3.

**3.31. Feladat.** *Hány 2, 3 illetve 4 hosszúságú töröttvonal rajzolható az alábbi csúcsmátrixú gráfok $c_2$ csúcsából a $c_3$ csúcsába, illetve a $c_3$ csúcsából a $c_2$ csúcsába?*

$(a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (c)\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

*Megoldás.* Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ csúcsmátrixú gráf $(A^l)_{ij}$ eleme megadja a $c_i$ csúcsból a $c_j$ csúcsba vezető $l$ hosszúságú töröttvonalak számát.

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 20 \\ 5 & 6 & 19 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ és $A^4 = \begin{pmatrix} 14 & 25 & 57 \\ 11 & 24 & 47 \\ 7 & 11 & 28 \end{pmatrix}$, tehát a $c_2$-ből $c_3$-ba vezető 2, 3 illetve 4 hosszúságú töröttvonalak száma rendre 5, 19 és 47, a $c_3$-ból $c_2$-be vezetők száma pedig 1, 5 és 11.

(b)

(c) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ és $B^4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, tehát a $c_2$-ből $c_3$-ba vezető 2, 3 illetve 4 hosszúságú töröttvonalak száma rendre 0, 6 és 4, a $c_3$-ból $c_2$-be vezetők száma pedig 1, 3 és 5.

(d) $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ és $C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, tehát a $c_2$-ből $c_3$-ba vezető 2, 3 illetve 4 hosszúságú töröttvonalak száma rendre 0, 2 és 2, a $c_3$-ból $c_2$-be vezetők száma pedig 2, 0 és 4.

**3.32. Feladat.** *Tartalmaznak-e az alábbi csúcsmátrixú gráfok irányított kört?*

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (c) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Megoldás.* Felhasználjuk azt a tételt, miszerint egy $n$ csúcspontú irányított gráf pontosan akkor tartalmaz kört, ha csúcsmátrixának $n$-edik hatványa nem azonosan nulla.

(a) A gráf tartalmaz irányított kört, ugyanis csúcsmátrixának harmadik hatványa $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, tehát nem az azonosan nulla mátrix.

(b) Könnyen kiszámolható, hogy a mátrix negyedik hatványa az azonosan nulla mátrix, így a gráf nem tartalmaz irányított kört.

(c) A gráf nem tartalmaz irányított kört, ugyanis csúcsmátrixának ötödik hatványa az azonosan nulla mátrix.

**3.33. Feladat.** *Határozzuk meg az alábbi csúcsmátrixú gráfok különböző csúcsai közötti legrövidebb irányított út hosszát, és az ilyen utak számát.*

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Megoldás.* Felhasználjuk, hogy egy $A$ csúcsmátrixú $n$ csúcspontú gráf $c_i$ csúcsából a $c_j$ csúcsba ($i \neq j$) vezető legrövidebb út hossza az a legkisebb $k$ pozitív egész szám, amelyre $(A^k)_{ij} \neq 0$, és ekkor az ilyen hosszúságú utak száma éppen $(A^k)_{ij}$. Nyilvánvaló, hogy ez a $k$ szám nem lehet nagyobb, mint $n-1$, hiszen az $n-1$-nél nagyobb élszámú töröttvonal már legalább 1 csúcson többször is átmegy, így az nem lehet út. Ebből következik, hogy ha egy csúcsból egy másikba nem tudok eljutni $n-1$ élen keresztül, akkor sehogy sem, azaz a legrövidebb út hossza végtelen. A $c_i$ csúcsból a $c_j$ csúcsba vezető legrövidebb út hosszát $d(c_i, c_j)$-vel jelöljük, és nevezhetjük a $c_i$ csúcs $c_j$ csúcstól való távolságának, de fontos megjegyezni, hogy irányított gráfok esetén ez a távolság nem metrika, hiszen nem biztos, hogy teljesül a $d(c_i, c_j) = d(c_j, c_i)$ egyenlőség.

(a) $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, azaz $d(c_1, c_3) = d(c_2, c_1) = d(c_3, c_2) = 1$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, tehát két élen keresztül már el tudok jutni $c_1$-ből $c_2$-be, $c_2$-ből $c_3$-ba és $c_3$-ból $c_1$-be, így $d(c_1, c_2) = d(c_2, c_3) = d(c_3, c_1) = 2$. Mivel a mátrixokban a nem nulla elemek mind 1-esek voltak, így bármely két csúcs esetén a legrövidebb utak száma 1.

(b) $B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, tehát $d(c_1, c_3) = d(c_2, c_3) = d(c_3, c_2) = 1$. A $c_2$-ből $c_3$-ba vezető legrövidebb utak száma 2, a $c_1$-ből $c_3$-ba és a $c_3$-ból $c_2$-be vezetőké pedig 1.

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, tehát $d(c_1, c_2) = 2$ és a $c_1$-ből $c_2$-be vezető legrövidebb utak száma 1. Mivel $c_2$-ből és $c_3$-ból nem tudunk eljutni kettő hosszúságú úton a $c_1$-be és a gráfnak 3 csúcsa van, ezért $c_1$-be a $c_2$ és $c_3$ csúcsokból nem vezet (irányított) út, így $d(c_2, c_1) = d(c_3, c_1) = \infty$.

(c) $C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, tehát $d(c_1, c_3) = d(c_2, c_4) = d(c_3, c_2) = d(c_4, c_1) = d(c_4, c_2) = d(c_4, c_3) = 1$. $c_1$-ből $c_3$-ba 2 legrövidebb út van, a többi 5 esetben pedig 1.

$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, ennélfogva $d(c_1, c_2) = d(c_2, c_1) = d(c_2, c_3) = d(c_3, c_4) = 2$. $c_1$-ből $c_2$-be 2 legrövidebb út van, a másik 3 esetben 1.

$C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, így $d(c_1, c_4) = d(c_3, c_1) = 3$. $c_1$ és $c_4$ között 2 legrövidebb út van, $c_3$ és $c_1$ között pedig 1.

# Irodalomjegyzék


[1] Andrásfalvi Béla: Ismerkedés a gráfelmélettel, *Budapest, Tankönyvkiadó* (1971).

[2] Feladatlapok II. matematikából (közgazdász hallgatók számára), *Debrecen, Matematika Intézet* (2004).

[3] Kovács Zoltán: Feladatgyűjtemény lineáris algebra gyakorlatokhoz, *Debrecen, Kossuth Egyetemi Kiadó* (1998).

[4] Solt György: Valószínűségszámítás, *Budapest, Műszaki könyvkiadó* (1995).