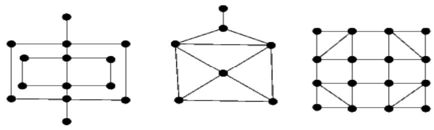
Diszkrét matematika II. feladatok

1. Gráfelmélet

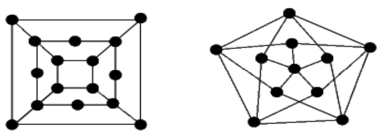
1.1. Könnyebb

1. Rajzold le az összes, páronként nem izomorf 3, 4, illetve 5 csúcsú egyszerű gráfot!
2. Van-e olyan (legalább kétpontú) gráf, melyben minden pont foka különböző?
3. Van-e olyan társaság, ahol minden embernek különböző számú ismerőse van?
4. Van-e olyan 9-pontú gráf, melyben a pontok foka rendre
   a)7,7,7,6,6,6,5,5,5; **b)** 6,6,5,4,4,3,2,2,1?
5. És olyan 8-pontú, melyben a fokszámok 6,6,6,6,3,3,2,2?
6. Mutasd meg, hogy minden gráfban a fokszámok összege az élszám kétszerese!
7. Mutasd meg, hogy tetszőleges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros!
8. Mutasd meg, hogy ha egy gráf minden pontja legalább másodfokú, akkor a gráfban van kör!
9. Igaz-e, hogy ha egy gráf bármely két pontja között van séta, akkor összefüggő?
10. Mutasd meg, hogy ha a-ból vezet út b-be, és b-ből c-be, akkor a-ból is vezet c-be!
11. Mutasd meg, hogy ha egy $2n$-pontú gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő!
12. Mi történik, ha $n-1$-fokú pontokat is megengedünk?
13. Igaz-e, hogy vagy G, vagy a komplementere biztosan összefüggő?
14. Rajzold le a következő gráfot! Egy kör kerületén vegyünk fel öt pontot! A gráf csúcsai a pontok által meghatározott $\binom{5}{2}$ húr lesz. Két csúcsot akkor kötünk össze a gráfban, ha a nekik megfelelő húroknak nincs közös végpontjuk. Ezt hívják Petersen-gráfnak.
15. Melyik gráfot tudod lerajzolni úgy, hogy az élei ne messék egymást:
    (a) egy kocka éleinek hálózata; **(b)** teljes n-szög $n = 3, 4, 5, ..$; **(c)** „három-ház-három-kút”: páros gráf 3-3 ponttal (házak, kutak), minden ház összekötve minden kúttal; **(d)** a Petersen-gráf.
16. Hány éle van egy n-pontú síkgráfnak, ha minden lapja (a végtelen lap is) háromszög?
17. Mutasd meg, hogy egy $n \geq 3$ pontú síkbarajzolható gráfnak legfeljebb $3n-6$ éle lehet!
18. Bizonyítsd be, hogy ha egy G gráf pontszáma legalább 11, akkor vagy G, vagy a komplementere nem síkbarajzolható!
19. Rajzolj egy olyan 8-pontú síkgráfot, aminek a komplementere is síkgráf!
20. Igaz-e, hogy **(a)** minden legalább kétpontú fában van elsőfokú pont; **(b)** minden n-pontú fának $n-1$ éle van; **(c)** egy gráf pontosan akkor fa, ha bármely két pontja között pontosan egy út vezet?
21. Jelöljük egy fa elsőfokú pontjanak számát f_1-gyel, a kettőnél nagyobb fokúak számát pedig c-vel. Mutasd meg, hogy ha legalább két pontja van a gráfnak, akkor $f_1 \geq c+2$.
22. Hat versenyző körmérkőzést játszik. Bizonyítsd be, hogy bármely időpontban van három olyan versenyző, akik már mind játszottak egymással, vagy három olyan, hogy egyik sem játszott a másik kettővel.
23. Mutasd meg, hogy egy egyszerű síkbarajzolható gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!
24. Legfeljebb hány éle lehet egy síkbarajzolható gráfnak, ha minden köre legalább k hosszú?
25. Egy nemzetközi konferencián öt különböző ország egy-egy résztvevője ül. Bizonyítsd be, hogy van közöttük legalább kettő, akiknek az országa nem szomszédos!

26. Igazold, hogy egy összefüggő véges gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja!
27. Mutasd meg, hogy egy véges fában az összes leghosszabb út egy ponton megy át!
28. Legfeljebb hány szeparáló él (olyan él, amit elhagyva több komponensre esik szét a gráf) van egy $n(\geq 1)$ pontú gráfban? És legfeljebb hány szeparáló pont? Mindkét esetben mutass olyan példát, ahol pontosan ennyi van!
29. Lerajzolhatóak-e a ceruza felemelése nélkül az alábbi gráfok úgy, hogy minden élet pontosan egyszer húzunk be (=van-e Euler vonala/köre)?



30. Mutasd meg, hogy egy síkbarajzolható gráf lapjai pontosan akkor színezhetőek két színnel úgy, hogy a szomszédos lapok különböző színűek legyenek, ha a gráfnak van Euler-körsétája!
31. Mutasd meg, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetőek piros és kék színekkel úgy, hogy minden csúcshoz két-két piros és kék él illeszkedjen!
32. Bizonyítsd be, hogy amennyiben egy gráfban található k pont, melyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor a gráfnak nincs Hamilton-köre!
33. Bizonyítsd be, hogy ha egy véges összefüggő gráf K köréből egy élt eltörölve a gráf egy leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre a gráfnak!
34. Legyen $n \geq 3$ pozitív egész, és G egy n pontú egyszerű, összefüggő gráf. Bizonyítsd be, hogy ha G minden csúcsának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre!
35. Mutasd meg, hogy minden $n \geq 5$-re igaz, hogy **(a)** létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G is és $\overline{G}$ is tartalmaz Hamilton-kört; **(b)** létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy sem G sem $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört.
36. Van-e az alábbi gráfoknak Hamilton köre (útja)?



37. Egy hotelba 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal köré ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alatt az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor minden résztvevő aznap este hazamegy. Mutasd meg, hogy legalább 25 éjszakát a hotelben tölt a társaság!

1.2. Nehezebb

1. ...

2. Csoportelmélet

2.1. Könnyebb

1. Melyik félcsoport, illetve csoport az alábbiak közül:
a) a természetes számok az összeadással; **b)** a páros számok az összeadással; **c)** a páratlan számok a szorzással; **d)** egészek a kivonással; **e)** páros számok a szorzással; **f)** 7 többszörösei az összeadással; **g)** racionális számok az összeadással; **h)** racionális számok a szorzással; **i)** nem nulla racionális számok a szorzással; **j)** $\{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \{1,2\}\}$ az összeadással; **k)** $\{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \{1,2,m\}\}$ az összeadással.
2. Melyik félcsoport, illetve csoport az alábbiak közül:
a) $(\mathbb{Z}, \circ)$, ha $a \circ b = (a+b)/2, (a,b \in \mathbb{Z})$; **b)** $(\mathbb{Q}, \circ)$, ha $a \circ b = (a+b)/2, (a,b \in \mathbb{Q})$; **c)** $(\mathbb{R}$, osztás); **d)** $(\mathbb{R} \setminus \{0\}$, osztás); **e)** a 8-adik komplex egységgyökök a szorzással; **f)** az n-edik egységgyökök halmaza a szorzással, ahol n rögzített pozitív egész; **g)** az n-edik egységgyökök halmaza a szorzással, ahol n befutja a pozitív egész számokat.

3. Egész számok körében definiáljuk az $m \star n = m + n - mn$ műveletet. Mutassuk meg, hogy egységelemes félcsoportot kapunk! Mely elemeknek van inverze?

4. Legyen $(G, \cdot)$ csoport és $H \leq G$. Mutasd meg, hogy rögzített $g \in G$ esetén $g^{-1}Hg \leq G$

5. Bizonyítsd be, hogy egy kommutatív csoportnak azok az elemei, melyeknek a rendje egy adott k számnak osztója, részcsoportot alkotnak!

6. Melyik igaz? **(a)** ha egy csoport rendje véges, akkor minden eleme véges rendű; **(b)** ha egy csoport minden eleme véges rendű, akkor a csoport rendje is véges.

7. Legyen $(G, \cdot)$ csoport, $u \in G$ rögzített elem. Definiáljunk G-n egy új $\circ$ műveletet $a \circ b := a \cdot u \cdot b$ segítségével. Csoport lesz-e $(G, \circ)$?

8. Lássuk be, hogy ha egy csoport minden elemének inverze önmaga, akkor a csoport kommutatív.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha a $(G, \cdot)$ csoport minden a, b elempárjára $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, akkor a csoport kommutatív.

10. **a)** A 8-adik komplex egységgyökök szorzással alkotott csoportjában határozzuk meg a csoport rendjét és az egyes elemek rendjét; **b)** Ebben a csoportban határozzuk meg az egyes elemek generátumát; **c)** Ciklikus-e ez a csoport?

11. Bizonyítsuk be, hogy $(G, \cdot)$ csoportban a és a^{-1} rendje egyenlő!

12. Bizonyítsuk be, hogy $(G, \cdot)$ csoportban a és $b^{-1} \cdot a \cdot b$ rendje egyenlő!

13. Legyen $(G, \cdot)$ véges, páros rendű csoport. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan az egységelemtől különböző eleme, amelynek az inverze önmaga.

14. Bizonyítsuk be, hogy ha $(G, \cdot)$ véges csoport, akkor minden $a \in G$-re $a^{|G|} = e$, ahol e a csoport egységeleme.

15. Egy multiplikatív csoport c elemére $c^{100} = e$ és $c^{1999} = e$. Határozzuk meg c-t.

16. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $(G, \cdot)$ csoportnak van az egységelemtől különböző véges rendű eleme, akkor van prímrendű eleme is.

2.2. Nehezebb

1. ...

3. Gyűrűk, testek

3.1. Könnyebb

1. Vizsgáljuk meg, hogy gyűrűt alkotnak-e az alábbi kétműveletes struktúrák:
a) egész számok az összeadásra és szorzásra nézve; **b)** a páros számok az összeadásra és szorzásra nézve;
c) adott n egész szám többszörösei az összeadásra és szorzásra nézve (az $n = 0$ esetet külön nézzük meg);
d) $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve; **e)** $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve (Gauss-egészek); **f)** $n \times n$-es egész elemű mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra nézve; **g)** $n \times n$-es valós elemű mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra nézve; **h)** $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ a modulo m tekintett maradékosztályok a maradékosztály összeadásra és szorzásra.

2. Jelöljön $(S, +)$ egy Abel-csoportot. Definiáljuk a $\circ$ műveletet a következő módon: $a \circ b = 0$, ahol 0 az $(S, +)$ egységeleme. Bizonyítsuk be, hogy az $(S, +, \circ)$ struktúra gyűrű! (Ezt nevezzük zérógyűrűnek.)

3. Testet alkotnak-e a modulo $2m$ maradékosztályok közül a párosak (tehát ez: $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \ldots, \overline{2m-2}\}$) a maradékosztályok közötti összeadásra és szorzásra, ha **a)** $2\mathrm{m} = 10$; **b)** $2\mathrm{m} = 20$?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $(T, +, \cdot)$ véges, legalább két elemet tartalmazó integritási tartomány, akkor test!

5. Határozzuk meg a modulo 12 maradékosztályok gyűrűjében a nullosztókat!

6. Vizsgáljuk meg, hogy gyűrűt alkotnak-e az alábbi kétműveletes struktúrák:
a) $\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve; **b)** A $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett valós függvények a függvények összeadására és szorzására nézve (az f és g függvények összegét $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, a szorzatát pedig az $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in [-1; 1]$ hozzárendeléssel definiáljuk.); **c)** $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra.

7. Legyen $D = \{x : x \in \mathbb{Q}, x = m \cdot 2^k, m, k \in \mathbb{Z}\}$ a véges diadikus törtek halmaza. Lássuk be, hogy a véges diadikus törtek az összeadásra és szorzásra integritási tartományt alkotnak, de nem alkotnak testet.

8. Felbonthatatlan, illetve prím-e $\mathbb{Z}_{10}$-ben $\overline{5}$?

9. Mely számok osztói az 1-nek a véges diadikus számok gyűrűjében? Mik az egységek? Adjunk egyszerű feltételt arra, hogy ebben a gyűrűben egy szám oszt egy másikat!

10. A véges diadikus számok gyűrűjében felbonthatatlan-e a 12? Melyek ugyanebben a gyűrűben a felbonthatatlanok és melyek a prímek?

11. Legyen $\{a+bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve (Gauss-egészek). Legyen $\phi(a+bi) = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$. Bizonyítsuk be ennek a leképezésnek a felhasználásával, hogy a Gauss-egészek körében az egységek $1, -1, i, -i$!

12. A (páros számok, $+$, $\cdot$) integritási tartományt képeznek. Euklideszi gyűrű-e?

13. Legyen $L = \{a + bi\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadással és szorzással. (L-egészek.)
a) Bizonyítsuk be, hogy az $(L, +, \cdot)$ struktúra egységelemes integritási tartomány; **b)** Bizonyítsuk be, hogy az L-egészek körében két egység van, ezek 1 és -1; **c)** Bizonyítsuk be, hogy az L-egészek körében $1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}, 2, 3$ felbonthatatlan elemek, de nem prímelemek; **d)** Bizonyítsuk be, hogy az $(L, +, \cdot)$ gyűrű nem euklideszi gyűrű.

14. Melyek $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ részgyűrűi? Van-e köztük ideál?

15. Bizonyítsd be, hogy $2\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$-nek részgyűrűje! Ideál-e?

16. Tekintsük a racionális számok $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ gyűrűjét. Bizonyítsuk be, hogy a páros egészek a racionális számok gyűrűjének részgyűrűjét alkotják, de nem ideálját!

17. Bizonyítsuk be, hogy az egész számok részgyűrűt képeznek a racionális számok gyűrűjében, de nem ideált!

18. Döntsd el, hogy a Gauss-egészek gyűrűjében az alábbi halmazok ideált alkotnak-e, és ha igen, határozd meg a faktorgyűrűt:
a) $\mathbb{Z}$; **b)** $2\mathbb{Z} + 2i\mathbb{Z}$; **c)** $4\mathbb{Z} + 6i\mathbb{Z}$.

19. Lássuk be, hogy a páros számok (P) az egészek részgyűrűjét, sőt ideálját alkotják! Határozzuk meg a $\mathbb{Z}/P$ maradékosztály gyűrűt!

20. Legyen $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ és $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in 2\mathbb{Z} \right\}$. Mutasd meg, hogy I ideál R-ben! Hány elemű az R/I faktorgyűrű?

3.2. Nehezebb

1. ...

4. Polinomok

4.1. Könnyebb

1. Add meg $\mathbb{Z}_{72}$ felett a $8x^2 + 12$ és a $18x + 36$ polinomok szorzatát!

2. Határozd meg a $\mathbb{Z}$ feletti $3x^8 + 5x^6 - 11x^3 + 7x^2 - 15x + 8$ és $16x^7 - 13x^6 + 6x^3 - 13x + 21$ polinomok szorzatában a 0-ad, 9-ed, 14-ed, 15-öd és 20-ad fokú tag együtthatóját! Oldd meg ugyanezt $\mathbb{Z}_{24}$ felett is! Mennyi lesz ekkor a szorzatpolinom foka?

3. Legyen $f(x) = x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3$ és $g(x) = x^2 + 4x - 5$. Osszuk el maradékosan f-et a g-vel
a) $\mathbb{Q}$ felett; **b)** $\mathbb{Z}_3$ felett!

4. Hogyan kell megválasztani a p, q, m értékeket, hogy az $x^3 + px + q$ polinom $\mathbb{C}$ felett osztható legyen az $x^2 + mx - 1$ polinommal?

5. Határozd meg a és b értékét úgy, hogy $x^4 + 3x^2 + ax + b$ osztható legyen $x^2 - 2ax + 2$-vel $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ felett!

6. Osszd el az $f(x)$ polinomot $g(x)$-szel maradékosan $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_7$ és $\mathbb{Z}_6$ felett, ha lehet
a) $f(x) = 42x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 43x - 12$, $g(x) = x^2 - x + 1$; **b)** $f(x) = 5x^4 + 2x - 3$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

7. Határozd az $f(x)$ polinom $g(x)$ polinommal vett osztási maradékát $\mathbb{Q}$ felett, ha
a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$; **b)** $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

8. Bontsd fel az $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 12x^2 + 10x + 14$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ felett!

9. Bontsd fel az $f(x) = 20x^4 + 26x^3 + 65x^2 + 91$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ felett!

10. Mik az $f(x) = 40x^4 + 45x + 15$ polinom racionális gyökei?

11. Keresd meg az $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6$ polinom helyettesítési értékét a $3, -1, 2, -2$ helyeken!

12. Határozd meg az alábbi maradékos osztások hányadosát és maradékát a Horner-módszer segítségével: $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$
a) $g(x) = x - 3, R = \mathbb{Z}$; **b)** $g(x) = x + 2, R = \mathbb{Z}$; **c)** $g(x) = x - 1/2, R = \mathbb{Q}$; **d)** $g(x) = x - 3, R = \mathbb{Z}_3$;
e) $g(x) = x - 3, R = \mathbb{Z}_5$.

13. Határozd meg az alábbi maradékos osztások hányadosát és maradékát a Horner-módszer segítségével:
a) $f(x) = 4x^3 + x^2, g(x) = x + 1 + i$; **b)** $f(x) = x^3 - x^2 - x, g(x) = x - 1 + 2i$.

14. Határozd meg a p értékét úgy, hogy az $f(x) = x^5 + 3x^4 + 5x + p$ polinom osztható legyen $x - 2$-vel!

5. Kódolás

5.1. Könnyebb

1. Az adott eloszlásnak határozd meg az entrópiáját, valamint hogy hányad része az entrópia felső korlátjának:
a) 0.34, 0.18, 0.17, 0.16, 0.15; **b)** 0.6, 0.1, 0.09, 0.08, 0.07, 0.06; **c)** 0.4, 0.4, 0.1, 0.03, 0.03, 0.02, 0.02;
d) 0.3, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05.

2. Az adott kódokról döntsd el, hogy melyik felbontható, prefix, vesszős, illetve egyenletes! Rajzold fel a kódfát is:
a) {0, 10, 110, 1110, 1011, 1101}; **b)** {1, 011, 010, 001, 000, 110}; **c)** {0, 10, 110, 1110, 11110, 111110};
d) {111, 110, 101, 100, 011, 010}.

3. Az alábbi kódokról döntsd el melyik felbontható:
a) {1021, 121, 2021, 021, 221, 1121, 0121, 0221}; **b)** {01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22}.

4. Igaz-e, hogy egy t hibát javító kód
a) legalább $2t + 1$ hibát jelez; **b)** legalább $2t$ hibát jelez; **c)** legfeljebb $2t$ hibát jelez?

5. Tekintsük az alábbi bináris kódolást:
$$00 \mapsto 00000, \quad 01 \mapsto 01110, \quad 10 \mapsto 10101, \quad 11 \mapsto 11011.$$
a) Mekkora a 01110 és az 10101 kódszavak távolsága? **b)** Mekkora a kód távolsága? **c)** Mutasd meg, hogy a kód csoportkód $\mathbb{Z}_2^5$-ben! **d)** Mennyi az 11011 kódszó súlya? **e)** Mennyi a kód súlya? **f** Add meg a 00000 kódszóhoz legfeljebb 1 távolságra levő $\mathbb{Z}_2^5$-beli szavak halmazát! **g)** A 01000 szót mire dekódoljuk minimális távolságú dekódolással?

6. Az alábbi bináris kódok esetében állapítsd meg a kód távolságát, hibajelző és hibajavító képességét, hogy lineáris-e, valamint a lineárisoknál add meg a szokásos bázisban a generátormátrixot és egy ellenőrző-mátrixot:
a) $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_1 + c_2 + c_3 + 1)$; **b)** $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_1, c_2 + c_3)$;
c) $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_1, 1 - c_2c_3)$.

7. Legyen egy bináris lineáris kód generátormátrixa:
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Add meg valamelyik ellenőrző-mátrixát, majd ennek felhasználásával a kódtávolságot!

8. Egy bináris kód generátormátrixa
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Add meg a kód ellenőrző mátrixát és ennek segítségével a távolságát!

9. Egy bináris kód generátor-mátrixa
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Mennyi a kód számossága? Add meg a kód ellenőrző mátrixát és a távolságát!